Симетрійна редукція як метод розмноження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь

В.І. ФУЩИЧ, Л.Л. БАРАННИК

We propose to use the symmetry reduction method to reproduce solutions for systems of linear differential equations on their traces with respect to generators of invariance algebra. By means of this approach, new exact solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with potential are constructed.

Постановка задачі. Нехай S — система лінійних диференціальних рівнянь з n незалежними змінними $x_1, \ldots, x_n$ і m шуканими функціями $u_1, \ldots, u_m$. Кожен лінійний оператор симетрії [1]

$$Y = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + B(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

системи S переводить будь-який її розв'язок в розв'язок цієї ж системи (по індексах, що повторюються, проводиться підсумовування).

У цій роботі метод редукції [2] буде використано для відтворення розв'язку системи S за його образами відносно генераторів алгебри симетрії розглядуваної системи. За допомогою цього підходу знайдено нові точні розв'язки лінійного рівняння Шродінгера з потенціалом.

Обгрунтування підходу. Надалі, говорячи про алгебру симетрій системи S, ми маємо на увазі алгебру симетрій в сенсі Лі [1–3]. Припустимо, що для S існує нетривіальна алгебра симетрій. Нехай вона породжується скінченновимірною алгеброю Лі K операторів вигляду

$$\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b_{kq}(x)u_q\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{1}$$

і операторами

$$X = f_j(x)\frac{\partial}{\partial u_j},$$

де $u = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$ є довільним розв'язком системи S. Для проведення симетрійної редукції нам потрібні тільки такі підалгебри Лі алгебри K, які не містять операторів виду (1) з умовою $\xi_i(x) = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Нехай L — одна з цих підалгебр і нехай $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ — її базис. Припустимо, що

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}Y_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, s). \tag{2}$$

Доповіді НАН України, 1996, № 12, С. 44–49.

Означення. *Слідом розв'язку* $\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)$ *на операторові* Y_α *будемо називати такий розв'язок* $\big(f_1^{(\alpha)}(x),\dots,f_m^{(\alpha)}(x)\big)$ *системи* S*, що*

$$\left[Y_\alpha, f_j(x)\frac{\partial}{\partial u_j}\right] = f_j^{(\alpha)}(x)\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Якщо

$$Y_\alpha = \xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b_{kq}^\alpha(x)u_q\frac{\partial}{\partial u_k},$$

то

$$f_j^{(\alpha)} = \xi_i^\alpha(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - b_{jq}^\alpha f_q. \tag{3}$$

Слід $\big(f_1^{(\alpha)}(x),\dots,f_m^{(\alpha)}(x)\big)$ є, очевидно, образом розв'язку $\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)$ відносно оператора

$$\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - B^\alpha(x),$$

де

$$B^\alpha(x) = (b_{kq}^\alpha(x)).$$

Твердження 1. *Послідовність розв'язків* $(f_{1\alpha},\dots,f_{m\alpha})$ $(\alpha=1,\dots,s)$ *системи* S *є послідовністю слідів деякого розв'язку системи* S *на генераторах* $Y_1,\dots,Y_s$ *відповідно алгебри* L *тільки тоді, коли*

$$Y_\alpha(f_{j\beta}) - Y_\beta(f_{j\alpha}) = C_{\alpha\beta}^\gamma f_{j\gamma} \quad (j=1,\dots,m;\ \alpha,\beta,\gamma=1,\dots,s).$$

Справедливість твердження 1 випливає з комутаційних співвідношень (2).

Твердження 2. *Розв'язок системи* S *є* L*-інваріантним тоді і тільки тоді, коли його сліди на генераторах цієї підалгебри є нульовими.*

Твердження 3. *Розв'язки* $u=f(x)$ *і* $u=f'(x)$ *системи* S *мають однакові сліди на відповідних генераторах підалгебри* L *тоді і тільки тоді, коли розв'язок* $u=f(x)-f'(x)$ *є* L*-інваріантним.*

На підставі твердження 3 розв'язок відтворюється за своїми слідами на генераторах алгебри L не однозначно, а з точністю до доданків, що є L-інваріантними розв'язками (будемо говорити: з точністю до L-інваріантних розв'язків).

