Симетрійна редукція і деякі точні розв'язки рівняння Монжа–Ампера

В.І. ФУЩИЧ, В.М. ФЕДОРЧУК, О.С. ЛЕЙБОВ

For the Monge–Amperé equation the ansatzes which reduce this equation to differential equation with a less number of the independent variables have been constructed. Some exact solutions of the equation under investigation have been found.

У роботах [1, 2] вивчена симетрія і на основі спеціальних анзаців побудовані класи точних розв'язків багатовимірного рівняння Монжа–Ампера.

Дана робота присвячена вивченню рівняння вигляду

$$\det(u_{\mu\nu}) = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_4$, $u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Результати робіт [1, 2] дають змогу, зокрема, зробити висновок про те, що група інваріантності рівняння (1) містить як підгрупу узагальнену групу Пуанкаре $P(1,4)$ — групу поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського. Для дослідження рівняння (1) використано підгрупову структуру [3–7] групи $P(1,4)$. На основі неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ побудовані анзаци, які редукують рівняння (1) да диференціальних рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних, проведена відповідна симетрійна редукція. На основі розв'язків редукованих рівнянь побудовані деякі класи точних розв'язків рівняння Монжа–Ампера.

Нижче виписані анзаци, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), одержані ЗДР та розв'язки рівняння Монжа–Ампера

1.1. $u^2 = \varphi^2(\omega) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0, \quad \varphi'' = 0,$
$u^2 = (c_1 x_0 + c_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$

1.2. $u^2 = -\varphi^2(\omega) + x_0^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad \varphi'' = 0,$
$u^2 = x_0^2 - (c_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} + c_2)^2.$

1.3. $u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_3, \quad \varphi'' = 0,$
$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + (c_1 x_3 + c_2)^2.$

1.4. $u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \varphi'' = 0,$
$u^2 = x_0^2 - x_3^2 + (c_1(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + c_2)^2.$

1.5. $u^2 = \varphi(\omega), \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}, \quad \varphi'' = 0,$
$u^2 = c_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2} + c_2.$

Доповіді НАН України, 1994, № 1, P. 47–54.

1.6. $u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = \dfrac{c}{\alpha}x_3 + \ln(x_0 + u),$
$\varphi''\varphi^2 - \varphi''\varphi'\varphi - \varphi'^3 = 0, \quad u = k_1 \exp\left(\dfrac{c}{\alpha}x_3 + k_2\right) \pm$
$\pm\left[\left(k_1 \exp\left(\dfrac{c}{\alpha}x_3 + k_2\right) + x_0\right)^2 - x_1^2 - x_2^2\right]^{1/2}, \quad k_1, k_2, c, \alpha = \text{const},$
$c, \alpha > 0.$

1.7. $u^2 = -\varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_3 + \alpha\ln(x_0 + u), \quad \alpha > 0,$
$\dfrac{1}{\alpha}\varphi''\varphi^2 - \varphi''\varphi'\varphi - \varphi'^3 = 0, \quad u = k_1 \exp\left(\dfrac{x_3}{\alpha} + k_2\right) \pm$
$\pm\left[\left(k_1 \exp\left(\dfrac{x_3}{\alpha} + k_2\right) - x_0\right)^2 - x_1^2 - x_2^2\right]^{1/2}, \quad k_1, k_2 = \text{const}.$

Анзаци (1.1)–(1.7) можна записати у такому вигляді:

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{2}$$

де $h(u)$, $f(x)$, $g(x)$ — задані функції; $\varphi(\omega)$ — невідома функція; $\omega = \omega(x, u)$ — одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

2.1 $2x_0\omega = -\varphi(\omega) + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0 + u, \quad \dfrac{1}{2}\omega^2\varphi'' - \omega\varphi' + \varphi = 0,$
$u = -x_0\left(1 + \dfrac{1}{c_2} \pm \dfrac{1}{2c_2}[(2x_0 + c_1)^2 + 4c_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]^{1/2} - \dfrac{c_1}{2c_2}\right).$

2.2 $\dfrac{\alpha x_3^2}{2\omega} - 2\omega x_0 = \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \alpha x_0, \quad \omega = x_0 + u, \quad \alpha > 0,$
$(2\omega + \alpha)^2\varphi'' - 4(2\omega + \alpha)\varphi' - 8\varphi = 0,$
$x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{2(x_0 + u) + \alpha}{x_0 + u}\left[(x_0 + u)x_0 - \dfrac{x_3^2}{2}\right] =$
$= \left(x_0 + u + \dfrac{\alpha}{2}\right)(c_1 + c_2(x_0 + u)).$

