

Редукция многомерного уравнения Даламбера к двумерным уравнениям

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

We give a classification of the maximal subalgebras of rank $n - 1$ for the extended Poincaré algebra $\tilde{AP}(1, n)$, which is realized on the set of solutions of the d'Alembert equation $\square u + \lambda u^k = 0$. These subalgebras are used for constructing the ansatzes reducing this equation to differential equations with two invariant variables.

Проведена класифікація максимальних підалгебр рангу $n - 1$ розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{AP}(1, n)$, яка реалізується на множині розв'язків рівняння Даламбера $\square u + \lambda u^k = 0$. Одержані підалгебри використано для побудови анзаців, що редукують це рівняння до диференціальних рівнянь з двома інваріантними змінними.

1. Введение. В настоящей статье изучается редукция нелинейного уравнения Даламбера

$$\square u + \lambda u^k = 0 \quad (1)$$

к двумерным уравнениям. Здесь $u = u(x)$ — скалярная функция переменной $u = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, k — произвольное вещественное число, отличное от 1, а

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

В [1, 2] установлено, что алгеброй инвариантности уравнения (1) является алгебра Ли $\tilde{AP}(1, n)$ расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1, n)$, базис которой образуют такие векторные поля:

$$J_{0a} = x_0 \partial_a + x_a \partial_0, \quad J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad P_\mu = \partial_\mu, \\ D = -x^\mu \partial_\mu + \frac{2}{k-1} u \partial_u,$$

где

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = 1, \dots, n, \quad \mu = 0, 1, \dots, n.$$

Это позволяет использовать подалгебры алгебры $\tilde{AP}(1, n)$ для проведения редукции уравнения (1) к дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных.

Если $\omega_1(x), \dots, \omega_m(x), \omega_{m+1}(x, u)$ — полная система инвариантов некоторой подалгебры L алгебры $\tilde{AP}(1, n)$, то анзац

$$\omega_{m+1} = \varphi(\omega_1, \dots, \omega_m) \quad (2)$$

преобразует уравнение (1) в уравнение, содержащее только $\varphi, \omega_1, \dots, \omega_m$ и производные от φ по $\omega_1, \dots, \omega_m$. Число m связано с рангом r алгебры L соотношением $m = n + 1 - r$.

Случай $m = 1$ исследован в [1–6]. Случай $m = 2$ для $n \leq 3$ рассматривался в [1–3], а для произвольного n такое исследование с привлечением подалгебр алгебры Ли $AP(1, n)$ группы Пуанкаре $P(1, n)$ проведено в [7]. Поэтому для завершения изучения случая $m = 2$ необходимо выполнить редукцию по тем подалгебрам ранга $n - 1$ алгебры $\tilde{P}(1, n)$, которые имеют ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$.

В данной статье с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -эквивалентности найдены все максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $\tilde{P}(1, n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$, для каждой из них построен анзац (2), посредством которого проведена редукция уравнения (1) к дифференциальному уравнению с двумя переменными.

2. Основные обозначения и некоторые общие замечания. Базисные элементы алгебры $\tilde{P}(1, n)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] &= g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [D, P_\alpha] = P_\alpha. \end{aligned}$$

где $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n$. Алгебра $\tilde{P}(1, n)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1, n)$, порожденную $J_{\alpha\beta}$ и P_α , ортогональную алгебру $AO(n) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1, \dots, n \rangle$, псевдоортогональную алгебру $AO(1, n) = \langle J_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n \rangle$, коммутативный идеал $V = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$. Важной подалгеброй алгебры $\tilde{P}(1, n)$ является нормализатор $\mathfrak{N}$ изотропного пространства $\langle P_0 + P_n \rangle$ в алгебре $\tilde{P}(1, n)$. Нетрудно получить

$$\mathfrak{N} = \langle M, T, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus (AO(n-1) \oplus \langle D, J_{0n} \rangle),$$

где

$$\begin{aligned} M &= P_0 + P_n, \quad T = (P_0 - P_n)/2, \quad G_a = J_{0a} - J_{an}, \quad a = 1, \dots, n-1, \\ AO(n-1) &= \langle J_{ab} \mid a, b = 1, \dots, n-1 \rangle. \end{aligned}$$

Алгебра $\mathfrak{N}$ содержит расширенную изохронную алгебру Галилея

$$A\tilde{G}(0, n-1) = \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus AO(n-1).$$

В работе будут использованы еще и такие обозначения:

$$\begin{aligned} AO[r, s] &= \langle J_{ab} \mid a, b = r, \dots, s \rangle, \quad r \leq s; \\ AE[r, s] &= \langle P_r, \dots, P_s \rangle, \oplus AO(r, s), \quad r \leq s; \\ AE_1[r, s] &= \langle G_r, \dots, G_s \rangle, \oplus AO(r, s), \quad r \leq s; \\ V[1, n-1] &= \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle, \quad W[1, n-1] = \langle P_1, \dots, P_{n-1} \rangle; \end{aligned}$$

π — проектирование $\mathfrak{N}$ на $\langle D, J_{0n} \rangle$. Если $s > r$, то, по определению, $AO[r, s] = 0$, $AE[r, s] = 0$.

Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $\tilde{P}(1, n)$ необходимо описать подалгебры этой алгебры с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $\tilde{P}(1, n)$ называются $\tilde{P}(1, n)$ -эквивалентными, если с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности они имеют одни и те же инварианты.

Среди подалгебр, имеющих одну и ту же полную систему инвариантов, существует одна (максимальная) подалгебра, содержащая все остальные подалгебры. Будем называть ее i -максимальной подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Две i -максимальные подалгебры K_1 и K_2 алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда K_1 и K_2 $\tilde{P}(1, n)$ -сопряжены. Таким образом, для нахождения с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности всех анзацев, редуцирующих уравнение (1) к дифференциальным уравнениям с двумя инвариантными переменными, требуется описать i -максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности.

При доказательстве излагаемых результатов нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть L — максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, K_1 — подалгебра L . Тогда в L существует подалгебра K_2 , удовлетворяющая таким условиям:

- 1) K_2 — i -максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$;
- 2) $K_1 \subset K_2$;
- 3) K_1 и K_2 имеют одни и те же инварианты.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_s$ — полная система инвариантов подалгебры K_1 . Обозначим через K_2 i -максимальную подалгебру алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, имеющую полную систему инвариантов $\omega_1, \dots, \omega_s$. Докажем, что $K_2 \subset L$. Действительно, пусть f — произвольный инвариант алгебры L . Так как $K_1 \subset L$, то f является инвариантом подалгебры K_1 и в силу теоремы об универсальном инварианте получаем $f = f(\omega_1, \dots, \omega_s)$. Так как L — i -максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, то отсюда вытекает, что $K_2 \subset L$. Лемма доказана.

Из результатов, изложенных в п. 3 [7], следует, что задача построения инвариантов произвольной подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ сводится к задаче построения инвариантов неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k \leq n$. Последняя же задача в общем случае, видимо, неразрешима в квадратурах. В связи с этим ограничимся рассмотрением только тех подалгебр алгебры $AP(1, n)$, проекции которых на $AO(1, n)$ являются под прямыми суммами алгебр вида $AO[r, s]$.

3. Максимальные подалгебры ранга $n - 1$, не содержащие P_0 и $P_0 + P_n$. В следующих ниже леммах L обозначает максимальную подалгебру алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, имеющую ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$ и не содержащую P_0 и $P_0 + P_n$.

Лемма 2. Если проекция L на $AO(1, n)$ не имеет в пространстве V инвариантных изотропных подпространств, то L сопряжена с одной из таких алгебр:

$$L_1 = (AO[0, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AO[m + 1, q] \oplus AE[q + 1, n]) \oplus \langle D \rangle,$$

$$d = 2, \dots, n - 2, \quad m = d + 1, \dots, n - 2, \quad q = m + 1, \dots, n - 1,$$

$$2n \leq d + q, \quad n \geq 4;$$

$$L_2 = (AO[0, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle D + \alpha J_{n-1, n} \rangle,$$

$$m = 2, \dots, n - 2, \quad n \geq 4, \quad \alpha > 0;$$

$$L_3 = (AO[1, m] \oplus AO[m + 1, q] \oplus AE[q + 1, n]) \oplus \langle D \rangle,$$

$$m = 2, \dots, n - 2, \quad q = m + 2, \dots, n, \quad 2m \leq q, \quad n \geq 2.$$