Теорема. *Для того, щоб розв'язок* $(f_1,\dots,f_m)$ *системи* S *мав слід* $(f_{1\alpha},\dots,f_{m\alpha})$ *на генераторі* Y_α $(\alpha=1,\dots,s)$ *підалгебри* L*, необхідно і достатньо, щоб* $(f_1,\dots,f_m)$ *був* $\tilde L$*-інваріантним розв'язком, де* $\tilde L$ *— алгебра Лі з базисом*

$$\tilde Y_\alpha = Y_\alpha + f_{j\alpha}\frac{\partial}{\partial u_j} \quad (\alpha=1,\dots,s).$$

Доведення. Нехай

$$u_j = f_j(x) \quad (j=1,\dots,m) \tag{4}$$

є $\tilde{L}$-інваріантним розв'язком системи S. Тоді

$$\tilde{Y}_\alpha(u_j - f_j) = b^\alpha_{jq}u_q + f_{j\alpha} - \xi^\alpha_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_{(4)} = b^\alpha_{jq}f_q + f_{j\alpha} - \xi^\alpha_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0,$$

звідки випливає, що

$$f_{j\alpha} = \xi^\alpha_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - b^\alpha_{jq}f_q \overset{(3)}{=} f_j^{(\alpha)}.$$

Це означає, що розв'язок $(f_{1\alpha}, \ldots, f_{m\alpha})$ є слідом розв'язку $(f_1, \ldots, f_m)$ на Y_α $(\alpha = 1, \ldots, s)$. Аналогічно доводиться і обернене твердження теореми.

Наслідок. *$\tilde{L}$-інваріантні розв'язки системи S і тільки вони мають ту властивість, що їх слід на Y_α збігається з $(f_{1\alpha}, \ldots, f_{m\alpha})$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$.*

Розмноження розв'язків рівняння Шродінгера. Як встановлено в [4, 5], одновимірне рівняння Шродінгера з потенціалом

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \tag{5}$$

має нетривіальну алгебру симетрій тоді і тільки тоді, коли $V(x)$ збігається з однією з таких функцій:

$$ax + b, \quad \frac{c}{x^2} + k^2x^2, \quad \frac{c}{x^2} - k^2x^2, \tag{6}$$

a, b, c, k — дійсні числа, причому $k \geq 0$, $a \neq 0$ або $a = b = 0$.

Домовимося розв'язком рівняння (5) називати пару дійсних функцій $f(t,x)$, $g(t,x)$, пов'язаних з хвильовою функцією $\psi(t,x)$ формулою $\psi(t,x) = f(t,x) + ig(t,x)$.

Рівняння (5) рівносильне системі Шродінгера

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - gV(x) = 0,\\ &\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fV(x) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи доведену теорему та наслідок з неї, знайдемо деякі розв'язки системи (7) для потенціалів (6).

1. Випадок $V(x) = 0$. При цій умові система (7) є інваріантною відносно операторів

$$D = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = f\frac{\partial}{\partial f} + g\frac{\partial}{\partial g}.$$

Відтворимо розв'язок системи (7) за його слідом $f = x^2 - 2t$, $g = x^2 + 2t$ на операторі $D + Z$. Для цього згідно наслідку з теореми потрібно знайти розв'язки системи (7), інваріантні відносно оператора

$$\tilde{Y} = D + Z + (x^2 - 2t)\frac{\partial}{\partial f} + (x^2 + 2t)\frac{\partial}{\partial g}.$$

Оператор $\tilde{Y}$ має такі основні інваріанти:

$$fx^{-1} - \frac{\omega - 2}{\omega}x, \quad gx^{-1} - \frac{\omega + 2}{\omega}x, \quad \omega = \frac{x^2}{t}.$$

Відповідний їм анзац

$$f = x\varphi_1(\omega) + (\omega - 2)t, \quad g = x\varphi_2(\omega) + (\omega + 2)t \tag{8}$$

редукує систему (7) до системи

$$\begin{aligned} &-\omega\dot\varphi_1 + 6\dot\varphi_2 + 4\omega\ddot\varphi_2 = 0, \\ &\omega\dot\varphi_2 + 6\dot\varphi_1 + 4\omega\ddot\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) має розв'язок

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\gamma\frac{2}{\sqrt{\omega}}\cos\frac{\omega}{4} - \delta\frac{2}{\sqrt{\omega}}\sin\frac{\omega}{4} - \sqrt{2\pi}\left[\gamma \mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \delta \mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right], \\ \varphi_2 &= -\gamma\frac{2}{\sqrt{\omega}}\sin\frac{\omega}{4} + \delta\frac{2}{\sqrt{\omega}}\cos\frac{\omega}{4} + \sqrt{2\pi}\left[\gamma \mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right) + \delta \mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right], \end{aligned}$$

