Высшие симметрии уравнения Шредингера

А.Г. НИКИТИН, С.П. ОНУФРИЙЧУК, В.И. ФУЩИЧ

Найдены полные наборы операторов симметрии произвольного конечного порядка для уравнения Шредингера с некоторыми типами потенциалов, в том числе с потенциалом суперсимметричного гармонического осциллятора. Описаны потенциалы, допускающие нетривиальные высшие симметрии.

The complete sets of symmetry operators are found for Shrödinger equation with the potential of supersymmetric oscillator and some other potentials. The potentials admissing nontrivial higher symmetries are described.

Операторы симметрии (ОС) высших порядков привлекают все большее внимание исследователей, см. например, [1–7]. Изучение таких ОС позволяет получать информацию о скрытой симметрии уравнений математической физики, включая симметрии Ли–Беклунда [1] и суперсимметрии [2], и вычислять в явном виде законы сохранения и интегралы движения, которые в принципе не могут быть найдены в классическом подходе Ли [3]. Очень важным приложением ОС высших порядков является описание систем координат, в которых уравнение допускает решения в разделяющихся переменных [4]. Обзор результатов, относящихся к ОС основных уравнении квантовой теории, имеется в [3].

При исследовании высших симметрии уравнений математической физики обычно ограничиваются каким-нибудь конкретным классом ОС, например дифференциальными операторами первого порядка с матричными коэффициентами в случае уравнения Дирака [2, 5]. Конечно, естественный интерес вызывает задача описания ОС возможно более высокого, а в идеале произвольного порядка. Этот интерес стимулируется успешным использованием ОС высокого порядка (превышающего порядок уравнения) для разделения переменных [6, 7].

В работах [8–11] найдены полные наборы ОС произвольного порядка $n < \infty$ для уравнений Д'Аламбера, Клейна–Гордона–Фока. Шредингера и Дирака, описывающих свободные (невзаимодействующие) частицы. В настоящей статье исследуются высшие симметрии уравнения Шредингера с различными потенциалами.

Потенциалы, допускающие нетривиальные лиевские симметрии одномерного уравнения Шредингера, получены в работах [12–14]. Ниже найдены полные наборы ОС произвольного порядка для уравнения Шредингера со всеми этими потенциалами, а также с потенциалом суперсимметричного осциллятора. Описаны потенциалы, допускающие высшие симметрии: показано, что потенциалы, соответствующие точно решаемым уравнениям Шредингера [15], допускают ОС третьего порядка (см. также [11]).

Теор. и мат. физика, 1992, **91**, № 2, С. 268–278.

1. Определяющие уравнения

Запишем исследуемое одномерное уравнение Шредингера в виде (1.1)

$$L\Psi \equiv \left(p_0 - 1/2(p^2 + V(x))\right)\Psi = 0, \tag{1.1}$$

где

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -i\frac{\partial}{\partial x} = -i\partial_x.$$

Исследование симметрии уравнения (1.1) включает задачи, которые можно условно разделить на два типа:

1) потенциал V задан, найти симметрию;

2) определить потенциалы, допускающие известную (или какую-нибудь) симметрию.

В этом разделе приведем общие результаты, относящиеся к обоим типам задач.

Определение. *Линейный дифференциальный оператор порядка* n

$$Q^n = \sum_{i=0}^{n}(q_i \cdot p)_i, \tag{1.2}$$

где $(q_i \cdot p)_i = [(q_i \cdot p)_{i-1}, p]_+$, $(q_0 \cdot p)_0 = q_0$, $[A,B]_+ = AB + BA$, $q_i = q_i(t,x)$, *называется ОС (порядка* n*) уравнения (1.1), если*

$$[L, Q^n] = 0. \tag{1.3}$$

Замечание 1. Оператор (1.2) не зависит от p_0, поскольку на множестве решений уравнения (1.1) всегда можно выразить p_0 через $p^2 + V$. Это позволяет, не умаляя общности, потребовать равенства нулю коммутатора L с оператором симметрии, переводящим решения в решения [3].

