О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

Implicit nonlocal ansätze of the $F(x,v)=\tilde f(x,v)\varphi(\omega)+h(x,v)\dot\varphi(\omega)+\tilde g(x,v)$, $x_1=u$ form reducing nonlinear heat equation $u_0=\partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1)$ to the ordinary differential equations are constructed. A method for generating the new solutions of the nonlinear heat equation by means of nonlocal transformation is indicated.

В работе [1] дана полная групповая классификация одномерного нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_0=\partial_1(c(u)u_1), \tag{1}$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2$, $u_\mu=\partial_\mu u=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu=0,1$, $c(u)$ — произвольная гладкая функция. Там же установлено, что уравнение (1) имеет самую широкую алгебру инвариантности тогда, когда

$$c(u)=\lambda u^{-\frac{4}{3}},\quad \lambda=\mathrm{const}. \tag{2}$$

Базисные элементы $\langle P_0,P_1,D_1,D_2,A\rangle$ этой пятимерной алгебры Ли имеют вид

$$P_0=\partial_0,\quad P_1=\partial_1,\quad D_1=2x_0\partial_0+x_1\partial_1, \tag{3}$$

$$D_2=x_1\partial_1+(au+b)\partial_u\quad (a,b=\mathrm{const}), \tag{4}$$

$$A=-x_1^2\partial_1+3x_1u\partial_u. \tag{5}$$

Во всех остальных случаях алгебра инвариантности уравнения (1) является четырехмерной $\langle P_0,P_1,D_1,D_2\rangle$ или трехмерной $\langle P_0,P_1,D_1\rangle$.

Анзацы, порождаемые операторами (3)–(5), имеют вид [2]

$$u=f(x)\varphi(\omega)+g(x), \tag{6}$$

где f, g — некоторые гладкие функции, определяемые из условия редукции [3].

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0=\partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1). \tag{7}$$

Алгеброй инвариантности уравнения (7) является четырехмерная алгебра с базисными элементами (3), (4).

В настоящей работе для уравнения (7) построены анзацы вида

$$F(x,v)=\tilde f(x,v)\varphi(\omega)+h(x,v)\dot\varphi(\omega)+\tilde g(x,v), \tag{8}$$

Доклады АН Украины, 1992, № 1, С. 26–30.

где $v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1} = u$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\omega = \omega(x, v)$, $x = (x_0, x_1)$. В формуле (8) F, $\tilde{f}$, h, $\tilde{g}$ — некоторые гладкие функции, определяемые из условия редукции уравнения в частных производных (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Анзац (8) принципиально отличен от (6) и связан с нелокальной (нелиевской) симметрией уравнения (7).

Для построения анзаца (8) в явном виде мы воспользуемся идеей [4–6]: с помощью нелокального, несингулярного преобразования приводим (7) к уравнению, симметрия которого шире, чем симметрия исходного уравнения. Воспользовавшись обратимостью используемых нелокальных преобразований, находим анзац для уравнения (7).

Для конкретной реализации этой идеи преобразуем уравнение (7) с помощью цепочки нелокальных преобразований [5, 7]

$$u = v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \tag{9}$$

$$x_0 = t, \quad x_1 = w, \quad v = x, \tag{10}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = z. \tag{11}$$

Уравнение (7) при преобразованиях (9)–(11) переходит в уравнение

$$z_t = \partial_x(z^{-\frac{4}{3}} z_x), \tag{12}$$

где $z = z(t, x)$, $z_t = \frac{\partial z}{\partial t}$, $z_x = \partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}$. Уравнение (12) имеет более широкую симметрию, чем уравнение (7). Именно оператор

$$A_z = -x^2 \partial_x + 3xz\partial_z \tag{13}$$

является новым (дополнительным) оператором симметрии преобразованного уравнения (12). Этот факт дает возможность построить лиевский анзац для уравнения (12), а затем преобразовать его с помощью (11), (10), (9). Построенный таким образом анзац будет нелокальным (нелиевским) для уравнения (7).