2.3 $\dfrac{\alpha x_3^2}{2\omega} + 2\omega x_0 = -\varphi(\omega) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \alpha x_0, \quad \omega = x_0 + u, \quad \alpha > 0,$
$(2\omega - \alpha)^2\varphi'' - 4(2\omega - \alpha)\varphi' + 8\varphi = 0,$
$x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{2(x_0 + u) - \alpha}{x_0 + u}\left[(x_0 + u)x_0 - \dfrac{x_3^2}{2}\right] =$
$= \left(x_0 + u - \dfrac{\alpha}{2}\right)(c_1 + c_2(x_0 + u)).$

2.4 $2(\omega^2 - \omega)(\omega - x_0) + \omega(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2\varphi(\omega) + x_1^2 + x_2^2, \quad \omega = x_0 + u,$
$\omega^2(\omega - 1)^2\varphi'' - 2\omega(2\omega^2 - 3\omega + 1)\varphi' + 2(3\omega^2 - 3\omega + 1)\varphi = 0,$
$\dfrac{(x_0 + u)x_3^2}{2} - (1 - (x_0 + u))\left[u(x_0 + u) + \dfrac{x_1^2}{2} + \dfrac{x_2^2}{2}\right] =$
$= (x_0 + u)(x_0 + u - 1)(c_1(x_0 + u) + c_2).$

2.5 $2(\omega^2 + \omega)(\omega - x_0) + \omega(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2\varphi(\omega) - (x_1^2 + x_2^2), \quad \omega = x_0 + u,$
$\omega^2(\omega + 1)^2\varphi'' - 2\omega(2\omega^2 + 3\omega + 1)\varphi' + 2(3\omega^2 + 3\omega + 1)\varphi = 0,$

$$\frac{(x_0+u)x_3^2}{2}-(x_0+u+1)\left[u(x_0+u)+\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}\right]=$$
$$=(x_0+u)(x_0+u+1)(c_1(x_0+u)+c_2).$$

Анзаци (2.1)–(2.5) запишемо таким чином:

$$h(\omega,x)=f(x)\varphi(\omega)+g(x), \qquad (3)$$

де $h(\omega,x)$, $f(x)$, $g(x)$ — задані функції; $\varphi(\omega)$ — невідома функція; $\omega=\omega(x,u)$ — одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$. Анзаци (2.1)–(2.5) редукують рівняння Монжа–Ампера до лінійних ЗДР.

Випишемо анзаци, які редукують рівняння (1) до двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними, і відповідні їм редуковані рівняння.

3.1 $u^2=\varphi^2(\omega_1,\omega_2)+x_0^2-x_3^2,\quad \omega_1=x_1,\quad \omega_2=x_2,\quad \det\varphi=0,$

$$\det\varphi\equiv\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{vmatrix},\quad \varphi_{ij}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i\partial\omega_j},\quad i,j=1,2.$$

3.2 $u^2=\varphi^2(\omega_1,\omega_2)-x_3^2,\quad \omega_1=x_0,\quad \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\varphi_2\det\varphi=0,\quad \varphi_i\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i},\quad i=1,2.$$

3.3 $u^2=-\varphi^2(\omega_1,\omega_2)+x_0^2,\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2=\frac{x_3}{\alpha}+\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \alpha>0,\quad \varphi(\omega_1^3\varphi_1\det\varphi-\varphi_2^2\varphi_{22})=0.$$

Анзаци (3.1)–(3.3) можна записати у вигляді (2), де $\omega=\omega(x)=(\omega_1(x),\omega_2(x))$ — двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

4.1 $2x_0\omega_1=-\varphi(\omega_1,\omega_2)+x_1^2+x_2^2,\quad \omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=x_3,$

$$\omega_1^2\det\varphi+2\omega_1\varphi_2\varphi_{12}+2(\varphi-\omega_1\varphi_1)\varphi_{22}-\varphi_2^2=0.$$

4.2 $2x_0\omega_1=-\varphi(\omega_1,\omega_2)+x_3^2,\quad \omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\varphi_2[\omega_1^2\det\varphi+2\omega_1\varphi_2\varphi_{12}+2(\varphi-\omega_1\varphi_1)\varphi_{22}-\varphi_2^2]=0.$$