Замечание 2. Представление Q^n в виде суммы i-кратных антикоммутаторов упрощает последующие вычисления. Используя тождество [11]

$$(q_i \cdot p)_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \frac{i!2^{i-k}}{(i-k)!k!}(\partial_x^k q_i)\partial_x^{i-k},$$

операторы дифференцирования всегда можно перенести вправо.

Найдем уравнения для коэффициентов q_i ОС. Подставив (1.1), (1.2) в (1.3), используя соотношения [11]

$$[p_0(q_i \cdot p)_i] = i(q_i \cdot p)_i,$$

$$\left[-\frac{1}{2}p^2, (q_i \cdot p)_i\right] = \frac{i}{2}(q_i' \cdot p)_{i+1},$$

$$[V, (q_{2k} \cdot p)_{2k}] = -i\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{m+k}\frac{2(2k)!}{(2k-2m-1)!(2m+1)!} \times$$
$$\times (q_{2k}\partial_x^{2k-2m-1}V \cdot p)_{2m+1}, \quad k \geq 1,$$

$$[V, (q_{2k+1} \cdot p)_{2k+1}] = -i\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m+k+1}\frac{2(2k)!}{(2k-2m-1)!(2m+1)!} \times$$
$$\times (q_{2k+1}\partial_x^{2k-2m+1}V \cdot p)_{2m}, \quad k \geq 0$$

(где точка и штрих обозначают производные но t и x), и приравнивая коэффициенты при линейно независимых слагаемых вида $(Ap)_i$ приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов q_i и потенциала V:

$$\begin{aligned} &q_n' = 0, \\ &2\dot{q}_{2m} + 2q_{2m-1}' + \sum_{k=m}^{\{(n-1)/2\}k} (-1)^{m+k+1} \frac{2(2k+1)!}{(2k-2m-1)!(2m)!} \times \\ &\qquad \times q_{2k+1}\partial_x^{2k-2m+1} V = 0, \\ &2\dot{q}_{2l+1} + q_{2l}' + \sum_{k=l+1}^{\{n/2\}} (-1)^{k+l} \frac{2(2k)!}{(2k-2l-1)!(2l+1)!} q_{2k}\partial_x^{2k-2l-1} V = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $m = 0, 1, \dots \{n/2\}$; $l = 0, 1, \dots \{(n-1)/2\}$; $q_{-1} \equiv 0$.

Уравнения (1.4) задают необходимые н достаточные условия существования ОС произвольного наперед заданного порядка n для уравнения (1.1). Общее решение уравнения (1.4) для V и q_i определяет явный вид потенциалов, допускающих ОС порядка n и явный вид этого ОС.

2. Полные наборы ОС одномерного уравнения Шредингера

Рассмотрим задачи типа 1 для уравнения (1.1), в которых потенциал V считается известным. Ограничимся анализом потенциалов следующего вида:

$$V = V_1, \tag{2.1а}$$

$$V = V_2 x, \tag{2.1б}$$

$$V = V_3 x^2, \tag{2.1в}$$

$$V = V_4 \frac{1}{x^2}, \tag{2.1г}$$

$$V = V_5 x^2 + V_6 \frac{1}{x^2}, \tag{2.1д}$$

где $V_1, \dots, V_6$ — произвольные постоянные.

Формулы (2.1) задают все неэквивалентные потенциалы, допускающие нетривиальные лиевские симметрии [12–14]. Здесь мы найдет полные наборы ОС произвольного порядка n для уравнения (1.1) с потенциалами (2.1).

В случае потенциала (2.1а) задача сводится к описанию ОС свободного уравнения Шредингера [11]. Соответствующие уравнения [1.4] принимают вид

$$\dot{q}_0 = 0, \quad q_0' = 0, \quad 2\dot{q}_k - q_{k-1}' = 0, \tag{2.2}$$

где точка и штрих обозначают производные по t а x, соответственно. Последовательным дифференцированием (2.2) получаем

$$\partial_t^{k+1} q_k = 0, \quad \partial_x^{n-k+1} q_k = 0, \tag{2.3}$$

откуда

$$q_k = \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^{p,l} x^p t^l, \tag{2.4}$$

