Нелокальные анзацы и решения нелинейной системы уравнений теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

Нелинейная система теплопроводности нелокальной подстановкой сведена к скалярному нелинейному уравнению теплопроводности. Лиевская и условная инвариантность скалярного уравнения использована для нахождения нелокальных анзацев, которые редуцируют исходную систему к системам обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &u_0 = f(v)u_{11}, \\ &v_0 = u_{11}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $v_0 = \partial v/\partial x_0$, $u_0 = \partial u/\partial x_0$, $u_{11} = \partial^2 u/\partial x_1^2$, которая часто встречается в теории тепломассопереноса. Нелокальная замена

$$u = w_0, \quad v = w_{11} \tag{2}$$

сводит систему (1) к одному уравнению

$$w_{00} = f(w_{11})w_{110}. \tag{3}$$

Проинтегрировав (3) по x_0, будем иметь

$$w_0 = F(w_{11}), \tag{4}$$

где F — первообразная функции f. Дважды продифференцировав (4) по x_1, получим

$$w_{001} = \partial_1(f(w_{11})w_{111}). \tag{5}$$

После замены

$$w_{11} = z \tag{6}$$

имеем уравнение

$$z_0 = \partial_1(f(z)z_1). \tag{7}$$

Таким образом, система уравнений (1) свелась к нелинейному уравнению диффузии (7).

Укр. мат. журн., 1993, **45**, № 2, С. 293–302.

Лиевская симметрия уравнения (7) исчерпывающе изучена Л.В. Овсянниковым [1], а условная симметрия (7) исследована в [2, 3]. В настоящей статье приведены лиевские анзацы, редуцирующие уравнение (7) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Путем преобразования лиевских и некоторых нелиевских анзацев, посредством замен (2) и (6), описаны нелокальные анзацы, редуцирующие систему (1) к системе ОДУ. Построены семейства точных решений системы (1).

С использованием лиевской симметрии получены следующие неэквивалентные анзацы для уравнения (7).

А. $f(z)$ — произвольная гладкая функция:

$$
\begin{aligned}
&z = \varphi(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1/2};\\
&z = \varphi(\omega), \quad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Б. $f(z) = e^z$:

$$
\begin{aligned}
&z = \varphi(\omega) + (2+\lambda^{-1})\ln x_1, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};\\
&z = \varphi(\omega) + \lambda^{-1} x_1, \quad \omega = x_1 + \lambda \ln x_0;\\
&z = \varphi(\omega) - \ln x_0, \quad \omega = x_1;\\
&z = \varphi(\omega) + 2\ln x_1, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};\\
&z = \varphi(\omega) + \ln x_1, \quad \omega = x_0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

С. $f(z) = z^k$, k — произвольная постоянная, отличная от нуля:

$$
\begin{aligned}
&z = \varphi(\omega) x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)}, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};\\
&z = \varphi(\omega) x_0^{-1/k}, \quad \omega = x_1 + \lambda_1 \ln x_0;\\
&z = \varphi(\omega) e^{-\frac{2\lambda}{k} x_0}, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};\\
&z = \varphi(\omega) x_1^{2/k}, \quad \omega = x_0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Д. $f(z) = z^{-4/3}$:

$$
\begin{aligned}
&z = \varphi(\omega)(x_1^2 + \lambda_1)^{-3/2}, \quad \omega = x_0;\\
&z = \varphi(\omega) x_1^{-3/2}, \quad \omega = x_0;\\
&z = \varphi(\omega)(x_1^2 + \alpha^2)^{-3/2}, \quad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{arctg}\frac{x_1}{\alpha};\\
&z = \varphi(\omega)(x_1^2 - \alpha^2)^{-3/2}, \quad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{Arth}\frac{x_1}{\alpha};\\
&z = \varphi(\omega) x_1^{-3}, \quad \omega = \lambda x_0 + x_1^{-1};\\
&z = \varphi(\omega) e^{\frac{3}{2}\lambda x_0}, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};\\
&z = \varphi(\omega) x_0^{3/4}(x_1^2 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \omega = x_0 e^{\lambda \operatorname{arctg}\frac{x_1}{\alpha}};\\
&z = \varphi(\omega) x_0^{3/4}(x_1^2 - \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \omega = x_0 e^{\lambda \operatorname{Arth}\frac{x_1}{\alpha}};\\
&z = \varphi(\omega) x_0^{3/4} x_1^{-3}, \quad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1^{-1};\\
&z = \varphi(\omega) x_0^{\frac{3}{2}(\lambda+\frac{1}{2})}, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $\lambda_0 = \mathrm{const}$, $\lambda_1 = \mathrm{const}$, $\lambda_0 = \mathrm{const} \neq 0$, $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$. Некоторые из анзацев (8)–(11) посредством преобразований (6) и (2) преобразуются в нелокальные анзацы для системы (1).

