Формула размножения решений уравнений Кортевега-де Фриза

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН, Н.И. СЕРОВ

Предложена формула размножения решений уравнения Кортевега-де Фриза. С помощью указанной формулы построены множества решений данного уравнения. Решены уравнения Риккати, которые появляются в процессе размножения.

В настоящей работе предложена конструктивная и простая формула размножения решений уравнения Кортевега-де Фриза (KdV)

$$L_1(u) = u_0 + 6uu_1 + u_{111} = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Если* $\overset{(1)}{u}$ *— решение KdV, то*

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2z_1, \quad z_1 = \partial z/\partial x_1, \tag{2}$$

есть решение уравнения KdV, функция z является решением уравнения Риккати

$$L_2(z) = z_1 - z^2 - \overset{(1)}{u} \tag{3}$$

и удовлетворяет дополнительному условию

$$L_3(z) = z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) совместны тогда и только тогда, когда $\overset{(1)}{u}$ *— решение уравнения KdV.*

Доказательство теоремы сводится к подстановке (2) в (1), после чего получаем

$$L_1(\overset{(2)}{u}) = \lambda_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + \lambda_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + \lambda_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{5}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 12(\overset{(1)}{z}_{11} + \overset{(1)}{z}_1 \partial_1), \quad \lambda_3 = -2\partial_1.$$

Условие совместности уравнений (3) и (4) имеет вид

$$z_{10} - z_{01} = k_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + k_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + k_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{6}$$

где

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \partial_{111} + 6\overset{(1)}{u}\partial_1 + 6\overset{(1)}{z}_{11} - 12\overset{(1)}{z}\,\overset{(1)}{z}_1, \quad k_3 = 2\overset{(1)}{z}.$$

Из формул (5), (6) следует утверждение теоремы.

Укр. мат. журн., 1992, **44**, № 5, С. 716–719.

Проиллюстрируем эффективность формулы (2) на простейших примерах. Очевидно, что константа $\overset{(1)}{u} = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$, является решением уравнения (1). Тогда по формуле (2) находим $\overset{(2)}{u} = \lambda - 2\overset{(1)}{z}_1$. Чтобы в явном виде найти $\overset{(2)}{u}$ необходимо решить уравнение Риккати

$$\overset{(1)}{z} = \overset{(1)}{z}{}^2 + \lambda. \tag{7}$$

Возможны три случая: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$. Рассмотрим подробно первый случай. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\overset{(1)}{z} = \frac{-1}{x_1 + c(x_0)}, \tag{8}$$

где $C(x_0)$ — постоянная интегрирования по x_1, которую необходимо определить из условия (4). Подставляя (8) в (4), находим $\dot{c} = 0$. Так как уравнение (4) инвариантно относительно трансляций по x_1, то не умаляя общности можно положить $c = 0$. Таким образом, из очевидного тривиального решения $\overset{(1)}{u} = 0$ по формуле (2) находим стационарное решение $\overset{(2)}{u} = 2x_1$ уравнения KdV.

Повторим эту процедуру еще раз:

$$\overset{(3)}{u} = \overset{(2)}{u} - 2z_1, \tag{9}$$

где

$$z_1 = z^2 + \overset{(2)}{u}, \tag{10}$$

$$z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{11}$$

Решением уравнения Риккати (10) является функция

$$z = \frac{c(x_0) - 2x_1^3}{x_1(c(x_0) + x_1^3)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), находим $\dot{c} = 12$. Тогда

$$\overset{(3)}{u} = \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2}. \tag{13}$$

Если продолжать этот процесс, то на n-м шаге получим формулу

$$\overset{(n+1)}{u} = \overset{(n)}{u} - 2\overset{(1)}{z}_1, \tag{14}$$

$$\overset{(1)}{z}_1 = \overset{(1)}{z}{}^2 + \overset{(n)}{u}, \tag{15}$$

$$\overset{(1)}{z}_0 - 6\overset{(n)}{z}{}^2\,\overset{(n)}{z}_1 + \overset{(n)}{z}_{111} = 0. \tag{16}$$