где $C_k^{p,l}$ — произвольные постоянные коэффициенты, число которых равно $(k+1)(n-k+1)$. Из (2.2) получаем единственное ограничение на $C_k^{p,l}$

$$2l(l+1)C_k^{p,l+1}+(p+1)C_{k-1}^{p+1,l}=0,\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Следовательно, общее число независимых параметров в (2.4) равно [11]

$$N^n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(n-k+1)-\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{2.6}$$

Соответствующие ОС порядка n (число которых, очевидно, равно N) задаются соотношениями (1.2), (2.4) и (2.5) (последние могут рассматриваться как рекуррентные формулы). Нетрудно заметить, что все ОС уравнения (1.1), (2.1а) представляют собой полиномы порядка n от ОС первого порядка $P=p$ и $G=tp-mx$.

Для потенциалов (2.1б) и (2.1в) уравнения (1.4) сводятся к системам (2.7) и (2.8), соответственно:

$$\begin{aligned}&q_n'=0,\quad \dot q_0-2V_2q_1=0,\quad 2\dot q_n+\dot q_{n-1}=0,\\&2\dot q_k+q_{k-1}-2(k+1)V_2q_{k+1}=0,\quad 0<k<n;\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&q_n'=0,\quad 2\dot q_n-q_{n-1}'=0,\quad \dot q_0-2V_3xq_1=0,\\&2\dot q_k+q_{k-1}'-4(k+1)V_3xq_{k+1}=0,\quad 0<k<n.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7) могут быть решены по полной аналогии с (2.2). Снова имеют место дифференциальные следствия (2.3) и справедливо представление (2.4), но вместо (2.5) получаем из (2.7) следующие условия на $C_k^{p,l}$

$$2m(l+l)C_k^{p,l+1}+(p+1)C_{k-1}^{p+1}-4(k+1)V_2C_k^{p,l}=0,\quad k=1,\ldots,n. \tag{2.9}$$

Таким образом, уравнение (1.1) с потенциалом (2.16) допускает N^n ОС порядка n. Явный вид этих операторов задается формулами (1.2), (2.4), (2.9), а N^n — формулой (2.6). Все ОС являются полиномами порядка n от ОС первого порядка $\hat p=p+Vt$, $\hat G=t\hat p-mx$.

Для нахождения общего решения системы (2.8) воспользуемся следующими дифференциальными следствиями:

$$\partial_x^{n-k+1}q_k=0,$$

которые позволяют представить q_n в виде

$$q_k=\sum_{i=0}^{n-k}a_{k,i}x^i, \tag{2.10}$$

где $a_{k,i}$ — произвольные функции от t. Подставив (2.10) в (2.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе N^n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для N^n неизвестных $a_{k,i}$. Воспользовавшись тем фактом, что общее решение такой системы зависит от N^n произвольных параметров [16], мы сразу укажем явный вид соответствующих линейно независимых ОС

$$Q^n=\sum_{n=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{k}C_{k,\alpha}(p-i\omega x)^\alpha(p+i\omega x)^{n-\alpha}\exp[i(2\alpha-k)\omega t], \tag{2.11}$$

где $\omega=\sqrt{V_3}$, $C_{k,\alpha}$ — произвольные постоянные, число которых равно N^n (2.6).

Мы видим, что все ОС уравнения (1.1), (2.1в) конечного порядка n сводятся к полиномам от ОС первого порядка $p_\pm = (p \pm i\omega x)\exp(\mp i\omega t)$. В случае $n = 2$ наши результаты сводятся к полученным ранее в [12].

Несколько более громоздких выкладок требует интегрирование системы (1.4) с потенциалом (2.1г). Мы ограничимся выписыванием явного вида соответствующего ОС порядка $2n$

$$Q^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{a_1 a_2 \cdots a_i} Q_{a_1} Q_{a_2} \cdots Q_{a_i}, \tag{2.12}$$

где $\lambda^{a_1 \cdots a_t}$ — произвольные симметричные тензоры, $a_k = 1, 2, 3$,

$$Q_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{V_4}{x^2}, \quad Q_2 = 2tQ_1 - xp + \frac{i}{2}, \quad Q_3 = t^2 Q_1 - tQ_2 - \frac{1}{2}mx^2.$$

Количество линейно независимых операторов (2.12) равно N^n (2.6). ОС нечетного порядка для уравнения (1.1), (2.1г) не существует.