4.3 $\dfrac{\alpha}{\mu}\operatorname{arch}\dfrac{x_0}{\omega}-\arcsin\dfrac{x_1}{\omega_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2)-\dfrac{x_3}{\mu},\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2=(x_0^2-u^2)^{1/2},\quad \varphi_1\varphi_2\det\varphi+\frac{\alpha^2}{\mu^2\omega_2^3}\varphi_1\varphi_{11}-\frac{1}{\omega_1^3}\varphi_2\varphi_{22}-$$
$$-\frac{\alpha^2}{\mu^2\omega_2^3\omega_2^3}=0,\quad \alpha,\mu\in\mathbb{R},\quad \alpha,\mu>0.$$

4.4 $\dfrac{1}{3\mu^2}(2(\omega_2-\mu x_3))^{1/2}(\mu x_3+2\omega_2)-\arcsin\dfrac{x_2}{\omega_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2)-x_0,$

$$\omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\quad \omega_2=\mu x_3+\frac{(x_0+u)^2}{2},$$
$$\mu^4\omega_1^3\varphi_1\varphi_2\cdot\det\varphi-\omega_1^3\varphi_1\varphi_{11}-\mu^4\varphi_2\varphi_{22}+1=0,\quad \mu>0.$$

4.5 $\dfrac{1}{3}(2\omega_2+x_3)(2(\omega_2-x_3))^{1/2}=\varphi(\omega_1,\omega_2)-x_0,\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2=x_3+\frac{(x_0+u)^2}{2},\quad \varphi_1(\varphi_2\det\varphi-\varphi_{11})=0.$$

Анзаци (4.1)–(4.5) можна записати у вигляді (3), де $\omega = \omega(x,u) = (\omega_1(x,u), \omega_2(x,u))$ — інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

$$\sin\frac{x_2}{\omega_1} = \varphi(\omega_1,\omega_2) + \frac{1}{d}\ln(x_0+u), \quad \omega_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$
$$\omega_2 = (x_3^2+u^2-x_0^2)^{1/2}, \quad d>0, \quad \varphi_2\left[\frac{1}{d\omega_2}\left(\frac{1}{d}\varphi_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)\det\varphi - \right.$$
$$- \frac{1}{d\omega_2}\varphi_2\left(3\varphi_1\varphi_2 - d\omega_2\varphi_1\varphi_2^2 + \frac{1}{d\omega_2}\varphi_1 - \frac{1}{\omega_1\omega_2}\right)\varphi_{11} -$$
$$-\frac{1}{d^2\omega_2}\left(d\varphi_1^3 + \frac{2}{\omega_1^2}\varphi_1 + \frac{1}{\omega_1^3}\right)\varphi_{22} + \frac{4}{d\omega_2}\varphi_2\left(\varphi_1^2+\frac{1}{\omega_1^2}\right)\varphi_{12} +$$
$$\left. + \varphi_2\left(\frac{3}{d\omega_1^3\omega_2}\varphi_2 + \frac{1}{\omega_1^3}\varphi_2^2 + \frac{1}{\omega_2^2}\varphi_1^3 + \frac{2}{d\omega_1^2\omega_2^2}\varphi_1 + \frac{1}{d^2\omega_1^3\omega_2^2}\right)\right] = 0.$$

Інші анзаци редукують рівняння (1) до тривимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$A\det\varphi = B_1M_{11} + B_2M_{22} + B_3M_{33} + 2B_4M_{12} + 2B_5M_{13} + 2B_6M_{23} + P,$$

де

$$\det\varphi \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33}\end{vmatrix}, \quad M_{11} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{22} & \varphi_{23}\\ \varphi_{32} & \varphi_{33}\end{vmatrix}, \quad M_{22} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{13}\\ \varphi_{31} & \varphi_{33}\end{vmatrix},$$
$$\varphi_{ij} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i\partial\omega_j}, \quad i,j=1,2,3, \quad M_{33} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{vmatrix}, \quad M_{12} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{21} & \varphi_{23}\\ \varphi_{31} & \varphi_{33}\end{vmatrix},$$
$$M_{13} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{21} & \varphi_{22}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32}\end{vmatrix}, \quad M_{23} \equiv \begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32}\end{vmatrix},$$

Вигляд коефіцієнтів A, $B_1,\ldots,B_6$, P залежить від розглядуваного анзацу. Нижче випишемо анзаци і відповідні їм коефіцієнти редукованого рівняння.