Доказательство. Если $D \in L$ то $L = K \oplus \langle D \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $AP(1, n)$, относящаяся к классу 0 и являющаяся расщепляемой. Отсюда на основании теоремы 4 [7] получаем, что L сопряжена с L_1 или L_3 . Если $D \notin L$, то в силу леммы 1 $L = N \oplus \langle D + \alpha J_{n-1, n} \rangle$, $\alpha > 0$ где N — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $AP(1, n - 2)$. В силу [4] алгебра N сопряжена с $AO[0, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]$, $2 \leq m \leq n - 2, n \geq 4$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $L \subset \mathfrak{N}$ и $\pi(L) = \langle D, J_{0n} \rangle$, то L сопряжена с одной из таких алгебр:

$$\begin{aligned} L_4 &= (AE[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3]) \oplus \langle J_{n-2, n-1} + cJ_{0n}, D + \alpha J_{0n} \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n - 3, \quad n \geq 4, \quad c > 0, \quad \alpha \geq 0; \\ L_5 &= (AO[1, m] \oplus AO[m + 1, q] \oplus AE[q + 1, n - 1]) \oplus \langle D, J_{0n} \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n - 2, \quad q = m + 1, \dots, n - 1, \quad 2m \leq q, \quad n \geq 3; \\ L_6 &= AE[3, n - 1] \oplus \langle J_{12} + cJ_{0n}, D + \alpha J_{0n} \rangle, \quad c > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad n \leq 3. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \oplus F$, где $U_1 \subset V[1, n - 1]$, $U_2 \subset W[1, n - 1]$, а $F \subset AO(n - 1) \oplus \langle D, J_{0n} \rangle$. В силу леммы 1 $L = K \oplus \langle D + X_1, J_{0n} + X_2 \rangle$, где $X_1, X_2 \in AO(n - 1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $\tilde{AG}(0, n - 1)$. Поскольку алгебра $AE_1[1, m] \oplus \langle J_{0n} \rangle$, имеющая ранг $m + 1$, сопряжена с подалгеброй алгебры $AO[0, m + 1]$, не являющейся в ней максимальной, то по лемме 1 получаем, что $X_2 \neq 0$ при $U_1 \neq 0$. В этом случае согласно предложению 2 [6] алгебра L сопряжена с L_4 . Если $U_1 = 0$, то на основании этого же предложения 2 алгебра L сопряжена с L_5 или L_6 . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $L \subset \mathfrak{N}$, $\pi(L) = \langle D + \alpha J_{0n} \rangle$ и L — расщепляемая алгебра при $\alpha = \pm 1$. Тогда L сопряжена с одной из таких алгебр:

$$\begin{aligned} L_7 &= (AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle D + \alpha J_{0n} \rangle, \\ &\quad d = 1, \dots, n - 2, \quad m = d + 1, \dots, n - 1, \quad n \geq 4, \quad \alpha \geq 0; \\ L_8 &= (AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle D + \alpha J_{0n} \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n - 1, \quad n \geq 2, \quad \alpha \geq 0; \\ L_9 &= (\langle G_1 + 2T \rangle \oplus AO[2, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle 2D - J_{0n} \rangle, \\ &\quad m = 2, \dots, n - 1, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Доказательство. Если $\alpha \notin \{0, \pm 1, -1/2\}$, то в силу теоремы IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \oplus F$, где $U_1 \subset V[1, n - 1]$, $U_2 \subset W[1, n - 1]$, а $F \subset AO(n - 1) \oplus \langle D + \alpha J_{0n} \rangle$. По лемме 1 $L = K \oplus \langle D + \alpha J_{0n} + X \rangle$, где $X \in AO(n - 1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $\tilde{AG}(0, n - 1)$. Согласно теореме 1 [7] алгебра K совпадает с точностью до сопряженности с одной из алгебр

$$\begin{aligned} &AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1], \\ &\quad 1 \leq d \leq n - 2, \quad d + 1 \leq m \leq n - 1, \quad n \geq 3; \\ &AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1], \quad 1 \leq m \leq n - 1, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Так как $[X, K] \subset K$, то X принадлежит проекции L на $AO(n - 1)$, а значит, можно предполагать, что $X = 0$, и мы получаем алгебры L_7, L_8 .

Пусть $\alpha = -1/2$. Тогда согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \bowtie F$, где $U_1 \subset V[1, n-1] + \langle T \rangle$ (как пространство), $U_2 \subset W[1, n-1]$, а F является подалгеброй алгебры $AO(n-1) \oplus \langle 2D - J_{0n} \rangle$. Если проекция U_1 на $\langle T \rangle$ равна 0, то L совпадает с L_7 или L_8 . Допустим, что проекция U_1 на $\langle T \rangle$ совпадает с $\langle T \rangle$. Если $G_1 + 2T, G_2 \in L$, то L содержит $[G_1 + 2T, G_2] = 2P_2$, $[P_2, G_2] = M$, что противоречит предположению относительно L . Отсюда вытекает $U_1 = \langle G_1 + 2T \rangle$. Если $U_2 \neq 0$, то по теореме Витта $U_2 = \langle P_{m+1}, \dots, P_n \rangle$, $n \geq 2$, а значит, L сопряжена с алгеброй L_9 .

