Про редукцію рівнянь Нав'є–Стокса до лінійних рівнянь теплопровідності

В.І. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.О. ПОПОВИЧ

Відомо [1–4], що рівняння Нав'є–Стокса (НС)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}-\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{1}$$

інваріантні відносно алгебри $A\tilde{G}(1,3)$ розширенної групи Галілея $\tilde{G}(1,3)$ з базисними елементами

$$\begin{gathered}\partial_t=\partial/\partial t, \quad \partial_a=\partial/\partial_{x_a}, \quad G_a=-(t\partial_a+\partial_{u^a}),\\ J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a+u^a\partial_{u^b}-u^b\partial_{u^a}, \quad D=2t\partial_t+x_a\partial_a-u^a\partial_{u^a}-2p\partial_p.\end{gathered} \tag{2}$$

В (1) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)=\{u^1,u^2,u^3\}$ — поле швидкостей рідини, $p=p(x)$ — тиск, $x=\{t,\boldsymbol{x}\}\in\mathbb{R}(4)$, $\nabla=\{\partial/\partial_{x_a}\}$, $a=1,2,3$, Δ — лапласіан. Крім того, рівняння (1) інваріантні відносно нескінченновимірної алгебри A^∞ з базисними елементами [3, 4]

$$Q=f^a\partial_a+\dot{f}^a\partial_{u^a}-x_a\ddot{f}^a\partial_p, \quad R=g\partial_p, \tag{3}$$

де $f^a=f^a(t)$, $g=g(t)$ — довільні диференційовні функції змінної t, точка означає диференціювання по t. В [5] здійснена редукція рівнянь НС (1) до звичайних диференційних рівнянь (ЗДР).

Нижче наводяться результати досліджень з редукції рівнянь НС до двовимірних ДРЧП. Для побудови анзаців і нових змінних використані ті алгебри з повного набору нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $A\tilde{G}(1,3)$, які містяться в лінійній оболонці операторів ∂_a і G_a. Результати зведені до таблиці, яка дає повну інформацію про анзаци і змінні ω_1 і ω_2. Саме ці анзаци дозволяють редукувати рівняння НС до систем з двох незачеплених лінійних рівнянь теплопровідності.

В таблиці v^1, v^2, v^3, q є диференційовними функціями інваріантних змінних ω_1 і ω_2. Підставивши анзаци з таблиці в рівняння НС, одержимо такі двовимірні системи ДРЧП від змінних ω_1 та ω_2:

$$1^\circ. \quad \begin{aligned}&v^1_1+v^3v^1_2-v^1_{22}=0, \quad v^2_1+v^3v^2_2-v^2_{22}=0,\\ &v^3_1+v^3v^3_2-v^3_{22}+q_2=0, \quad v^3_2=0.\end{aligned}$$

$$2^\circ. \quad \begin{aligned}&v^1_1+v^3v^1_2-v^1_{22}=-\frac{v^1}{\omega_1}, \quad v^2_1+v^3v^2_2-v^2_{22}=0,\\ &v^3_1+v^3v^3_2-v^3_{22}+q_2=0, \quad v^3_2=-\frac{1}{\omega_1}.\end{aligned}$$

$$3^\circ. \quad \begin{aligned}&v^1_1+v^3v^1_2-v^1_{22}=-\frac{v^1}{\omega_1}, \quad v^2_1+v^3v^2_2-v^2_{22}=-\frac{v^2}{\omega_1},\\ &v^3_1+v^3v^3_2-v^3_{22}+q_2=0, \quad v^3_2=-\frac{2}{\omega_1}.\end{aligned}$$

Доповіді АН України, 1992, № 2, С. 23–30.