Соотношения (2.6), (2.12) задают полный набор ОС также для уравнения (1.1), (2.1д).

3. ОС суперсимметричного осцилятора

Уравнение Шредингера для суперсимметричного осциллятора имеет вид [17]

$$L\Psi \equiv \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2 + \sigma_3 \omega) \right] \Psi = 0, \tag{3.1}$$

где Ψ — двухкомпонентная волновая функция, ω — произвольный вещественный параметр, σ_3 — одна из матриц Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) обладает специфической симметрией в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами, определяемой супералгеброй $sqm(2)$ [17]. Эту алгебру образуют следующие ОС:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma_1 p + \sigma_2 \omega x], \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2 p - \sigma_1 \omega x), \quad Q_3 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2 + \sigma_3 \omega),$$

удовлетворяющие соотношениям

$$[Q_1, Q_2]_+ = 0, \quad Q_1^2 = Q_2^2 = Q_3, \quad [Q_1, Q_3] = [Q_2, Q_3] = 0. \tag{3.2}$$

Инвариантность относительно алгебры (3.3) является основным свойством уравнений суперсимметрнчной квантовой механики [17].

В работе [18] получен полный набор ОС второго порядка для уравнения (3.1). Мы найдем все неэквивалентные ОС произвольного порядка, описание которых, по сути, сводится к исследованию симметрии уравнения (1.1), (2.1г). Действительно, подвергая Ψ и L из (3.1) преобразованию

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = \exp\left(\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right)\Psi, \\ &L \to L' = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right) L \exp\left(\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

приходим к уравнению $L'\Psi' = 0$, где

$$L' = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)$$

— оператор, представляющий собой прямую сумму двух операторов (1.1), (2.1г). Соответствующие ОС, очевидно, можно представить в форме $Q' = \sigma^\mu Q_\mu^n$, где Q_μ^n — ОС уравнения (1.1), (2.1г), задаваемые соотношением (2.11) (где $C_{k,\alpha} \to C_{k,\alpha}^\mu$). Возвращаясь с помощью преобразования, обратно к (3.3), к исходному уравнению (3.1), получаем полный набор ОС этого уравнения в виде

$$Q^n = \sigma'^\mu Q_\mu^n, \tag{3.4}$$

где

$$\sigma_0' = \sigma_0, \quad \sigma_3' = \sigma_3, \quad \sigma_1' = \sigma_1 \cos\frac{\omega t}{2} + \sigma_2 \sin\frac{\omega t}{2},$$
$$\sigma_2' = \sigma_2 \cos\frac{\omega t}{2} - \sigma_1 \sin\frac{\omega t}{2}.$$

Количество линейно независимых ОС порядка и равно $4N^n$ где N^n задано в (2.6).

Симметрия суперсимметричного уравнения Шредингера с произвольным потенциалом исследована в [19].

4. ОС трехмерных гармонического и суперсимметричного осциляторов

Исследование высших симметрии трехмерного уравнения Шредингера

$$L\Psi \equiv \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{x})\right]\Psi = 0 \tag{4.1}$$

может быть проведено по схеме, используемой в разделе 2. Существенное усложнение задачи, связанное с переходом к уравнениям в частных производных по пространственным переменным, преодолевается с использованием обобщенных тензоров Киллинга [8, 10].

ОС уравнения (4.1) произвольного порядка n представим в виде

$$Q^n = \sum_{k=0}^{n}[[\ldots[F^{a_1a_2\cdots a_k}, p_{a_1}]_+, p_{a_2}]_+, \ldots, p_{a_k}]_+, \tag{4.2}$$

где $F^{a_1a_2\cdots a_k}$ — симметричный тензор ранга k, зависящий от x и t.