В силу теоремы IV.3.4 [6] случаи, когда $\alpha = \pm 1$ и L — расщепляемая алгебра, не отличаются от рассмотренного случая $\alpha \notin \{0, \pm 1, -1/2\}$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть L — нерасщепляемая подалгебра алгебры $\mathfrak{N}$ и $\pi(L) = \langle D + J_{0n} \rangle$. Тогда L сопряжена с одной из таких алгебр:

$$\begin{aligned} L_{10} &= (AE_1[1, d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \bowtie \langle D + J_{0n} + M \rangle, \\ &\quad d = 1, \dots, n-2, \quad m = d+1, \dots, n-1, \quad n \geq 3; \\ L_{11} &= (AO[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \bowtie \langle D + J_{0n} + M \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n-1, \quad n \geq 2; \\ L_{12} &= (AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]) \bowtie \langle J_{n-2, n-1} + \alpha M, D + J_{0n} + M \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n-3, \quad n \geq 4, \quad \alpha \geq 0; \\ L_{13} &= (AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]) \bowtie \langle J_{n-2, n-1} + M, D + J_{0n} \rangle, \\ &\quad m = 1, \dots, n-3, \quad n \geq 4; \\ L_{14} &= AE[3, n-1] \bowtie \langle J_{12} + \alpha M, D + J_{0n} + M \rangle, \quad \alpha \geq 0, \quad n \geq 3; \\ L_{15} &= AE[3, n-1] \bowtie \langle J_{12} + M, D + J_{0n} \rangle, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L , сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \bowtie F$, где $U_1 \subset V[1, n-1]$, $U_2 \subset W[1, n-1]$, а $L \subset AO(n-1) \oplus \langle D + J_{0n}, M \rangle$. Легко убедиться, что алгебры $\langle G_{2j-1}, G_{2j}, G_{2j-1, 2j} \rangle$ и $\langle G_{2j-1}, G_{2j} \rangle$ являются эквивалентными. Поэтому если $D + J_{0n} + \gamma M + \delta J_{n-2, n-1} \in L$ и $\delta \neq 0$, то по лемме 1 $U_1 \subset V[1, n-3]$ и $U_2 \subset W[1, n-3]$. В этом случае $J_{n-2, n-1} + \beta M \in L$, а следовательно, алгебра L , сопряжена с $K \bowtie \langle J_{n-2, n-1} + \beta M, D + J_{0n} + \gamma M \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $n-3$ алгебры $\tilde{AG}(0, n-3)$. Нетрудно получить, что с точностью до сопряженности K совпадает с $AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]$, $1 \leq m \leq n-3$, $n \geq 4$, или $AE[1, n-3]$, $n \leq 3$, а потому L сопряжена с одной из алгебр L_j , $j = 12, \dots, 15$. В оставшихся случаях в силу предложения 2 [7] алгебра L сопряжена с L_{10} или L_{11} . Лемма доказана.

Для выделения оставшихся алгебр нам необходимы дополнительные обозначения. Для любых двух натуральных чисел r и s , $r \leq s$, положим

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma_1 P_r, \dots, G_s + \gamma_s P_s \rangle \bowtie AO[r, s], \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Пусть, далее, $\Gamma_{d,q} = U \bowtie F$, где F — диагональ в $AO[1, d] \oplus AO[d+1, 2d] \oplus \dots \oplus AO[(q-1)d+1, qd]$, а U — коммутативная алгебра, имеющая базис

$$\begin{aligned} &G_1 + \gamma_1 P_1 + \lambda_1 P_{(q-1)d+1}, \dots, G_d + \gamma_1 P_d + \lambda_1 P_{qd}, \\ &G_{d+1} + \gamma_2 P_{d+1} + \lambda_2 P_{(q-1)d+1}, \dots, G_{2d} + \gamma_2 P_{2d} + \lambda_1 P_{qd}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{(q-2)d+1} + \gamma_{q-1}P_{(q-2)d+1} + \lambda_{q-1}P_{(q-1)d+1}, \dots, \\
& G_{(q-1)d} + \gamma_{q-1}P_{(q-1)d} + \lambda_{q-1}P_{qd}, \\
& 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{q-1}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_{q-1} > 0.
\end{aligned}$$

Лемма 6. Если L — нерасщепляемая подалгебра алгебры $\mathfrak{N}$ и $\pi(L) = \langle D - J_{0n} \rangle$, то L сопряжена с алгеброй L' , для которой $\pi(L') = \langle D + J_{0n} \rangle$, или с одной из алгебр

$$\begin{aligned}
L_{16} &= (\Gamma_{d,q} \oplus AE[dq + 1, n - 1]) \oplus \langle D - J_{0n} \rangle, \quad d = 2, \quad n \geq 5; \\
L_{17} &= (\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \Phi(d_1 + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, d_t, \gamma_t) \oplus \\
&\quad \oplus AO[d_t + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle D - J_{0n} \rangle,
\end{aligned}$$