$\tilde{G}(1,3)$-нееквівалентні підалгебри і анзаци корозмірності 2, що редукують рівняння НС до рівняння теплопровідності

№	Алгебра	Інваріантні змінні	Анзац
1	$\partial_1,\ \partial_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u_1 = v^1,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
2	$G_1,\ \partial_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u_1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
3	$G_1,\ G_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
4	$G_1 + \partial_2,\ \partial_1$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
5	$G_1,\ \partial_1 + \alpha\partial_2,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{1}{t}(x_1 - x_2/\alpha),\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
6	$G_1 + \partial_2,\ G_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2 + x_2/t + x_1/t^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
7	$G_1 + \partial_2,\ G_2 - \partial_1$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{tx_1}{1+t^2} - \frac{x_2}{1+t^2},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1}{1+t^2} + \frac{tx_2}{1+t^2},\ u^3 = v^3,\ p = q$
8	$G_1 + \partial_2,\ G_2 - \partial_1 + \alpha\partial_2,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\alpha)x_1 - x_2}{1+t(t-\alpha)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\alpha)},\ u^3 = v^3,\ p = q$
9	$G_1 + \partial_2,\ \partial_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
10	$G_1 + \partial_2,\ \partial_1 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2 - \frac{x_3}{\alpha}$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
11	$G_1 + \partial_2,\ G_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3 + x_3/t,\ p = q$
12	$G_1 + \gamma\partial_1 + \partial_2,\ \gamma \neq 0,\ G_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + (t-\gamma)x_3$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3 + x_3/t,\ p = q$
13	$G_1 + \lambda\partial_1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, $G_2 + \alpha\partial_1 + \partial_3,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_2 + tx_3$	$u_1 = v^1 + \frac{x_1 - \alpha x_3}{t-\lambda},\ u^2 = v^2 - x_3,\ u^3 = v^3,\ p = q$
14	$G_1 + \lambda\partial_1 + \partial_3,\ \lambda \in \mathbb{R}$, $G_2 + \alpha\partial_1,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t$, $\omega_2 = tx_1 + \alpha x_2 + (t-\lambda)tx_3$	$u_1 = v^1 - x_3,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
15	$G_1 + \lambda\partial_1 + \partial_3,\ \lambda \in \mathbb{R}$ $G_2 + \mu\partial_1 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0$, $\lambda_2 + \mu^2 \neq 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = tx_1 + t(t-\lambda)x_3 +$ $+(\mu + \alpha(t-\lambda))x_2$	$u_1 = v^1 - \alpha x_3/t - x_3,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
16	$G_1 + \partial_2 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0$, $G_2 - \partial_1$	$\omega_1 = t$, $\omega_2 = x_2 - tx_1 - \left(\frac{t^2+1}{\alpha}\right)x_3$	$u_1 = v^1 - x_3\alpha,\ u^2 = v^2 + x_1 + tx_3/\alpha,\ u^3 = v^3,\ p = q$
17	$G_1 + \partial_2$, $G_2 - \partial_1 + \beta\partial_2 + \mu\partial_3$, $\beta > 0,\ \mu > 0$	$\omega_1 = t$, $\omega_2 = \mu x_1 + \mu t x_2 +$ $+(t(t-\beta) + 1)x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\beta)x_1 - x_2}{1+t(t-\beta)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\beta)},\ u^3 = v^3,\ p = q$
18	$G_1 + \partial_2 + \lambda\partial_3$, $G_2 - \partial_1 + \beta\partial_2 + \mu\partial_3$, $\beta > 0,\ \lambda > 0$	$\omega_1 = t$, $\omega_2 = (\lambda(t-\beta) + \mu)x_1 +$ $+(\mu t - \lambda)x_2 + (t(t-\beta) + 1)x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\beta)x_1 + x_2}{1+t(t-\beta)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\beta)},\ u^3 = v^3,\ p = q$

4°. $v_1^1 + v^3 v_2^1 - v_{22}^1 = v^2, \quad v_1^2 + v^3 v_2^2 - v_{22}^2 = 0,$
$v_1^3 + v^3 v_2^3 - v_{22}^3 + q_2 = 0, \quad v_2^3 = 0.$

5°. $v_1^1 + v^3 v_2^1 - v_{22}^1 = \dfrac{1}{\alpha\omega_1} v^2 - \dfrac{1}{\omega_1}, \quad v_1^2 + v^3 v_2^2 - v_{22}^2 = 0,$
$v_1^3 + v^3 v_2^3 - v_{22}^3 + q_2 = 0, \quad v_2^3 = -\dfrac{1}{\omega_1}.$