де $\mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right)$ — відповідно косинус- і синус-інтеграл Френеля [6]. Підставляючи вирази для φ_1 і φ_2 в формули (8), одержуємо відтворений розв'язок рівняння Шредінгера (5)

$$\begin{aligned} u &= \{x^2 - 2t\} - 2\sqrt{t}\left(\gamma\cos\frac{x^2}{4t} + \delta\sin\frac{x^2}{4t}\right) - \sqrt{2\pi}x\left[\gamma \mathrm{S}\left(\frac{x^2}{4t}\right) - \delta \mathrm{C}\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right], \\ v &= \{x^2 + 2t\} - 2\sqrt{t}\left(\gamma\sin\frac{x^2}{4t} - \delta\cos\frac{x^2}{4t}\right) + \sqrt{2\pi}x\left[\gamma \mathrm{C}\left(\frac{x^2}{4t}\right) + \delta \mathrm{S}\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right]. \end{aligned}$$

Зауважимо, що у фігурних дужках подано компоненти вихідного розв'язку. Внаслідок лінійності і однорідності рівняння (5) після вилучення з поданих виразів цих компонент ми знову одержимо розв'язок рівняння (5).

2. Випадок $W(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Якщо на операторі $T = \frac{\partial}{\partial t}$ розв'язок має слід

$$f = C_1\cos\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right), \quad g = C_1\sin\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right),$$

де

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}a, \quad C_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi q \quad \text{або} \quad C_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}a, \quad C_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi q, \quad q \in \mathbb{Z},$$

то з точністю до $\langle T\rangle$-інваріантних розв'язків його можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} f = C_1&\int_0^t \cos\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right)dt + \\ &+ (-ax-b)^{1/2}\left[\mathrm{Z}_{1/3}^{(1)}\left(-\frac{2}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(-\frac{1}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right)^{1+2l}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+l\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}+l\right)}\right], \end{aligned}$$

$$g = C_1 \int_0^t \sin\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right) dt +$$
$$+ (-ax-b)^{1/2}\left[\mathrm{Z}^{(2)}_{1/3}\left(-\frac{2}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(-\frac{1}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right)^{1+2l}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+l\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}+l\right)}\right],$$

при цьому $x \le -\frac{b}{a}$. В наведених формулах $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z) = A^{(j)}\mathrm{J}_\nu(z) + B^{(j)}\mathrm{Y}_\nu(z)$, $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z)$ — циліндрична функція, $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{Y}_\nu(z)$ — функції Бесселя першого та другого роду відповідно [7].

3. Випадок $V(x) = \frac{c}{x^2}$ $(c \ne 0)$. Наведемо два розв'язки, які задані своїми слідами на операторі T.

Якщо $c = -\frac{1}{4}$ і слідом є розв'язок

$$f = x^{1/2}(A_1 + A_2 \ln x), \quad g = x^{1/2}(B_1 + B_2 \ln x),$$

то відтворений розв'язок має вигляд

$$f = x^{1/2}(A_1 + A_2 \ln x)\,t + x^{1/2}(K_1 + K_2 \ln x) + x^{5/2}\left(\frac{B_1 - B_2}{4} + \frac{B_2}{4}\ln x\right),$$
$$g = x^{1/2}(B_1 + B_2 \ln x)\,t + x^{1/2}(L_1 + L_2 \ln x) + x^{5/2}\left(\frac{A_2 - A_1}{4} - \frac{A_2}{4}\ln x\right).$$

Якщо $c > -\frac{1}{4}$, а слідом є розв'язок

$$f = A_1 x^\gamma + A_2 x^\delta, \quad g = B_1 x^\gamma + B_2 x^\delta,$$

де $\gamma = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, $\delta = \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$, то після відтворення відносно оператора T отримаємо розв'язок

$$f = (A_1 x^\gamma + A_2 x^\delta)t + K_1 x^\gamma + K_2 x^\delta +$$
$$+ \frac{B_1}{(\gamma+2)(\gamma+1) - c}x^{\gamma+2} + \frac{B_2}{(\delta+2)(\delta+1) - c}x^{\delta+2},$$
$$g = (B_1 x^\gamma + B_2 x^\delta)t + L_1 x^\gamma + L_2 x^\delta -$$
$$- \frac{A_1}{(\gamma+2)(\gamma+1) - c}x^{\gamma+2} - \frac{A_2}{(\delta+2)(\delta+1) - c}x^{\delta+2}.$$

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
2. Fushchych W., Shtelen W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluver Academic Publishers, 1993, 436 c.
3. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, New York, Academic Press, 1982, 400 p.
4. Anderson R., Kumei S., Wulfman C. Invariants of the equations of wave mechanics, I, II, *Rev. Mexicana Fis.*, 1972, **21**, 1–33, 35–57.
5. Boyer C., The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential, *Helv. Phys. Acta*, 1974, **47**, 589–605.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды, М., Наука, 1981, 800 с.
7. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1971, 576 с.