где $d_0 = 0$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_t$, $t > 1$, $m = 1, \dots, n - 2$, $n \geq 3$;

$$\begin{aligned}
L_{18} &= (\Gamma_{d,q} \oplus \Phi(dq + 1, l_1, \mu_1) \oplus \Phi(l_1 + 1, l_2, \mu_2) \oplus \dots \\
&\quad \oplus \Phi(l_{t-1} + 1, l_t, \mu_t) \oplus AE[l_t + 1, n - 1]) \oplus \langle D - J_{0n} \rangle,
\end{aligned}$$

где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_t$, $t \geq 1$, $l_0 = dq$.

Доказательство. В силу теоремы IV.3.4 [6] алгебра L , сопряжена с алгеброй $U \oplus F$, где $U \subset V[1, n - 1] + W[1, n - 1]$ (как пространство), а $F \subset AO(n - 1) \oplus \langle D - J_{0n}, T \rangle$, причем если проекция L на $\langle T \rangle$ является ненулевой, то $[T, U] \subset U$. Поскольку $[T, G_a] = 2P_a$, $[P_a, G_a] = M$ и $M \notin L$, то в последнем случае проекция U на $V[1, n - 1]$ является нулевой. Но тогда применим $O[1, n]$ -автоморфизм алгебры $\tilde{A}\tilde{P}(1, n)$, соответствующий матрице $\text{diag}[-1, 1, \dots, 1]$, который преобразует $\langle -J_{0n}, M \rangle$. Поэтому можно предполагать, что проекция L на $\langle T \rangle$ является нулевой.

Согласно лемме 1 $L = K \oplus \langle D - J_{0n} + X \rangle$, где $X \in AO(n - 1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $\tilde{A}\tilde{G}(0, n - 1)$. Последнее обстоятельство позволяет воспользоваться перечнем таких подалгебр, приведенным в теореме 1 [7]. Учитывая, что $[D - J_{0n}, K] \subset K$, нетрудно получить, что L , сопряжена с одной из алгебр L_{16} , L_{17} , L_{18} . Лемма доказана.

Теорема. Максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $\tilde{A}\tilde{P}(1, n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$ и не содержащие P_0 и $P_0 + P_n$, исчерпываются с точностью до $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности алгебрами $L_1, \dots, L_{18}$, описанными в леммах 2–6.

4. Редукция по подалгебрам, не содержащим P_0 и $P_0 + P_n$. Подалгебра L_j , $j = 1, \dots, 18$, имеет полную систему инвариантов вида $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $uf(x)^{-1}$. Поэтому для каждой из этих подалгебр анзац (2) удобно представить в виде [1, 2, 6]

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (3)$$

где φ — неизвестная функция. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\Box u &= \varphi \Box f + 2\varphi_1(\nabla f \nabla \omega_1) + 2\varphi_2(\nabla f \nabla \omega_2) + f\{\varphi_{11}(\nabla \omega_1 \nabla \omega_1) + \\
&\quad + 2\varphi_{12}(\nabla \omega_1 \nabla \omega_2) + \varphi_{22}(\nabla \omega_2 \nabla \omega_2) + \varphi_1 \Box \omega_1 + \varphi_2 \Box \omega_2\},
\end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varphi_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2}, \quad \varphi_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}, \quad \varphi_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2^2}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2},$$

$$\nabla g \nabla h = \frac{\partial g}{\partial x_0} \frac{\partial h}{\partial x_0} - \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \dots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{\partial h}{\partial x_n}.$$

Редукцию уравнения (1) удобно проводить с использованием формулы (4), поскольку она сводит нахождение $\square u$ к менее громоздким вычислениям производных от функций f , ω_1 , ω_2 .

Редуцированное уравнение, соответствующее анзацу (3), имеет вид

$$a_{11}(x)\varphi_{11} + a_{12}(x)\varphi_{12} + a_{22}(x)\varphi_{22} + b_1(x)\varphi_1 + b_2(x)\varphi_2 + c(x, \varphi) = 0.$$

Ниже для каждой подалгебры L_j , $j = 1, \dots, 18$ указываем соответствующие ей функции f , ω_1 , ω_2 , a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 , c .