6°. $v_1^1 + v^3 v_2^1 - v_{22}^1 = -\dfrac{1}{\omega_1} v^1, \quad v_1^2 + v^3 v_2^2 - v_{22}^2 = -\dfrac{1}{\omega_1^2} v^1 - \dfrac{1}{\omega_1} v^2,$
$v_1^3 + v^3 v_2^3 - v_{22}^3 + q_2 = 0, \quad v_2^3 = -\dfrac{2}{\omega_1}.$

7°. $v_1^1 + v^3 v_2^1 - v_{22}^1 = \dfrac{-\omega_1 v^1 + v^2}{1+\omega_1^2}, \quad v_1^2 + v^3 v_2^2 - v_{22}^2 = -\dfrac{v^1 + \omega_1 v^2}{1+\omega_1^2},$
$v_1^3 + v^3 v_2^3 - v_{22}^3 + q_2 = 0, \quad v_2^3 = -\dfrac{2\omega_1}{1+\omega_1^2}.$

8°. $v_1^1 + v^3 v_2^1 - v_{22}^1 = -B(\omega_1)((\omega_1 - \alpha) v^1 - v^2), \quad B(\omega_1) = \dfrac{1}{1 + \omega_1(\omega_1 - \alpha)},$
$v_1^2 + v^3 v_2^2 - v_{22}^2 = -B(\omega_1)(v^1 + \omega_1 v^2), \quad v_1^3 + v^3 v_2^3 - v_{22}^3 + q_2 = 0,$
$v_2^3 = -B(\omega_1)(2\omega_1 - \alpha).$

9°. $v_1^1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^1 - v^2 - (1+\omega_1^2) v_{22}^1 + q_2 = 0,$
$v_1^2 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^2 - (1+\omega_1^2) v_{22}^2 + \omega_1 q_2 = 0,$
$v_1^3 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^3 - (1+\omega_1^2) v_{22}^3 = 0, \quad v_2^1 + \omega_1 v_2^2 = 0.$

10°. $v_1^1 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \dfrac{1}{\alpha} v^3\right) v_2^1 - v^2 - \left(1 + \omega_1^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) v_{22}^1 + q_2 = 0,$
$v_1^2 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \dfrac{1}{\alpha} v^3\right) v_2^2 - \left(1 + \omega_1^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) v_{22}^2 + \omega_1 q_2 = 0,$
$v_1^3 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \dfrac{1}{\alpha} v^3\right) v_2^3 - \left(1 + \omega_1^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) v_{22}^3 - \dfrac{1}{\alpha} q_2 = 0,$
$v_2^1 + \omega_1 v_2^2 - \dfrac{1}{\alpha} v_2^3 = 0.$

11°. $v_1^1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^1 - v^2 - (1+\omega_1^2) v_{22}^1 + q_2 = 0,$
$v_1^2 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^2 - (1+\omega_1^2) v_{22}^2 + \omega_1 q_2 = 0,$
$v_1^3 + (v^1 + \omega_1 v^2) v_2^3 + \dfrac{1}{\omega_1} v^3 - (1+\omega_1^2) v_{22}^3 = 0, \quad v_2^1 + \omega_1 v_2^2 + \dfrac{1}{\omega_1} = 0.$

12°. $v_1^1 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v_2^1 - v^2 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v_{22}^1 + q_2 = 0,$
$v_1^2 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v_2^2 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v_{22}^2 + (\omega_1 - \gamma) q_2 = 0,$
$v_1^3 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v_2^3 + \dfrac{1}{\omega_1} v^3 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v_{22}^3 = 0,$
$v_2^1 + (\omega_1 - \gamma) v_2^2 + \dfrac{1}{\omega_1} = 0.$