Анзацы для уравнения (12) имеют вид

$$z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = at + \frac{1}{x}, \tag{14}$$

$$z = t^{\frac{3}{4}} x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = a\ln t + \frac{1}{x} \quad (a = \mathrm{const}). \tag{15}$$

Построение таких анзацев возможно благодаря наличию в симметрии уравнения (12) оператора (13). После преобразований (11), (10) анзацы (14), (15) принимают вид (8)

$$x_1 + F(x_0) = -\frac{1}{v}\dot{\varphi}(\omega) + \varphi(\omega), \quad \omega = c_3 x_0 + \frac{1}{v}, \quad v_1 = u, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} (x_1 + F(x_0))x_0^{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{v}\dot{\varphi}(\omega) + \varphi(\omega), \\ \omega = c_3 \ln x_0 + \frac{1}{v}, \quad v_1 = u, \quad c_3 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{17}$$

Анзацы (16), (17) редуцируют уравнение (7) к следующим ОДУ:

$$\begin{aligned}&3(\ddot\varphi)^{-\frac13}+c_3\dot\varphi-c_2=0,\\&\dot F=c_2,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&3(\ddot\varphi)^{-\frac13}+c_3\dot\varphi+\frac34\varphi-c_2=0,\\&x^{\frac14}\dot F=c_2.\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнения (18) несложно проинтегрировать. В результате получим

$$(c_1x_1+c_2x_0)^4=\left(c_3x_0+\frac1v\right)\left(-4c_3x_0+\frac1v\right)^4,\quad v_1=u,\tag{20}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Заметим, что формула (20) задает семейство точных решений уравнения (7) в неявном виде. Такие решения не могут быть получена классическим методом С. Ли.

Применим преобразования (9)–(11) к уравнению (1). При этом уравнение принимает вид

$$z_t=\partial_x(\tilde c(z)z_x),\quad \tilde c(z)=z^{-2}c(z^{-1}).\tag{21}$$

Преобразования (9)–(11) переводят уравнения из класса (1) в тот же класс. Для того чтобы данные преобразования были преобразованиями-инвариантности уравнения (1), следует на функцию c наложить условие

$$z^{-2}c(z^{-1})=c(z).\tag{22}$$

Решением уравнения (22) является функция $c(z)=z^{-1}q(z)$, где $q(z)$ — произвольное решение функционального уравнения

$$q(z)=q(z^{-1}).\tag{23}$$

Преобразования инвариантности (9)–(11) уравнения

$$u_0=\partial_1\left(q(u)\frac{u_1}{u}\right)\tag{24}$$

используем для построения формулы размножения его решений.

Пусть $u=R(x_0,x_1)$ — решение уравнения (24). Тогда $z=R(t,x)$ — решение уравнения

$$z_t=\partial_x\left(q(z)\frac{z_x}{z}\right).\tag{25}$$

Произведя замену (11), получаем $w_x=R(x,t)$ — решение уравнения

$$w_t=q(w_x)\frac{w_{xx}}{w_x}.\tag{26}$$

Применяя преобразование годографа (10), имеем решение

$$\frac1{v_1}=R(x_0,v)\tag{27}$$

уравнения

$$v_0 = q(v_1)\frac{v_{11}}{v_1}. \tag{28}$$

Соотношение (27) представляет собою ОДУ относительно неизвестной функции v, в котором x_0 играет роль параметра. Решая это уравнение, находим

$$x_1 = \int_0^v R(x_0, \tau) d\tau. \tag{29}$$

Если из (29) найти функцию v и продифференцировать ее по x_1, получим решение уравнения (24).

В качестве примера рассмотрим уравнение (24) при $q(u) \equiv 1$

$$u_0 = \partial_1 \left(\frac{u_1}{u}\right). \tag{30}$$

Функция

$$u = \frac{x_0}{\cos x_1 + 1} \tag{31}$$

является одним из частных решений уравнения (30). Из формулы (29) находим $x_1 = x_0 \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, откуда $v = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_0}$. Продифференцировав последнее выражение по x_1, получаем решение уравнения (30)

$$u = \frac{2x_0}{x_0^2 + x_1^2}. \tag{32}$$

Отметим, что решения (31) и (32) существенно отличаются между собой по своим свойствам (ограниченности, периодичности, поведением в ноле и на бесконечности и т.д.). Если же размножать решения уравнения (24) при помощи групповых преобразований, то большинство из указанных свойств этих решений сохраняются.

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.
2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.
6. Фущич В.І., Тичинін В.А., Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійних хвильових рівнянь, *Доп. АН УРСР*, 1990, № 5, С. 32–36.
7. King I.R., Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, **23**, 5441–5464.