1. Алгебра L_1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{m+1}^2 + x_q^2)^{1/(1-k)}, \\ \omega_1 &= \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}, \quad \omega_2 = \frac{x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}, \\ a_{11} &= 4\omega_1(1 - \omega_1), \quad a_{12} = -8\omega_1\omega_2, \quad a_{22} = -4\omega_2(1 + \omega_2), \\ b_1 &= 2(d+1) + \frac{2q-2m-(2q-2m-8)k}{1-k}\omega_1, \\ b_2 &= 2(d-m) + \frac{2q-2m-(2q-2m-8)k}{1-k}\omega_2, \\ c &= \frac{2(m-q) + (2q-2m-4)k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

2. Алгебра L_2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/(1-k)}, \\ \omega_1 &= \alpha \ln(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2}{x_{n-1}^2 + x_n^2}, \\ a_{11} &= 4(\alpha^2 + 1), \quad a_{12} = -8\alpha\omega_2, \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1), \\ b_1 &= \frac{8\alpha}{1-k}, \quad b_2 = \frac{4(k+1)}{k-1}\omega_2 - 2m - 2, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

3. Алгебра L_3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \dots + x_m^2}{x_0^2}, \\ \omega_2 &= \frac{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}{x_0^2}, \quad a_{11} = 4\omega_1^2(\omega_2 - 1), \quad a_{12} = 8\omega_1^2\omega_2, \\ a_{22} &= 4\omega_2^2(\omega_2 - 1), \quad b_1 = -\frac{8\omega_1}{1-k} + (6\omega_1 - 2m)\omega_1, \\ b_2 &= (6\omega_2 - 2q + 2m)\omega_2, \quad c = \frac{-2m + 2(m-2)k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

4. Алгебра L_4 :

$$f(x) = (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)},$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2\ln(x_0 - x_n) - (1 + \alpha)\ln(x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2) - 2c \operatorname{arctg} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \\ \omega_2 &= \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2}{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}, \quad a_{11} = 4[c^2 + (1 + \alpha)^2], \\ a_{12} &= 8[(1 + \alpha)\omega_2 - 1], \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1), \quad b_1 = \frac{8(1 + \alpha)}{k - 1}, \\ b_2 &= \frac{4(k + 1)\omega_2 - (2m + 4)(k - 1)}{k - 1}, \quad c = \frac{4}{(k - 1)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

5. Алгебра L_5 :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_0^2 - x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \dots + x_m^2}{x_0^2 - x_n^2}, \quad \omega_2 = \frac{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}{x_0^2 - x_n^2}, \\ a_{11} &= 4\omega_1(\omega_1 - 1), \quad a_{12} = 8\omega_1\omega_2, \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1), \\ b_1 &= \frac{4(k + 1)}{k - 1}\omega_1 - 2m, \quad b_2 = \frac{4(k + 1)}{k - 1}\omega_2 - 2q + 2m, \quad c = \frac{4}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

6. Алгебра L_6 :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_n^2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ \omega_2 &= (1 + \alpha)\ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\ln(x_0 - x_n) + 2c \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \\ a_{11} &= 4\omega_1(1 - \omega_1), \quad a_{12} = 8(\omega_1 - 1), \quad a_{22} = -4[(1 + \alpha)^2 + c^2], \\ b_1 &= 4 + \frac{4(1 + k)}{1 - k}\omega_1, \quad b_2 = -\frac{8(1 + \alpha)}{1 - k}, \quad c = \frac{4}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

7. Алгебра L_7 :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2 - x_n^2}{x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2}, \\ \omega_2 &= 2\ln(x_0 - x_n) - (1 + \alpha)\ln(x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2), \quad a_{11} = 4\omega_1(1 - \omega_1), \\ a_{12} &= 8[1 - (1 + \alpha)\omega_1], \quad a_{22} = -4(1 + \alpha)^2, \\ b_1 &= 2(d + 2) + 2(m - d - 4)\omega_1 + \frac{8\omega_1}{1 - k}, \\ c &= -\frac{2(m - d)(1 + k)}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k, \quad b_2 = 2(1 + \alpha)(m - d - 2) + \frac{8(1 + \alpha)}{1 - k}.\end{aligned}$$

8. Алгебра L_8 :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_0^2 - x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_m^2}, \\ \omega_2 &= 2\ln(x_0 - x_n) - (1 + \alpha)\ln(x_1^2 + \dots + x_m^2), \quad a_{11} = 4\omega_1^2(1 - \omega_1), \\ a_{12} &= 8\omega_1[1 - (1 + \alpha)\omega_1], \quad a_{22} = -4(1 + \alpha)^2\omega_1, \\ b_1 &= \frac{4(3 - k)\omega_1}{1 - k} + (2m - 8)\omega_1^2, \quad b_2 = \frac{8}{1 - k} + 2(1 + \alpha)(m + 2)\omega_1, \\ c &= \frac{4}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