5.1 $u = \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = x_3,$

$A = \varphi_2, \quad B_i = 0, \quad i=1,\ldots,6, \quad P=0, \quad \varphi_i \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad i=1,2,3.$

5.2 $u^2 = -\varphi^2(\omega_1,\omega_2,\omega_3) + x_0^2, \quad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3,$

$A=1, \quad B_i = 0, \quad i=1,\ldots,6, \quad P=0.$

Анзаци 5.1 і 5.2 можна записати у вигляді (2), де $\omega = \omega(x) = (\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x))$ — тривимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

6.1 $2x_0\omega_3 = -\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3) + x_3^2, \quad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_0+u,$

$A = \omega_3^2, \quad B_1 = B_2 = 0, \quad B_3 = 2(\omega_3\varphi_3 - \varphi), \quad B_4 = 0; \quad B_5 = \omega_3\varphi_1,$

$B_6 = -\omega_3\varphi_2, \quad P = 0.$

6.2 $\dfrac{1}{e}\arcsin\dfrac{x_2}{\omega_1} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x_3}{\omega_1} = \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \omega_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$\omega_2 = (x_3^2+u^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = x_0, \quad A = \omega_1^2\omega_2^2(e^2\omega_1\varphi_1 + 4\omega_2\varphi_2),$

$$B_1 = -\omega_2^2(4e^2\omega_1^3\omega_2\varphi_1^3\varphi_2 + 8\omega_1\omega_2\varphi_1\varphi_2 - 1),$$
$$B_2 = -\omega_1^2(4e^2\omega_1\omega_2^3\varphi_1\varphi_2^3 + 2e^2\omega_1\omega_2\varphi_1\varphi_2 - 1), \quad B_3 = -4e^2\omega_1^3\omega_2^4\varphi_1\varphi_2\varphi_3^2,$$
$$B_4 = \omega_1\omega_2(e^2\omega_1^2\varphi_1^2\omega_2^2\varphi_2^2 + 4e^2\omega_1^2\omega_2^2\varphi_1^2\varphi_2^2 + 1),$$
$$B_5 = -4\omega_1\omega_2^3(e^2\omega_1^2\omega_1^2 + 1)\varphi_2\varphi_3, \quad B_6 = e^2\omega_1^3\omega_2\varphi_1\varphi_3(4\omega_2^2\varphi_2^2 + 1),$$
$$P = e^2\omega_1^3\varphi_1\varphi_3^2\varphi_{11} + 4\omega_2^3\varphi_2\varphi_3^2\varphi_{22} + (e^2\omega_1^3\varphi_1^3 + 2\omega_1\varphi_1 + 4\omega_2^3\varphi_2^3 +$$
$$+ 2\omega_2\varphi_2)\varphi_{33} - 2\omega_1(e^2\omega_1^2\varphi_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_{13} -$$
$$- 2\omega_2(4\omega_2^2\varphi_2^2 + 1)\varphi_3\varphi_{23} - \varphi_3^2, \quad e \neq 0.$$

6.3 $\arcsin\dfrac{x_2}{\omega_1} - \dfrac{1}{e}\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\omega_2} = \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = x_3, \quad A = \omega_1^2\omega_2^2(\omega_1\varphi_1 - e^2\omega_2\varphi_2),$$
$$B_1 = \omega_2^2(e^2\omega_1^3\omega_2\varphi_1^3\varphi_2 + 2\omega_1\omega_2e^2\varphi_1\varphi_2 + 1),$$
$$B_2 = \omega_1^2(e^2\omega_1\omega_2^3\varphi_1\varphi_2^3 - 2\omega_1\omega_2\varphi_1\varphi_2 + 1),$$
$$B_3 = e^2\omega_1^3\omega_2^3\varphi_1\varphi_2\varphi_3^2, \quad B_4 = \omega_1\omega_2(\omega_1^2\varphi_1^2 - e^2\omega_2^2\varphi_2^2 - e^2\omega_1^2\omega_2^2\varphi_1^2\varphi_2^2 + 1),$$
$$B_5 = e^2\omega_1\omega_2^3(\omega_1^2\varphi_1^2 + 1)\varphi_2\varphi_3, \quad B_6 = \omega_1^3\omega_2(e^2\omega_2^2\varphi_2^2 + 1)\varphi_1\varphi_3,$$
$$P = \omega_1^3\varphi_1\varphi_3^2\varphi_{11} - e^2\omega_2^3\varphi_2\varphi_3^2\varphi_{22} + (\omega_1^3\varphi_1^3 + 2\omega_1\varphi_1 - e^2\omega_2^3\varphi_2^3 +$$
$$+ 2\omega_2\varphi_2)\varphi_{33} - 2\omega_1(\omega_1^2\varphi_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_{13} -$$
$$- 2\omega_2(e^2\omega_2^2\varphi_2^2 + 1)\varphi_3\varphi_{23} - \varphi_3^2, \quad e > 0.$$