А. $f(v)$ — произвольная гладкая функция:

1) $u = \varphi^1(\omega) - \dfrac{\omega}{2}\dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1/2};$

2) $u = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1^2}\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \dot\varphi^1(\omega), \quad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1;$

3) $u = \dfrac{\dot\varphi^1(x_0)}{2}x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_0).$

Б. $f(v) = e^v$:

4) $u = -2\lambda x_0^{-2\lambda-1}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{-\lambda-1}\dot\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0),$
$v = (2+\lambda^{-1})\ln x_1 + \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$

5) $u = \lambda\varphi^1(\omega)x_0^{-1} + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0),$
$v = x_1\lambda^{-1} + \dot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 + \lambda\ln x_0;$

6) $u = -\dfrac{1}{2x_0}x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = -\ln x_0 + \varphi^1(x_1);$

7) $u = -2\lambda e^{-2\lambda x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{-\lambda x_0}\dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = 2\ln x_1 + \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$

8) $u = \dfrac{x_1^2}{2}\dot\varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \ln x_1 + \varphi^1(x_0).$

С. $f = v^k$, k — произвольная постоянная ($k \neq 0$):

9) $u = \left(-\dfrac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda\right) x_0^{-(2\lambda+1)\left(\frac{1}{k}+1\right)}\varphi^1(\omega) +$
$+ x_1\lambda x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-1}\dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)}\ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$

10) $u = x_0^{-(1/k)-1}\left(-\dfrac{1}{k}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot\varphi^1(\omega)\right) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{-1/k}\ddot\varphi(\omega), \quad \omega = x_1 + \lambda\ln x_0;$

11) $u = -\dfrac{1}{k}x_0^{-(1/k)-1}\varphi^1(x_1) + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{-1/k}\ddot\varphi^1(x_1);$

12) $u = -2\lambda\left(\dfrac{1}{k}+1\right)e^{2\lambda((1/k)+1)x_0}\varphi^1(\omega) +$
$+ \lambda x_1 e^{-\lambda((2/k)+1)x_0}\dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = e^{-\frac{2\lambda}{k}}\ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$

13) $u = -\dot\varphi^1(x_0)\ln x_1 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_0)x_1^{-2}, \quad k = -1;$

14) $u = \dot{\varphi}^1(x_0)[x_1 \ln x_1 - x_1] + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_0)x_1^{-1}, \quad k = -2;$

15) $u = \dot{\varphi}^1(x_0)\dfrac{k^2}{(2+k)(2+2k)}x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_0)x_1^{2/k}, \quad k \neq 0; -1; -2.$

Д. $f(v) = v^{-4/3}$:

16) $u = \dfrac{1}{\lambda^2}(x_1^2 + \lambda^2)^{1/2}\dot{\varphi}(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = (x_1^2 + \lambda^2)^{-3/2}\varphi^1(x_0);$

17) $u = -\lambda^{-2}(x_1^2 - \lambda^2)^{1/2}\dot{\varphi}(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = (x_1^2 - \lambda^2)^{-3/2}\varphi^1(x_0);$

18) $u = \dfrac{1}{2x_1}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_1^{-3}\varphi^1(x_0);$

19) $u = -4x^{1/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_1^{-3/2}\varphi^1(x_0);$

20) $u = \dfrac{x_1^2}{2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_0);$

21) $u = \lambda x_1\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_1^{-3}\dot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = \lambda x_0 + \dfrac{1}{x_1};$

22) $u = -\dfrac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_0}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = e^{\frac{3}{2}\lambda x_0}\ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$

23) $u = x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \varphi^1(x_1);$

24) $u = x_1 x_0^{-1/4}\left[\dfrac{3}{4}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot{\varphi}^1(\omega)\right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{3/4}x_1^{-3}\ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = \lambda \ln x_0 + \dfrac{1}{x_1};$

25) $u = \left(-\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{3}{4}\right)x_0^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{\frac{3}{2}(\lambda+\frac{1}{2})}\ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$

26) $u = x_0^{-1/4}\left[\dfrac{3}{4}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot{\varphi}^1(\omega)\right] + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0),$
$v = x_0^{3/4}\ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1;$