Подставляя L (4.1) и Q^n (4.2) в условие инвариантности (1.3) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых операторах дифференцирования, приходим к следующей системе определяющих уравнении (ср. (1.4)):

$$\begin{aligned}
&\partial^{(a_{n+1}}F^{a_1a_2\cdots a_n)} = 0,\\
&2\dot{F}^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}} + \partial^{(a_{2l+1}}F^{a_1a_2\cdots a_{2l})} +\\
&\qquad + \sum_{k=m}^{\{(n-1)/2\}}(-1)^{m+k+1}\frac{2(2k+1)!}{(2k-2m+1)!(2m)!}U^{a_1a_2\cdots a_{2m}},\\
&2\dot{F}^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}} + \partial^{(a_{2l+1}}F^{a_1a_2\cdots a_{2l})} +\\
&\qquad + \sum_{k=l+1}^{\{n/2\}}(-1)^{k+1}\frac{2(2k)!}{(2k-2l-1)!(2l+1)!}W^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\partial^a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad m = 0, 1, \ldots, \{n/2\}, \quad l = 0, 1, \ldots, \{(n-1)/2\},$$
$$U^{a_1 a_2 \cdots a_{2m}} = F^{a_1 a_2 \cdots a_{2m} b_1 b_2 \cdots b_{2k-2m+1}} \partial^{b_1} \partial^{b_2} \cdots \partial^{b_{2k-2m+1}} V,$$
$$W^{a_1 a_2 \cdots a_{2l+1}} = F^{a_1 a_2 \cdots a_{2l+1} b_1 b_2 \ldots b_{2k-2l-1}} \partial^{b_1} \partial^{b_2} \cdots \partial^{b_{2k-2l-1}} V$$

и подразумевается симметризация по индексам, заключенным в скобки.

Уравнения (4.3) определяют потенциалы V, допускающие нетривиальные симметрии порядка n, и коэффициенты $F^{a_1 a_2 \cdots a_k}$ соответствующих ОС. Общее решение этих уравнений для $V \equiv 0$ получено в [10]. Здесь мы рассмотрим случай потенциала гармонического осциллятора

$$V(\boldsymbol{x}) = \omega^2 \boldsymbol{x}^2$$

и приведем без доказательства число N^n линейно независимых ОС поряд n и явный вид этих операторов:

$$N^n = \frac{1}{3!4!}(n+1)(n+2)^2(n+3)^2(n+4),$$
$$Q^n = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{c} \lambda^{a_1 a_2 \cdots a_c b_1 b_2 \cdots b_{n-c}} q_{a_1}^{+} q_{a_2}^{+} \cdots q_{a_k}^{+} q_{a_{k+1}}^{-} \cdots q_{a_c}^{-} J_{b_1} J_{b_2} \cdots J_{b_{a-c}}, \tag{4.4}$$

где

$$q_{a_j}^{\pm} = (p_{a_j} \pm i\omega x_{a_j}) \exp(\mp i\omega t), \quad J_b = \varepsilon_{bcd} q_c^{+} q_d^{-},$$

$\lambda^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}}$ — произвольные постоянные тензоры, симметричные относительно перестановок $a_i \leftrightarrow a_j$, $b_k \leftrightarrow b_i$ и имеющие нулевой след по любой паре индексов (a_j, b_i).

Исследование симметрии уравнения (4.1) с потенциалом суперсимметричного осциллятора

$$V(\boldsymbol{x}) = \omega^2 \boldsymbol{x}^2 + \omega \sigma_3$$

может быть проведено в полной аналогии с разделом 3. Общее выражение для соответствующего ОС порядка n задается формулой (3.4), где Q_μ^n — операторы (4.5) ($\lambda^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}} \to \lambda_\mu^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}}$), число линейно независимых ОС равно $4N^n$.

5. Потенциалы, допускающие нетривиальные симметрии

Обратимся теперь к задаче второго типа и опишем класс потенциалов. при которых уравнение (1.1) допускает нетривиальные симметрии. В принципе все такие потенциалы описаны уравнениями (1.4), если и V, и q_i рассматривать как неизвестные.

Рассмотрим последовательно случаи $n = 1, 2$ (которые соответствуют лиевским симметриям) и $n = 3$ (простейшая нелиевская симметрия).