6.4 $\arcsin\dfrac{x_2}{\omega_1} + \dfrac{x_3}{\varepsilon\omega_2} = \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2 = x_0 + u, \quad \omega_3 = x_3^2 - 2x_0(x_0 + u), \quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$A = 4\left(\varphi_1 + \varphi_3\frac{2\omega_2^2}{\omega_1}\right), \quad B_1 = -4\left(2\omega_2^2\varphi_1^3\varphi_3 + \frac{4\omega_2^2}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_3 - \frac{1}{\omega_1^3}\right),$$
$$B_2 = -4\left(2\omega_2^2\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3 + \frac{2}{\omega_2}\varphi_1\varphi_2 - \frac{2\omega_3}{\omega_2^3}\varphi_1\varphi_3 - \frac{4\omega_3}{\omega_1}\varphi_3^2 - \frac{1}{\omega_1\omega_2^2}\right),$$
$$B_3 = -8\omega_2^2\varphi_1\varphi_3^3, \quad B_4 = 4\left(2\omega_2^2\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3 + \frac{2\omega_2^2}{\omega_1^2}\varphi_2\varphi_3 + \frac{1}{\omega_2}\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2\omega_2}\right),$$
$$B_5 = -8\omega_2^2\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\varphi_3^2, \quad B_6 = 8\varphi_3\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_3 + \frac{1}{\omega_2}\varphi_1 - \omega_2^2\varphi_1\varphi_2\varphi_3\right),$$
$$P = 8\varphi_3^2\left(2\omega_3\varphi_1\varphi_3^2 + 2\omega_2\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \frac{2}{\omega_2^2}\varphi_1\varphi_3 + \frac{1}{\omega_1}\varphi_3\right)\varphi_{11} +$$
$$+ \frac{8\omega_2^2}{\omega_1^3}\varphi_3^3\varphi_{22} + 4\left(\frac{2\omega_2^2}{\omega_1^3}\varphi_2^2\varphi_3 - \frac{2\omega_3}{\omega_1^3\omega_2^2}\varphi_3 + \frac{2}{\omega_1^3\omega_2}\varphi_2 + \frac{1}{\omega_2^2}\varphi_1^3 + \frac{2}{\omega_1^2\omega_2^2}\varphi_1 +\right.$$
$$\left. + \frac{8\omega_3}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_3^2 + 4\omega_3\varphi_1^3\varphi_3^2\right)\varphi_{33} - 16\omega_2\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\varphi_3^3\varphi_{12} - 16\left(\frac{\omega_2}{\omega_1^2}\varphi_2\varphi_3 +\right.$$
$$\left. + \frac{2\omega_3}{\omega_1^2}\varphi_3^2 + \frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\varphi_1^2 + \frac{\omega_3}{\varepsilon\omega_2}\varphi_1^2\varphi_3^2\right)\varphi_3\varphi_{13} -$$
$$- 16\omega_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1^3}\varphi_2 - \frac{2}{\omega_1}\varphi_1 - \varphi_1^3\right)\varphi_3^2\varphi_{23} -$$
$$- 8\left(\frac{2\omega_2}{\omega_1^3}\varphi_2\varphi_3 + \frac{2\omega_3}{\omega_1^3}\varphi_3^2 - \frac{2}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_3 - \varphi_1^3\varphi_3 + \frac{1}{\omega_1^3\varphi_2^2}\right)\varphi_3^2.$$