13°. $v_1^1 + (v^2 + \omega_1 v^3) v_2^1 - (1+\omega_1^2) v_{22}^2 + \dfrac{v^1 - \alpha v^3}{\omega_1 - \lambda} = 0,$
$v_1^2 + (v^2 + \omega_1 v^3) v_2^2 - v^3 - (1+\omega_1^2) v_{22}^2 + q_2 = 0,$

$$v^3_1 + (v^2 + \omega_1 v^3)v^3_2 - (1 + \omega_1^2)v^3_{22} + \omega_1 q_2 = 0, \quad v^2_2 + \omega_1 v^3_2 + \frac{1}{\omega_1 - \lambda} = 0.$$

14°. $$v^1_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^1_2 + f v^1_2 - K(\omega_1) v^1_{22} + \omega_1 q_2 = v^3,$$
$$v^2_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^2_2 + f v^2_2 - K(\omega_1) v^2_{22} + \alpha q_2 = -\frac{v^2}{\omega_1},$$
$$v^3_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^3_2 + f v^3_2 - K(\omega_1) v^3_{22} + \omega_1(\omega_1 - \lambda) q_2 = 0, \quad f_2 + \frac{1}{\omega_1} = 0,$$
$$f = \omega_1 v^1 + \alpha v^2 + \omega_1(\omega_1 - \lambda) v^3, \quad K(\omega_1) = \omega_1^2 + \alpha^2 + \omega_1^2(\omega_1 - \lambda)^2.$$

15°. $$v^1_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^1_2 + f v^1_2 - K(\omega_1) v^1_{22} + \omega_1 q_2 - \frac{\alpha}{\omega_1} v^2 - v^3 = 0,$$
$$v^2_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^2_2 + f v^2_2 - K(\omega_1) v^2_{22} + (\mu + \alpha(\omega_1 - \lambda)) q_2 + \frac{v^2}{\omega_1} = 0,$$
$$v^3_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} v^3_2 + f v^3_2 - K(\omega_1) v^3_{22} + \omega_1(\omega_1 - \lambda) q_2 = 0, \quad f^2 + \frac{1}{\omega_1} = 0,$$
$$f = \omega_1 v^1 + (\mu + \alpha(\omega_1 - \lambda)) v^2 + \omega_1(\omega_1 - \lambda) v^3,$$
$$K(\omega_1) = \omega_1^2 + \mu + \alpha(\omega_1 - \lambda))^2 + \omega_1^2(\omega_1 - \lambda)^2.$$

16°. $$v^1_1 + f v^1_2 - K(\omega_1) v^1_{22} - \frac{v^3}{\alpha} - \omega_1 q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + f v^2_2 - K(\omega_1) v^2_{22} + v^1 + \frac{\omega_1}{\alpha} v^3 + q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + f v^3_2 - K(\omega_1) v^3_{22} - \frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha} q_2 = 0, \quad f_2 = 0,$$
$$f = -\omega_1 v^1 + v^2 - \frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha} v^3, \quad K(\omega_1) = 1 + \omega_1^2 + \left(\frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha}\right)^2.$$

17°. $$v^1_1 + f v^1_2 + g\omega_2 v^1_2 - K(\omega_1) v^1_{22} + \mu q_2 = -\frac{-(\omega_1 - \beta) v^1 + v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^2_1 + f v^2_2 + g\omega_2 v^2_2 - K(\omega_1) v^2_{22} + \mu\omega_1 q_2 = \frac{-v^1 - \omega_1 v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^3_1 + f v^3_2 + g\omega_2 v^3_2 - K(\omega_1) v^3_{22} + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1) q_2 = 0, \quad f_2 + g = 0,$$
$$f = \mu v^1 + \mu\omega_1 v^2 + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1) v^3, \quad g = \frac{2\omega_1 - \beta}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$K(\omega_1) = \mu^2 + \mu^2\omega_1^2 + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1)^2.$$