9. Алгебра L_9 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{(x_0 - x_n)^2 - 4x_1}{(x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}}, \\ \omega_2 &= 3[\ln(x_0 - x_n)^2 - 4x_1] - 2\ln[6(x_0 + x_n) - 6x_1(x_0 - x_n) - (x_0 - x_n)^3], \\ a_{11} &= 16 + \omega_1^2, \quad a_{12} = \frac{96}{\omega_1}, \quad a_{22} = \frac{144(1 - e^{\omega_2})}{\omega_1^2}, \quad b_1 = \frac{(m-4)k - m}{1-k}\omega_1, \\ b_2 &= -\frac{48 + 72e^{\omega_2}}{\omega_1^2}, \quad c = \frac{(6-2m)k + 2m - 2}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

10. Алгебра L_{10} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2}{x_0 - x_n}, \\ \omega_2 &= \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2, \\ a_{22} &= -4\omega_1, \quad b_1 = -\left[2(m-d) + \frac{8}{1-k}\right]\omega_1, \quad b_2 = 2d\omega_1, \\ c &= \frac{2(d-m) + 2(m-d-2)k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

11. Алгебра L_{11} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \dots + x_m^2}{x_0 - x_n}, \\ \omega_2 &= x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2, \quad a_{22} = 4\omega_1, \\ b_1 &= \frac{4(-2-m+mk)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{-2m+2k(m-2)}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

12. Алгебра L_{12} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}{x_0 - x_n}, \\ \omega_2 &= \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2, \\ a_{22} &= -4\omega_1, \quad b_1 = \frac{4(3-k)\omega_1}{1-k}, \quad b_2 = -2m\omega_1, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

13. Алгебра L_{13} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}{x_0 - x_n}, \\ \omega_2 &= \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2, \\ a_{22} &= -4\omega_2 - 4, \quad b_1 = \frac{4(-3+k)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = -\frac{4}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

14. Алгебра L_{14} :

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 - x_n},$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n) + 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2, \\ a_{22} &= 4(\alpha^2 - \omega_1), \quad b_1 = \frac{4(3-k)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

15. Алгебра L_{15} :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 - x_n}, \\ \omega_2 &= x_0 + x_n + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2, \\ a_{22} &= 4, \quad b_1 = \frac{4(3-k)\omega_1}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

16. Алгебра L_{16} :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left\{ -(x_0 + x_n) + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{(i-1)d+1}^2 + \dots + x_{id}^2) \right\}^{1/(1-k)}, \\ \omega_1 &= x_0 - x_n, \quad \omega_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_d^2}{\{f(x)\}^{1/(1-k)}}.\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}y_j &= \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q-1)d+j}, \quad j = 1, \dots, d, \\ a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 4, \quad a_{22} = 4 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2} \right\} \omega_2, \quad b_1 = \frac{4}{1-k}, \\ b_2 &= 2d \left[1 - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\omega_2(\omega_1 + \gamma_i) - \lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2} \right], \quad c = \frac{2d}{1-k} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{\omega_1 + \gamma_i} \varphi - \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

17. Алгебра L_{17} :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_{d_t+1}^2 + \dots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = x_0 - x_n, \\ \omega_2 &= \frac{-(x_0 + x_n) + \sum_{i=1}^t \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{d_i+1}^2 + \dots + x_{d_i}^2)}{x_{d_t+1}^2 + \dots + x_m^2}, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 4, \\ a_{22} &= 4\omega_2^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \sum_{i=1}^t \frac{4(d_i - d_{i-1})}{\omega_1 + \gamma_i} - \frac{2(m - d_t) - 2(m - d_1 - 4)k}{1-k} \omega_2, \\ c &= \frac{2(m - d_t) - 2(m - d_t + 2)k}{(1-k)^2} \varphi - \lambda\varphi^k.\end{aligned}$$

18. Алгебра L_{18} :

$$f(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{(i-1)d+1}^2 + \dots + x_{id}^2) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^t \frac{1}{x_0 - x_n + \mu_r} (x_{l_{r-1}}^2 + \dots + x_{l_r}^2) - (x_0 - x_n) \Big\}^{1/(1-k)},$$

$$\omega_1 = x_0 - x_n, \quad \omega_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_d^2}{f(x)^{1/(1-k)}},$$

