Про новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь

В.І. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК

We proposed a new simple method of constructing some classes of exact solutions of multidimensional nonlinear wave equations.

У статті пропонується конструктивний і простий спосіб побудови деяких класів точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики, який базується на ідеї редукції [1, 2]. Основні положення нашого підходу ми викладатимемо на прикладах рівнянь Даламбера і Шродінгера.

1. Розглянемо нелінійне рівняння Даламбера

$$\Box u = F(u), \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

$\Box$ — оператор Даламбера, $F(u)$ — нелінійна гладка функція. Побудові точних розв'язків рівняння (1) присвячено багато робіт (див. [2, 3] і цитовану там літературу).

Для побудови розв'язків рівняння (1) використаємо симетрійний (або умовно-симетрійний) анзац [1, 2]. Нехай цей анзац має вигляд

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \dots, \omega_k) + g(x) \tag{2}$$

або

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega_1, \dots, \omega_k) + g(x),$$

де $\omega_1 = \omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$, ..., $\omega_k = \omega_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — нові незалежні змінні, $h(u)$ — деяка задана функція. Підстановка (2) дозволяє побудувати більш загальний анзац, а саме: анзац (2) будемо вважати частинним випадком анзацу

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_l) + g(x) \tag{3}$$

де $\omega_{k+1}, \dots, \omega_l$ — невідомі змінні, які необхідно визначити. Змінні $\omega_{k+1}, \dots, \omega_l$ будемо визначати з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає анзацу (3), збігається з редукованим рівнянням, що відповідає анзацу (2).

Розглянемо, наприклад, симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Узагальнений анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ буде редукувати чотивимірне рівняння (1) до рівняння

$$\begin{gathered} 4\omega_1\varphi_{11} + 8\varphi_1 + 2\varphi_{12}A_\mu B^\mu + \varphi_2\Box\omega_2 + \varphi_{22}(B_\mu)^2 + F(\varphi) = 0, \\ A_\mu \equiv \frac{\partial\omega_1}{\partial x_\mu}, \quad B_\mu \equiv \frac{\partial\omega_1}{\partial x_\mu}, \quad \varphi_{kl} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \varphi_k \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \end{gathered} \tag{4}$$

Накладемо на рівняння (4) умову, щоб воно збігалося з редукованим рівнянням

$$4\omega_1\varphi_{11} + 8\varphi_1 + F(\varphi) = 0. \tag{5}$$

Доповіді НАН України, 1996, № 10, С. 48–51.

При цьому припущені рівняння (4) розпадається на два рівняння

$$4\omega_1\varphi_{11} + 8\varphi_1 + F(\varphi) = 0, \tag{6}$$

$$(B_\mu)^2\varphi_{22} + \varphi_2\Box\omega_2 + 2\varphi_{12}A_\mu B^\mu = 0. \tag{7}$$

Важливо підкреслити, що (6) є звичайним диференціальним рівнянням. Очевидно, що якщо знайти таке φ, яке задовольняє систему (6), (7), то ми побудуємо розв'язок (1). Рівняння (7) буде виконутуватися для довільної функції φ, якщо на змінну ω_2 накласти умови

$$\Box\omega_2 = 0, \quad (B_\mu)^2 = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^\mu} = 0, \tag{8}$$

$$A_\mu B^\mu \equiv \frac{\partial\omega_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^\mu} = 0. \tag{9}$$

Отже, якщо нову змінну ω_2 вибрати так, щоб задовольнялись умови (8), (9), то багатовимірне рівняння (1) редукується до звичайного диференціального рівняння (6) і його розв'язки дадуть нам розв'язки рівняння (1). Проблема редукції зведена до побудови загальних або частинних розв'язків системи (8), (9).

Перевизначена система (8) детально вивчена в роботах [4–6]. Рівняння (8) має унікальні властивості:

а) загальний розв'язок (8) задається формулою [5]

$$a_\mu(\omega_2)x^\mu + b(\omega_2) = 0, \tag{10}$$

$$a_\mu(\omega_2)a^\mu(\omega_2) = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0; \tag{11}$$

б) довільна функція від розв'язку (8) є знову розв'язком [6]. Використаємо формули (10), (11) для побудови у явному вигляді функцій ω_2. З (9)–(11) випливає, що $b(\omega_2) = 0$. Отже, рівняння

$$a_\mu(\omega_2)x^\mu = a_0(\omega_2)x_0 - a_1(\omega_2)x_1 - a_2(\omega_2)x_2 - a_3(\omega_2)x_3 = 0, \tag{12}$$

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0, \tag{13}$$

задають умови, коли рівняння (1) редукується до звичайного диференціального рівняння (6). Розв'язавши систему (12), (13), знаходимо явний вигляд змінної ω_2.