Основная трудность применения формул (14)–(16) для конкретного размножения решений уравнения (1) заключается в решении уравнения Риккати (15). Однако, если $\overset{(1)}{u} = \lambda = \mathrm{const}$, то удается построить общее решение уравнения (15) для произвольного $\overset{(n)}{u}$, найденного по формуле (14):

$$\overset{(n)}{z} = -\overset{(n-1)}{z} - \overset{(n-1)}{v}, \tag{17}$$

где

$$\overset{(n+1)}{v} = \left(\ln \int \exp\left\{2\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\int \overset{(m)}{v}\, dx_1\right\} dx_1\right)_1, \tag{18}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \overset{(0)}{v} = 0.$$

Если доопределить функции $\overset{(n)}{z}$ относительно переменной x_0 с помощью условия (16), то из (14) получим

$$\lambda \to \lambda + 2(\ln \overset{(1)}{w})_{11} \to \lambda + 2(\ln \overset{(2)}{w})_{11} \to \cdots,$$

где $(\ln w)_1 = v$, или

$$\overset{(2n)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n} \overset{(2m)}{v}_1, \quad \overset{(2n+1)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n} \overset{(2m+1)}{v}_1, \tag{19}$$

где $v_1 = \partial v/\partial x_1$.

Таким образом, используя формулы (18), (19), имеем цепочку решений

$$0 \to \frac{-2}{x_1^2} \to \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2} \to \cdots.$$

Аналогично получим следующие две цепочки решений:

$$1 \to 1 - \frac{2}{\cos^2(x_1 - 2x_0)} \to$$
$$\to 1 - \frac{16[(x_1 + 6x_0)\sin 2(x_1 - 2x_0) + \cos 2(x_1 - 2x_0) + 1]}{[2(x_1 + 6x_0) + \sin 2(x_1 - 2x_0)]^2} \to \cdots,$$
$$-1 \to -1 + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(x_1 + 2x_0)} \to$$
$$\to -1 + \frac{16[(x_1 - 6x_0)\,\mathrm{sh}\, 2(x_1 + 2x_0) - \mathrm{ch}\, 2(x_1 + 2x_0) - 1]}{[2(x_1 - 6x_0) + \mathrm{sh}\, 2(x_1 + 2x_0)]^2} \to \cdots.$$

Итак, зная решения уравнения Риккати, по формуле (2) строим решения KdV. Следует отметить, что предложенная формула размножения решений является следствием нелокальной симметрии уравнения (1). Лиевская симметрия уравнения (1) дает такие формулы размножения:

трансляции —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0 + \theta_0; x_1 + \theta_1), \tag{20}$$

галилеевские преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0; x_1 + \theta x_0) - \frac{1}{6}\theta, \tag{21}$$

масштабные-преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = a^2 \overset{(1)}{u}(x_0 a^3; x_1 a), \tag{22}$$

где θ, θ_0, θ_1, a — групповые параметры.

Объединяя формулу (2) с формулами (20), (21), (22), легко построить широкие классы точных (солитонных и несолитонных) решений уравнения KdV. В частности, решение

$$u = -1 + \frac{2}{\operatorname{ch}^2(x_1 + 2x_0)}$$

после размножения с помощью формул (20)–(22), где $\theta = -6$, $\theta_0 = 0$, принимает вид классического солитонного решения

$$u = \frac{2a^2}{\operatorname{ch}^2 a(x_1 - 4a^2 x_0 + \theta_1)}.$$

Очевидно, что формула (2) не является единственной для уравнения KdV. Например, формулы вида

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2(\overset{(1)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k}), \quad \overset{(1)}{z}_1 = \overset{(2)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k} + \overset{(1)}{u},$$
$$\overset{(1)}{z}_0 - 6(\overset{(2)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k})\overset{(1)}{z} + \overset{(1)}{z}_{111} = 0$$

также дают размножение решений уравнения (1).