Полагая в (1.4) $n = 1$, приходим к следующей системе:

$$q_1' = 0, \quad 2\dot{q}_1 + q_0' = 0, \quad \dot{q}_0 - V' q_1 = 0. \tag{5.1}$$

По определению $q_1 \neq 0$, поэтому справедливы следующие дифференциальные следствия системы (5.1):

$$q_0'' = 0, \quad V''' = 0,$$

откуда получаем общий вид потенциала V, допускающего ОС первого порядка

$$V = V_1 + V_2 x + V_3 x^2,$$

где V_1, V_2 и V_3 — произвольные постоянные. Соответствующие ОС приведены в разделе 3.

Для $n = 2$ система (1.4) принимает вид

$$q_2' = 0, \quad 2\dot{q}_2 + q_1' = 0, \quad \dot{q}_0 - V' q_1 = 0, \quad 2\dot{q}_1 + q_0' - 2q_2 V' = 0, \tag{5.2}$$

откуда получаем но аналогии с вышеизложенным

$$V = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \frac{V_{-2}}{(C_0 + C_1 x)^2}. \tag{5.3}$$

Мы видим, что уравнения (1.4) позволяют элементарно вычислять общий вид потенциала, допускающего нетривиальную лиевскую симметрию (ОС второго порядка сводятся на множестве решений уравнения (1.1) к дифференциальным операторам первого порядка, являющимся генератором группы Ли).

Случай $n = 3$ уже соответствует нелиевской симметрии. Соответствующие уравнения (1.4) принимают вид

$$q_3' = 0, \quad 2\dot{q}_3 + q_2' = 0, \quad 2\dot{q}_2 + q_1' - 6q_3 V' = 0. \tag{5.4а}$$

$$2\dot{q}_1 + q_0' - 4q_2 V' = 0. \tag{5.4б}$$

$$\dot{q}_0 - q_1 V' + q_3 V''' = 0. \tag{5.4в}$$

Как легко убедиться, общее решение уравнений (5.4а) имеет вид

$$q_3 = a, \quad q_2 = b - 2\dot{a}x, \quad q_1 = 2\ddot{a}x^2 - 2\dot{b}x + 6aV + c, \tag{5.5}$$

где a, b, c — произвольные функции от t. Дифференцируя (5.4б) по t, а (5.4в) по x и исключая $\dot{q}_\mu$, приходим с использованием (5.5) к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}(aV'' - 3aV^2 - cV)'' - 2\ddot{a}[(V'x^2)' + 4(xV)' + 2V] + 2\dot{b}[(V'x)' + 2V'] =\\ = 4\dddot{a}\,x^2 - 4\dddot{b}\,x + 2\ddot{c}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Нелинейное уравнение (5.6) является достаточно сложным, поэтому ограничимся исследованием его частных решений. Прежде всего отметим, что все потенциалы (5.3) удовлетворяют (5.6) и, следовательно, допускают нетривиальный ОС третьего порядка. Оказывается, однако, класс потенциалов, допускающих такой ОС, гораздо шире и включает, например, следующие решения уравнения (5.6) [11]:

$$\begin{aligned}&V = \frac{2d^2}{\cos^2 dx}, \quad V = 2d^2 \operatorname{tg}^2 dx.\\ &V = 2d(\operatorname{th}^2 dx - 1), \quad V = 2d^2(\operatorname{cth}^2 dx - 1), \quad V = \frac{d^2(1 \pm \operatorname{ch} dx)}{\operatorname{sh}^2 dx},\end{aligned} \tag{5.7}$$

где d — произвольный параметр.

Уравнения (1.1) с потенциалами (5.7) являются точно решаемыми [15]. Следует подчеркнуть, что эти потенциалы не допускают нетривиальной лиевской симметрии, но для соответствующих уравнений Шредингер существует ОС третьего порядка.

Приведем ряд других решений уравнения (5.6). Полагая a priori $\ddot{a} = \dot{b} = \ddot{c} = 0$, это уравнение можно дважды проинтегрировать по x и свести к следующей форме:

$$aV'' - 3aV^2 - cV = k_1 x + k_0. \tag{5.8}$$

Очевидным решеннием (5.8) является функция (5.9)

$$V = \frac{1}{3}W - \frac{c}{6a}, \quad a \neq 0, \tag{5.9}$$

где W — функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $W'' = W^2$, при этом $k_0 = k_1 = 0$. Другие решения уравнения (5.8) получаем с использованием справочника [20]:

а) при $c = k_0 = 0$, $k_1 = 2a \neq 0$, $V = 2y$ получим уравнение, которое определяет трансцендентную функцию Пенлеве;

б) при $k_1 = k_0 = 0$, $c = 4a \neq 0$, $V = 2y$ получим уравнение, решение которого приводит к эллиптическим интегралам. В число решении входят, например, функции

$$y = \frac{1}{\sin^2(x + C_1)},$$

соответствующие частному случаю потенциала Пешля–Теллера [21].