2. Побудуємо за наведеним способом деякі класи точних розв'язків рівняння Даламбера

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \quad k \neq 1. \tag{14}$$

Шукаємо розв'язки (14) у вигляді

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = \beta_\mu x^\mu, \quad \beta_\mu\beta^\mu = -1, \tag{15}$$

β_μ — довільні параметри.

У цьому випадку система для визначення ω_2 має вигляд (10), (11) з додатковою умовою

$$\beta_\mu\frac{\partial\omega_2}{\partial x^\mu} = 0, \quad \beta_\mu\beta^\mu = -1. \tag{16}$$

Рівняння (14) редукується до

$$\frac{d^2\varphi(\omega_1\omega_2)}{d\omega_1^2} - \lambda\varphi^k = 0. \tag{17}$$

Багатопараметрична сім'я розв'язків рівняння (19) має вигляд

$$u = \left\{ \frac{\lambda(1-k)^2(\beta_\mu x^\mu + \omega_2)}{2(k+1)} \right\}^{\frac{1}{1-k}}, \quad k \neq -1, \tag{18}$$

де ω_2 — довільний розв'язок системи функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} &a_0(\omega_2)x_0 - a_1(\omega_2)x_1 - a_2(\omega_2)x_2 - a_3(\omega_2)x_3 = 0, \\ &a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0, \quad a_\mu(\omega_2)\beta^\mu = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким чином, формула (18) визначає розв'язок рівняння (14), якщо ω_2 є будь-яким розв'язком системи (19). Розв'язки (14), які одержані в [2] методом симетрійної редукції, належать множині (18).

3. Побудуємо розв'язки (14) за допомогою анзацу

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{20}$$

Задамо функції ω_1 і ω_2 у вигляді [7]

$$\omega_1 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega_2 = x_3. \tag{21}$$

Анзац (20), (21) редукує (14) до рівняння

$$4\omega_1\varphi_{11} + 6\varphi_1 - \varphi_{22} + \lambda\varphi^k = 0, \tag{22}$$

якщо

$$\Box\omega_3 = 0, \quad \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_\mu}\right)^2 = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega_3}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega_3}{\partial x^\mu} = 0. \tag{24}$$

Розв'язок рівняння (14) задається формулою

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(1-k)^2}{4(k-2)}\left[x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h(\omega_3))^2\right], \tag{25}$$

$\lambda \neq 0$, $h(\omega_3)$ — довільна функція від розв'язку системи (22), (23).

Розв'язки рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda\exp(u) = 0,$$

побудовані за наведеним способом, задаються формулою

$$u = \ln\frac{4}{\lambda\left[x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h(\omega_3))^2\right]}.$$

4. Розглянемо нелінійне рівняння Шродінгера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \chi\Delta\Psi + F\left(|\varphi|\right)\Psi, \quad \Psi = \Psi(t, x_1, x_2, x_3). \tag{26}$$

Формула

$$\Psi = \exp\left\{\frac{i(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{4\chi t}\right\}\varphi(\omega_1, \omega_2)$$

є анзацем для рівняння (25), якщо $\omega_1 = t$, а ω_2 задовольняє рівнянням

$$i\frac{\partial\omega_2}{\partial t} = \chi\Delta\omega_2, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right)^2 = 0. \tag{28}$$

Редуковане рівняння має вигляд

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} - \frac{3i}{2\omega_1}\varphi - \varphi F(|\varphi|) = 0. \tag{29}$$

Таким чином, формула (26) задає сім'ю розв'язків нелінійного багатовимірного рівняння Шродінгера (25), якщо φ задовольняє (29), а ω_2 є розв'язком (27), (28).

1. Фущич В., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Институт математики, 1981, 6–28.
2. Fushchych W., Shtelen W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.
3. Фущич В.И., Симметрия и точные решения многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Смирнов В.И., Соболев С.Л., Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний, *Труды сейсмического института АН СССР*, 1932, **20**, 37–42.
5. Fushchych W., Zhdanov R., Revenko I., On the general solution of the d'Alambert equation with nonlinear eikonal constraint, in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1992, 68–90.
6. Шульга М., Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнения математической физики, Київ, Ін-т матем., 1985, 36–38.
7. Фущич В., Баранник Л., Баранник А., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наукова думка, 1991, 300 с.