27) $u = \dfrac{3}{4}x_0^{-1/4}\varphi^1(x_1) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$
$v = \ddot{\varphi}^1(x_1)x_0^{3/4},$

где $\lambda_0 = \mathrm{const}$, $\lambda_1 = \mathrm{const}$, $\lambda_0 = \mathrm{const} \neq 0$; φ^1, φ^2, φ^3 — произвольные гладкие функции; $\dot\varphi^1(\omega) = d\varphi^1/d\omega$, $\ddot\varphi^1(\omega) = d^2\varphi^1/d\omega^2$. Выписанные выше нелиевские анзацы редуцируют (1) к следующим системам ОДУ:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \frac{1}{4}\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) - \frac{1}{4}\omega\dot\varphi^1(\omega) + \frac{1}{2}f(\ddot\varphi^1(\omega))\omega\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-3/2},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-1};\\
&2)\quad \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\dot\varphi^1(\omega) - f(\dot\varphi(\omega))\lambda_0\ddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = \lambda_1 c_1,\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = \lambda_0 c_1 x_0 + c_2;\\
&3)\quad \ddot\varphi^1(x_0) = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = f(\varphi^1(x_0))\dot\varphi^1(x_0);\\
&4)\quad 2\lambda(2\lambda+1)\varphi^1(\omega) - (3\lambda^2+\lambda)\omega\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) -\\
&\qquad\quad - \lambda\omega^{3+\frac{1}{\lambda}}e^{\ddot\varphi^1(\omega)}\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-\lambda-2},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2\lambda-2};\\
&5)\quad \lambda^2\dot\varphi^1(\omega) - \lambda\varphi^1(\omega)) - \lambda e^{\dot\varphi^1(\omega)+(\omega/\lambda)}\ddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-2},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2} + \lambda\ln x_0\dot\varphi^2(x_0);\\
&6)\quad \frac{x_1^2}{2} + e^{\varphi^1(x_1)} + c_1 x_1 + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-2},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2};\\
&7)\quad 4\lambda^2\varphi^1(\omega) - 3\lambda^2\omega\varphi^1(\omega) + \lambda^2\ddot\varphi^1(\omega) - \lambda e^{\ddot\varphi^1(\omega)}\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 e^{-\lambda x_0},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_3 e^{-2\lambda x_0};\\
&8)\quad \ddot\varphi^1(x_0) = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = e^{\varphi^1(x_0)}\dot\varphi^1(x_0),\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = 0;\\
&9)\quad \left(-\frac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda\right)\left(-\frac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda - 1\right)\varphi^1(\omega) -\\
&\qquad\quad - \lambda\left(\frac{2}{k}(2\lambda+1) + 3\lambda + 1\right)\omega\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) -\\
&\qquad\quad - [\ddot\varphi^1(\omega)]^k\left[-\frac{1}{k}(2\lambda+1)\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\omega\dddot\varphi^1(\omega)\right] + c_1\omega + c_2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-2},\\
&\qquad \dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-2\lambda-2};
\end{aligned}
$$

10) $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\varphi^1(\omega)-\lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)\dot{\varphi}^1(\omega)+\lambda^2\ddot{\varphi}^1(\omega)-$
$-[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^k\left(-\frac{1}{k}\ddot{\varphi}^1(\omega)+\lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right)+c_1\omega+c_2=0,$
$\lambda\ln x_0\dot{\varphi}^2(x_0)=-c_1,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=c_2;$

11) $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\varphi^1(x_1)+\frac{1}{k}(\ddot{\varphi}^1(\omega))^{k+1}+c_1x_1+c_2=0,$
$x_0^{(1/k)+2}\dot{\varphi}^2(x_0)=c_1,$
$x_0^{(1/k)+2}\dot{\varphi}^3(x_0)=c_2;$

12) $4\lambda^2\left(\frac{1}{k}+1\right)^2\varphi^1(\omega)-\left(\frac{4}{k}+3)\lambda^2\omega\dot{\varphi}^1(\omega\right)+\lambda^2\ddot{\varphi}^1(\omega)-$
$-[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^k\left(-\frac{2\lambda}{k}\ddot{\varphi}^1(\omega)+\lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right)+c_1\omega+c_2=0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=c_1e^{-\lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)x_0},$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=c_2e^{-2\lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)x_0};$

13) $\ddot{\varphi}^1(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=\dot{\varphi}^1(x_0)[\varphi^1(x_0)]^{-2};$

14) $\ddot{\varphi}^1(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=\dot{\varphi}^1(x_0)[\varphi^1(x_0)]^{-2},$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