где

$$y_j = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q-1)d+j}, \quad j = 1, \dots, d,$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 4, \quad a_{22} = \left[1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2} \right] \omega_2, \quad b_1 = \frac{4}{1-k},$$

$$b_2 = 2d + 2d \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2 - \omega_2(\omega_1 + \gamma_i)}{(\omega_1 + \gamma_i)^2} - 2 \sum_{r=1}^t \frac{(l_r - l_{r-1})\omega_2}{\omega_1 + \mu_r},$$

$$c = \left[\frac{2d}{1-k} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{\omega_i + \gamma_i} + \frac{2}{1-k} \sum_{i=1}^t \frac{l_r - l_{r-1}}{\omega_1 + \mu_r} \right] \varphi - \lambda \varphi^k.$$

5. Редукция по подалгебрам, содержащим P_0 или $P_0 + P_n$. В настоящем пункте проведем редукцию уравнения (1) к дифференциальным уравнениям с двумя инвариантными переменными, используя подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, содержащие P_0 или $P_0 + P_n$.

Пусть L — некоторая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Если $P_0 \in L$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L , не зависит от x_0 и потому является решением уравнения

$$-\square u + \lambda u^k = 0 \quad (5)$$

евклидовом пространстве E_n , где

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \quad (6)$$

Уравнение (5) инвариантно относительно расширенной алгебры Евклида $A\tilde{E}(n) = \langle P_1, \dots, P_n, J_{12}, \dots, J_{n-1,n} \rangle \oplus \langle D_1 \rangle$, генераторы которой имеют вид

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad D_1 = -x^a \partial_a + \frac{2}{k-1} u \partial_u, \quad a, b = 1, \dots, n.$$

Аналогично, если $P_0 + P_n \in L$, то любое решение уравнения (1), инвариантно относительно L , имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ и потому является решением уравнения (5) в евклидовом пространстве E_{n-1} . Поэтому в рассматриваемых случаях для редукции уравнения (5), а значит, и уравнения (1) к двумерным уравнениям достаточно классифицировать максимальные подалгебры ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{E}(n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D_1 \rangle$.

Теорема 2. *Максимальные подалгебры ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{E}(n)$ имеющие ненулевую проекцию на $\langle D_1 \rangle$, исчерпываются с точностью до $\tilde{E}(n)$ -сопряженности следующими алгебрами:*

$$L_{19} = (AO[1, d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AO[m+1, q] \oplus AE[q+1, n]) \oplus \langle D_1 \rangle,$$

$$d = 1, \dots, n-2, \quad q = d+1, \dots, n-1, \quad m = q+1, \dots, n, \quad n \geq 3;$$

$$L_{20} = (AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \ni \langle D_1 + \alpha J_{n-1, n} \rangle,$$

$$m = 1, \dots, n - 2, \quad n \geq 3, \quad \alpha > 0;$$

$$L_{21} = (K \oplus AE[m + 1, n - 2]) \ni \langle D_1 + \alpha J \rangle,$$

где K — диагональ в $AO[1, d] \oplus AO[d + 1, 2d]$, $J = \sum_{a=1}^d J_{a, a+d}$, $d = 2, \dots, [n/2]$,
 $m = 2d + 1, \dots, 2[n/2]$, $\alpha \geq 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Подалгебрам L_{20} , L_{21} соответствуют следующие анзацы и редуцированные уравнения.

1. Алгебра L_{20} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}, \\ \omega_2 &= \frac{x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}, \quad a_{11} = 4\omega_1(1 - \omega_1), \quad a_{12} = -8\omega_1\omega_2, \\ a_{22} &= -4\omega_2(1 + \omega_2), \quad b_1 = 2(d + 1) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1 - k}\omega_1, \\ b_2 &= 2(d - m) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1 - k}\omega_2, \\ c &= \frac{2(m - q) + (2q - 2m - 4)k}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

2. Алгебра L_{21} :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \alpha \ln(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x_n}{x_{n-1}}, \\ \omega_2 &= \frac{x_1^2 + \dots + x_m^2}{x_{n-1}^2 + x_n^2}, \quad a_{11} = 4(\alpha^2 + 1), \quad a_{12} = -8\alpha\omega_2, \quad a_{22} = -4\omega_2(\omega_2 - 1), \\ b_1 &= \frac{8\alpha}{1 - k}, \quad b_2 = \frac{4(k + 1)}{k - 1}\omega_2 - 2m - 2, \quad c = \frac{4}{(1 - k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k. \end{aligned}$$

1. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear multi-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
2. Fushchych W., Sthelen W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluwer Publ., 1993.
3. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
4. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.
5. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений, II, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 12, 1693–1700.
6. Фушич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук. думка, 1991, 304 с.
7. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фушич В.И., Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям, *Укр. мат. журн.*, 1991, **43**, № 10, 1311–1323.