18°. $$v^1_1 + f v^1_2 + g\omega_2 v^1_2 - K(\omega_1) v^1_{22} + (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu) q_2 = \frac{v^2 - (\omega_1 - \beta) v^1}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^2_1 + f v^2_2 + g\omega_2 v^2_2 - K(\omega_1) v^2_{22} + (\mu\omega_1 - \lambda) q_2 = \frac{-v^1 - \omega_1 v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^3_1 + f v^3_2 + g\omega_2 v^3_2 - K(\omega_1) v^3_{22} + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)) q_2 = 0, \quad f_2 + g = 0,$$
$$f = (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu) v^1 + (\mu\omega_1 - \lambda) v^2 + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)) v^3,$$
$$K(\omega_1) = (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu)^2 + (\mu\omega_1 - \lambda)^2 + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta))^2,$$
$$g = \frac{2\omega_1 - \beta}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)}.$$

Нумерація рівнянь 1°–18° відповідає нумерації анзаців у таблиці. Нижні індекси 1 і 2 означають диференціювання за інваріантними змінними ω_1 і ω_2 відповідно.

Нелінійні редуковані системи 1°–18° можна звести до лінійних рівнянь теплопровідності. Покажемо, як це можна зробити на прикладі найбільш простої системи 1°, з якої випливає

$$\begin{gathered} v^3 = h(\omega_1), \quad q = g(\omega_1)\omega_2 - \dot{h}(\omega_1)\omega_2, \quad v^1_1 + h(\omega_1)v^1_2 - v^1_{22} = 0, \\ v^2_1 + h(\omega_1)v^2_2 - v^2_{22} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

де h, g — довільні диференційовні функції від $\omega_1 = t$, точка означає диференціювання по $t = \omega_1$. Після заміни змінних

$$\tau = \omega_1, \quad z = \omega_2 + H(\omega_1), \quad \dot{H} = -h \tag{5}$$

з рівнянь (4) одержимо два незачеплених рівняння теплопровідності

$$v^1_\tau - v^1_{zz} = 0, \quad v^2_\tau - v^2_{zz} = 0. \tag{6}$$

Таким чином, за розв'язками лінійних рівнянь (6) будуються розв'язки нелінійного рівняння НС (1)

$$u^1 = v^1(t,z), \quad u^2 = v^2(t,z), \quad u^3 = -\dot{H}(t), \quad p = \ddot{H}(t)x_3 + g(t), \tag{7}$$

де $z = x_3 + H(t)$. Використовуючи перетворення, породжені операторами з нескінченновимірної алгебри інваріантності рівнянь НС (1), розв'язок (7) можна звести до простішого вигляду, зручного для розмноження. Дійсно, зробимо заміну змінних

$$\begin{gathered} \tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3 + H(t), \quad \tilde{u}^1 = u^1, \quad \tilde{u}^2 = u^2, \\ \tilde{u}^3 = u^3 + \dot{H}(t), \quad \tilde{p} = p - \ddot{H}(t)x_3 - g(t). \end{gathered} \tag{8}$$

Це перетворення належить групі симетрії рівнянь НС і зводить розв'язок (7) до вигляду

$$\tilde{u}^1 = v^1(t,z), \quad \tilde{u}^2 = v^2(t,z), \quad \tilde{u}^3 = 0, \quad \tilde{p} = 0, \quad z = \tilde{x}_3. \tag{9}$$

Зробивши аналогічні викладки для рівнянь 2°–13°, одержимо розв'язки рівнянь НС

$$2^\circ. \quad u^1 = \frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z) + \frac{x_1}{t}, \quad u^2 = \varphi^2(\tau,z), \quad u^3 = -\frac{x_3}{t}, \quad p = -\frac{x_3^2}{t^2},$$

де $\tau = \frac{1}{3}t^3$, $z = tx_3$.