15) $\ddot{\varphi}^1(x_0)\frac{k^2}{(2+k)(2+2k)}=[\varphi^1(x_0)]^k\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

16) $\frac{\ddot{\varphi}^1(x_0)}{\lambda^2}=[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

17) $-\lambda^{-2}\ddot{\varphi}^1(x_0)=[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

18) $\ddot{\varphi}^1(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

19) $-4\ddot{\varphi}^1(x_0)=[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^2(x_0)=0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0)=0;$

20) $\ddot{\varphi}^1(x_0) = 2[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\dot{\varphi}^1(x_0),$
$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$

21) $\lambda^2\dot{\varphi}^1(\omega) - \lambda[\dot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3}\ddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0) = -\lambda\dot{\varphi}^3(x_0)x_0 + c_2,$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_1;$

22) $\lambda\omega\dddot{\varphi}^1(\omega)[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3} + \dfrac{3}{2}\lambda[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-1/3} - \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) -$
$- \varphi^1(\omega) - c_1\omega - c_2 = 0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_0},$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}x_0};$

23) $\dot{\varphi}^2(x_0) = 0,$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$

24) $-\dfrac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \dfrac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\ddot{\varphi}^1(\omega) - (\ddot{\varphi}^1(\omega))^{-4/3}\left[\dfrac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right] +$
$+ c_1\omega + c_2 = 0,$
$x_0^{5/4}\dot{\varphi}^3(x_0) = c_1,$
$x_0^{5/4}[\dot{\varphi}^2(x_0) - \lambda\ln x_0\dot{\varphi}^3(x_0)] = c_2;$

25) $\left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{1}{4}\right)\varphi^1(\omega) + \dfrac{\lambda}{2}\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) +$
$+ \left(\dfrac{3}{2}\lambda + \dfrac{3}{4}\right)(\ddot{\varphi}^1(\omega))^{-1/3} - \lambda\omega[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3}\dddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 x_0^{(\lambda/2)-(5/4)},$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 x_0^{-(\lambda/2)-(5/4)};$

26) $-\dfrac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \dfrac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\ddot{\varphi}^1(\omega) - [\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{4/3}\left[\dfrac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right] +$
$+ c_1\omega + c_2 = 0,$
$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 x_0^{-5/4},$
$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 x_0^{-5/4} + \lambda\ln x_0\dot{\varphi}^2(x_0);$

27) $[\ddot{\varphi}^1(x_1)]^{-1/3} + \dfrac{1}{4}\varphi^1(x_1) + c_1x_1 + c_2 = 0,$
$x_0^{5/4}\dot{\varphi}^2(x_0) = \dfrac{3}{4}c_1,$
$x_0^{5/4}\dot{\varphi}^3(x_0) = \dfrac{3}{4}c_2,$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Если проинтегрировать приведенные выше уравнения и подставить их решения в соответствующие анзацы, то получим решения системы (1). Приведем некоторые из них:

A. $u = \dfrac{c_1}{2}x_1^2 + c_3x_1 + \displaystyle\int f(c_1x_0 + c_2)dx_0 + c_4, \quad v = c_1x_0 + c_2;$

Б. $u = -\dfrac{1}{2x_0}x_1^2 + x_1\left(-\dfrac{c_1}{x_0} + c_3\right) - c_2 x_0^{-1} + c_4,$

$v = -\ln x_0 + \ln\left(-\dfrac{x_1^2}{2} - c_1 x_1 - c_2\right);$

$u = \dfrac{x_1^2}{2}(c_1 x_0 + c_2) + x_1(e^{c_1 x_0 + c_2} + c_3) + c_4,$

$v = \ln x_1 + c_1 x_0 + c_2;$

С. $u = -c_1 \ln x_1 + c_3 x_1 - (c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_4,$

$v = (c_1 x_0 + c_2) x_1^{-2}, \quad k = -1;$

$u = c_1[x_1 \ln x_1 - x_1] + x_1[-(c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_3] + c_4,$

$v = (c_1 x_0 + c_2) x_1^{-1}, \quad k = -2;$

$u = \dfrac{1}{k+1}\left(-x_0\dfrac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\right)^{-\frac{1}{k}-1} x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1 c_2 + c_3,$

$v = \left[-x_0\dfrac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\right]^{-\frac{1}{k}-1} x_1^{\frac{2}{k}}, \quad k \neq 0, -1, -2;$