6.5 $\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\omega_3} = \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3) - \dfrac{c}{\alpha}x_3, \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2=\frac{x_3}{\alpha}+\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \omega_3=(x_0^2-u^2)^{1/2},\quad c>0,\ \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0,$$
$$A=\frac{1}{\omega_3}\varphi_1-\frac{c^2}{\omega_1}\varphi_3,\quad B_1=\varphi_1^3\varphi_3+\frac{2c}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3+\frac{1}{\omega_1^3\omega_3}\varphi_2^2,$$
$$B_2=\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3+c^2,\quad B_3=\varphi_1\varphi_3^3-\frac{2}{\omega_3^2}\varphi_1\varphi_3+\frac{c^2}{\omega_1\omega_3^3},$$
$$B_4=\left(\frac{c^2}{\omega_1^2}\varphi_2-\frac{c}{\omega_1^2\omega_3}\varphi_2^2-\varphi_1^2\varphi_2+c\varphi_1^2\right)\varphi_3,$$
$$B_5=-\frac{1}{\omega_3^2}\varphi_1^2-\frac{c}{\omega_1^2\omega_3^2}\varphi^2+\varphi_1^2\varphi_3^2+\frac{c}{\omega_1^2}\varphi^2\varphi_3^2,$$
$$B_6=\left(c\varphi_3^2+\frac{1}{\omega_3^2}\varphi_2-\varphi_2\varphi_3^2-\frac{c}{\omega_3^2}\right)\varphi_1,$$
$$P=\frac{1}{\omega_3^2}(\varphi_2-c)^2\varphi_1\varphi_{11}-\left(\frac{1}{\omega_1^3}\varphi_2^2\varphi_3^3-\frac{2}{\omega_1^3\omega_3^2}\varphi_2^2\varphi_3-\frac{1}{\omega_3^3}\varphi_1^3-\right.$$
$$\left.-\frac{2c}{\omega_1^2\omega_3^3}\varphi_1\varphi_2\right)\varphi_{22}-\frac{1}{\omega_1^3}(\varphi_2-c)^2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_{33}-\frac{2}{\omega_3^3}(\varphi_2-c)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\varphi_3^2\right)\varphi_{12}-\frac{2}{\omega_1^3}(\varphi_2-c)\left(\frac{1}{\omega_3^2}-\varphi_3^2\right)\varphi_2^2\varphi_{23}-\frac{1}{\omega_1^3\omega_3^3}(\varphi_2-c)^2\varphi_2^2.$$

6.6 $\dfrac{1}{3\alpha}\left(\dfrac{2}{\alpha}\omega_3+x_3\right)(2(\omega_3-\alpha x_3))^{1/2}=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3))-x_0,$

$$\omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\quad \omega_2=\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{x_0+u}{\alpha},$$
$$\omega_3=\alpha x_3+\frac{(x_0+u)^2}{2},\quad \alpha>0,\quad A=\omega_1^2(\omega_1\varphi_1+\alpha^2\varphi_3),$$
$$B_1=\varphi_2^2,\quad B_2=-\alpha^2\omega_1^3\varphi_1\varphi_3,\quad B_3=\frac{\omega_1^2}{\alpha^2},\quad B_4=-\alpha^2\omega_1\varphi_2\varphi_3,$$
$$B_5=\frac{\omega_1}{\alpha}\varphi_2,\quad B_6=\frac{\omega_1^3}{\alpha}\varphi_1,$$
$$P=\frac{\omega_1^3}{\alpha^2}\varphi_1\varphi_{11}+\alpha^2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_{33}+\frac{2\omega_1}{\alpha^2}\varphi_2\varphi_{12}-\frac{2}{\alpha}\varphi_2^2\varphi_{23}-\frac{1}{\alpha^2}\varphi_2^2.$$

6.7 $\arcsin\dfrac{x_3}{\omega_3}=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)-\dfrac{x_0}{\alpha},\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2=\frac{x_0}{\alpha}-\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \omega_3=(x_3^2+u^2)^{1/2},\quad \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0,$$
$$A=\frac{1}{\omega_1}\varphi_3+\frac{1}{\omega_3}\varphi_1,\quad B_1=\frac{1}{\omega_1^3\omega_3}\varphi_2^2+\frac{1}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3-\frac{2}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^3\varphi_3,$$
$$B_2=-(\varphi_2-1)^2\varphi_1\varphi_3,\quad B_3=\frac{1}{\omega_1\omega_3^3}-\frac{2}{\omega_3^2}\varphi_1\varphi_3-\varphi_1\varphi_3^3,$$
$$B_4=\left(\frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2^2-\frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2+\varphi_1^2\varphi_2-\varphi_1^2\right)\varphi_3,$$
$$B_5=-\varphi_1^2\varphi_3^2-\frac{1}{\omega_3^2}\varphi_1^2-\frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2\varphi_3^2-\frac{1}{\omega_1^2\omega_3^2}\varphi_2,$$
$$B_6=\left(\frac{1}{\omega_3^2}\varphi_2-\frac{1}{\omega_3^2}\varphi_2\varphi_3^2-\varphi_3^2\right)\varphi_1,$$