Заключение

Мы показали, что задача описания полного набора ОС произвольного конечного порядка n для одномерного уравнения Шредингера сводится к нахождению общего решения системы линейных уравнений (1.4) для коэффициентов q_i оператора (1.2). Интегрирование этой системы для заданного потенциала взаимодействия позволяет найти все неэквивалентные ОС порядка n. Выше найдены эти ОС для всех потенциалов, допускающие нетривиальную лиевскую симметрию, и для потенциала суперсимметричного осциллятора.

Гораздо более сложной является задача описания потенциалов, допускающих ОС заданного порядка n. Такая задача тоже сводится к решению системы (1.4), где и q_i и V рассматриваются как неизвестные. В результате уже в случае $n = 3$ приходим к нелинейному уравнению для V, для которого удалось получить только частные решения. Однако в их число входят очень важные потенциалы (5.7), (5.10), соответствующие точно решаемым уравнениям Шреднngера [15, 21]. Наличие обобщенной (нелиевской) симметрии у точно решаемых уравнений, не обладающих лиевской симметрией, на наш взгляд, является фундаментальным фактом, открывающим новые возможности в построении точно решаемых моделей. Так, представляется очень интересным исследовать возможность построения точных решений уравнений (1.1) с потенциалом (5.9) и другими потенциалами, перечисленными выше в пунктах “а”, “б”, допускающими ОС третьего порядка.

Следует отметить, что используемый нами подход позволяет вычислять также симметрии бесконечного порядка. Соответствующие ОС могут быть представлены в виде (1.2) или (4.2), где $n \to \infty$, а определяющие уравнения задаются формулами

(1.4) или (4.3), где первые строки должны быть опущены и суммирование заменяется бесконечными рядами (т.е. верхний предел суммирования устремляется к бесконечности).

Наш подход к исследованию ОС высших порядков уравнения (1.1) является альтернативным используемому в [22], где описаны ОС, допускаемые потенциалами Морзе и Пешля–Теллера.

1. Anderson R.H., Ibragimov N.H., Lie–Bäclund transformations in applications, Philadelphia, SIAM, 1979.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 3, 537–549.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
4. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981.
5. Шаповалов В.Н., Экле Г.Г., Алгебраические свойства уравнения Дирака, Элиста, Калмыцкий гос. ун-т, 1972.
6. Kalnins E.G., Miller W., jr., Williams G.C., *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, № 7, 1893–1990.
7. Fels M., Kamran N., *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1990, **428**, 229–249.
8. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 6, 786–795.
9. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 10, 1388–1398.
10. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 11, 1521–1527.
11. Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1991, **24**, № 22, L1269–L1275.
12. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–810.
13. Anderson R.H., Kumei S., Wulfman C.E., *Rev. Mex. Fis.*, 1972, **21**, № 1, 1–9.
14. Boyer C.P., *Helv. Phys. Acta*, 1979, **47**, № 4, 589–605.
15. Bagrou V.G., Gitman D.M., Exact solutions of relativistic wave equations, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1990.
16. Смирнов В.И., Курс высшей математики, Т.2, М., Наука, 1967.
17. Witten E., *Nucl. Phys. B*, 1981, **188**, № 3, 513–520.
18. Beckers J., Debergh N., *Helv. Phys. Acta*, 1991, **64**, № 1, 24–35.
19. Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G., *J. Math. Phys.*, 1992, **33**, № 1.
20. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Физматгиз, 1961.
21. Флюгге З., Задачи по квантовой механике, Т.1, М., Мир, 1974.
22. Kalnins E.G., Leuine R.D., Miller W., jr., in Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange, Amsterdam, North-Holland, 1991, 237–256.