Д. $u = (x_1^2 + \lambda^2)^{1/2} 3(-4\lambda^2 x_0 + c_1)^{-1/4} + c_2 x_1 + c_3,$

$v = (x_1^2 + \lambda^2)^{-3/2}(-4\lambda^2 x_0 + c_1)^{3/4};$

$u = -3(x_1^2 - \lambda^2)^{1/2}(4\lambda^2 x_0 + c_0)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3,$

$v = (x_1^2 - \lambda^2)^{-3/2}(4\lambda^2 x_0 + c_1)^{3/4};$

$u = \dfrac{c_1}{2x_1} + x_1[-3(c_1 x_0 + c_2)^{-1/3} + c_3] + c_4,$

$v = x_1^{-3}(c_1 x_0 + c_2);$

$u = -x_1^{1/2} 48(16x_0 + c_1)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3,$

$v = x_1^{-3/2}(16x_0 + c_1)^{3/4};$

$u = -3x_1^2(-8x_0 + c_1)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3,$

$v = (-8x_0 + c_1)^{3/4};$

$u = c_1 x_1 + c_2,$

$\nu = \varphi^1(x_1), \quad \varphi^1$ — произвольная гладкая функция;

$u = 3x_0^{-1/4}(\sqrt{x_1} - c_1 x_1 - c_2) + x_1[-3c_1 x_0^{-1/4} + c_4] + [-3c_2 x_0^{-1/4} + c_5],$

$v = x_0^{3/4}(-x_1^{-3/2}),$

где $c_i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,5}$.

В работе [2] для уравнения (7) приведены условно инвариантные анзацы, используя которые, можно построить нелокальные анзацы для системы (1). Приведем два таких анзаца для случая, когда $f(v) = \lambda e^v$.

По анзацам для уравнения (7):

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad z = \ln(\varphi(x_0) - x_1) + \ln(\varphi(x_0) + x_1) - \ln(2\lambda x_0); \\ &\text{б)} \quad z = 2\ln(\varphi(x_0) + x_1) - \ln(-2\lambda x_0) \end{aligned} \qquad (12)$$

находим анзацы для системы (1):

а) $u = \dot{\varphi}^1[(\varphi^1 - x_1)\ln(\varphi^1 - x_1) + (\varphi^1 + x_1)\ln(\varphi^1 + x_1) + \varphi^1] -$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{x_1^2}{2x_0}+\dot{x}_1\varphi^2(x_0)+\varphi^3(x_0),\\
&v=\ln(\varphi^1-x_1)+\ln(\varphi^1+x_1)-\ln 2\lambda x_0,\\
&\text{где}\ \ \varphi^1=\varphi^1(x_0);
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{б)}\quad &u=2\dot{\varphi}^1(x_1+\varphi^1)[\ln(x_1+\varphi^1)-1]-\frac{x_1^2}{2x_0}+x_1\varphi^2+\varphi^3,\\
&v=2\ln(x_1+\varphi^1)-\ln(-2\lambda x_0),
\end{aligned}
$$

которые редуцируют систему (1) к следующим системам ОДУ:

$$
\text{а)}\quad \dot{\varphi}^1=0,\quad \dot{\varphi}^2=-\varphi^1x_0^{-2},\quad \dot{\varphi}^3=\frac{-(\varphi^1)^2}{2x_0^2};
$$

$$
\text{б)}\quad \dot{\varphi}^1=0,\quad \dot{\varphi}^2=\varphi^1x_0^{-2},\quad \dot{\varphi}^3=\frac{(\varphi^1)^2}{2x_0^2}.
$$

Решив редуцированные системы, по формулам (13) найдем точные решения системы (1):

$$
\begin{aligned}
\text{а)}\quad &u=-\frac{c_1^2+x_1^2}{2x_0^2}+x_1c_2+c_3+\frac{c_1}{x_0}x_1,\\
&v=\ln\frac{c_1^2-x_1^2}{2\lambda x_0};\\
\text{б)}\quad &u=-\frac{x_1^2}{2x_0}+\left(c_2-\frac{c_1}{x_0}\right)x_1-\frac{c_1^2}{2x_0}+c_3,\\
&v=2\ln(x_1+c_1)-\ln(-2\lambda x_0).
\end{aligned}
$$

Итак, приведенные результаты говорят о том, что нелинейные уравнения обладают скрытыми нелокальными симметриями, которые к настоящему времени совершенно не изучены и не использованы для их интегрирования.

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Доклады АН СССР, Сер. А*, 1959, **125**, № 3, 492–495.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К., Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 11, 15–18.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрнйный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.