$$P = \frac{1}{\omega_3^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_1\varphi_{11} + \left(\frac{1}{\omega_1^3}\varphi_2^2\varphi_3^2 + \frac{2}{\omega_1^3\omega_3^2}\varphi_2^2\varphi_3 + \frac{1}{\omega_3^3}\varphi_1^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\omega_1^2\omega_3^3}\varphi_1\varphi_2\right)\varphi_{22} + \frac{1}{\omega_1^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_{33} - \frac{2}{\omega_3^3}(\varphi_2 - 1) \times$$
$$\times \left(\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2\right)\varphi_{12} - \frac{2}{\omega_1^3}\varphi_2^2(\varphi_2 - 1)\left(\varphi_3^2 + \frac{1}{\omega_3^2}\right)\varphi_{23} - \frac{1}{\omega_1^3\omega_3^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_2^2.$$

6.8 $\dfrac{1}{c}\arcsin\dfrac{x_3}{\omega_3} = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \dfrac{x_0}{\alpha}, \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

$$\omega_2 = \frac{x_0}{\alpha} - \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \omega_3 = (x_3^2 + u^2)^{1/2},$$
$$0 < c < 1,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0, \quad A = \frac{1}{\omega_1}\varphi_3 + \frac{1}{c^2\omega_3}\varphi_1,$$
$$B_1 = \frac{1}{c^2\omega_1^3\omega_3}\varphi_2^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3 - \frac{2}{\omega_1^2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^3\varphi_3,$$
$$B_2 = -(\varphi_2 - 1)^2\varphi_1\varphi_3, \quad B_3 = \frac{1}{c^2\omega_1\omega_3^3} - \frac{2}{c^2\omega_3^2}\varphi_1\varphi_3 - \varphi_1\varphi_3^3,$$
$$B_4 = \left(\frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2^2 - \frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^2\right)\varphi_3,$$
$$B_5 = -\varphi_1^2\varphi_3^2 - \frac{1}{c^2\omega_3^2}\varphi_1^2 - \frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2\varphi_3^2 - \frac{1}{c^2\omega_1^2\omega_3^2}\varphi_2,$$
$$B_6 = \left(\frac{1}{c^2\omega_3^2}\varphi_2 - \frac{1}{c^2\omega_3^2} + \varphi_2\varphi_3^2 - \varphi_3^2\right)\varphi_1, \quad P = \frac{1}{c^2\omega_3^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_1\varphi_{11} +$$
$$+ \left(\frac{1}{\omega_1^3}\varphi_2^2\varphi_3^2 + \frac{2}{c^2\omega_1^3\omega_3^2}\varphi_2^2\varphi_3 + \frac{1}{c^2\omega_3^3}\varphi_1^3 + \frac{2}{c^2\omega_1^2\omega_3^3}\varphi_1\varphi_2\right)\varphi_{22} +$$
$$+ \frac{1}{\omega_1^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_{33} - \frac{2}{c^2\omega_3^3}(\varphi_2 - 1)\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\varphi_2\right)\varphi_{12} -$$
$$- \frac{2}{\omega_1^3}\varphi_2^2(\varphi_2 - 1)\left(\varphi_3^2 + \frac{1}{c^2\omega_3^2}\right)\varphi_{23} - \frac{1}{c^2\omega_1^3\omega_3^3}(\varphi_2 - 1)^2\varphi_2^2.$$

Анзаци (6.1)–(6.8) можна записати у вигляді (3), де $\omega = \omega(x, u) = (\omega_1(x, u), \omega_2(x, u), \omega_3(x, u)$ — інваріанти підгруп групи $P(1, 4)$.

1. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
2. Fushchych W., Shteten W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematics physics, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 435 p.
3. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1, 4)$, Препринт № 78.18, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 36 с.
4. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1, 4)$, 1979, *Укр. мат. журн.*, **31**, № 6, 717–722.
5. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1, 4)$, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
6. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, в кн. Теоретико-групповые методы в физике, Т. 1, М., Наука, 1980, 61–66.
7. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continious subgroups of the Poincaré group $P(1, 4)$, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.