Тут і надалі φ^1, φ^2 — диференційовні функції змінних τ і z, що задовольняють лінійне рівняння теплопровідності

$$\varphi^1_\tau - \varphi^1_{zz} = 0, \quad \varphi^2_\tau - \varphi^2_{zz} = 0.$$

$$\begin{aligned} 3^\circ. \quad & u^1 = \frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z) + \frac{x_1}{t}, \quad u^2 = \frac{1}{t}\varphi^2(\tau,z) + \frac{x_2}{t}, \quad u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \\ & p = -2\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{1}{5}t^5, \quad z = x_3t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ. \quad & u^1 = \varphi^1(\tau,z) + t\varphi^2(\tau,z), \quad u^2 = \varphi^2(\tau,z), \quad u^3 = 0, \\ & p = 0, \quad \tau = t, \quad z = x_3. \end{aligned}$$

5°. $u^1 = \frac{1}{\alpha t}\varphi^1(\tau, z) + \frac{1}{\alpha}\varphi^2(\tau, z) + \frac{1}{\alpha}\varphi^2(\tau, z) + \frac{1}{t}\left(x_1 - \frac{x_3}{\alpha}\right),$

$u^2 = \varphi^2(\tau, z), \quad u^3 = -\frac{x_3}{t}, \quad p = -\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{t^3}{3}, \quad z = tx_3.$

6°. $u^1 = \frac{1}{t}\varphi^1(\tau, z) + \frac{x_1}{t}, \quad u^2 = \frac{1}{t}\varphi^2(\tau, z) + \frac{1}{t^2}\varphi^1(\tau, z) + \frac{x_2}{t} + \frac{x_1}{t^2},$

$u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \quad p = -3\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{t^5}{5}, \quad z = t^2 x_3.$

7°. $u^1 = \frac{1}{1+t^2}(\varphi^1(\tau, z) + t\varphi^2(\tau, z) + tx_1 - x_2),$

$u^2 = \frac{1}{1+t^2}(-t\varphi^1(\tau, z) + \varphi^2(\tau, z) + x_1 + tx_2), \quad u^3 = -\frac{2t}{1+t^2}x_3,$

$p = \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^2}x_3^2, \quad \tau = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t, \quad z = (1+t^2)x_3.$

8°. $\alpha = 2: \ u^1 = \frac{1}{t^2}((t-1)\varphi^1(\tau, z) - t\varphi^2(\tau, z) + (t-1)x_1 - x_2),$

$u^2 = \frac{1}{t^2}(\varphi^1(\tau, z) + t\varphi^2(\tau, z) + x_1 + (t-1)x_2),$

$u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \quad p = -3\frac{x_3^2}{t}, \quad \tau = \frac{t^5}{5}, \quad z = t^2 x_3;$

$0 < \alpha < 2: \ \beta = \sqrt{1 - (\alpha/2)^2}, \ u^1 = \Bigg(\left(\beta + \frac{\alpha}{2\beta}\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\varphi^1(\tau, z) +$

$+ (t-\alpha)\varphi^2(\tau, z) + (t-\alpha)x_1 - x_2\Bigg)/(t^2 - \alpha t + 1),$

$u^2 = \left(-\frac{1}{\beta}\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)\varphi^1(\tau, z) + \varphi^2(\tau, z) + x_1 + tx_2\right)/(t^2 - \alpha t + 1),$

$u^3 = -(2t - \alpha)x_3/(t^2 - \alpha t + 1),$

$p = (1 - t^2 - (t-\alpha)^2 - t(t-\alpha))x_3^2/(t^2 - \alpha t + 1)^2,$

$\tau = \frac{t^5}{5} - \frac{\alpha}{2}t^4 + \frac{1}{3}(2 + \alpha^2)t^3 - \alpha t^2 + t, \quad z = (t^2 - \alpha t + 1)x_3;$

$\alpha > 2: \ \beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \ \beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1},$

$u^1 = \frac{-\beta_2\varphi^1(\tau, z)}{(\beta_1 - \beta_2)(t - \beta_1)} + \frac{\beta_1\varphi^2(\tau, z)}{(\beta_1 - \beta_2)(t - \beta_2)} + \frac{(t-\alpha)x_1 - x_2}{t^2 - \alpha t + 1},$

$u^2 = \frac{\varphi^1(\tau, z)}{(\beta_1 - \beta_2)(t - \beta_1)} - \frac{\varphi^2(\tau, z)}{(\beta_1 - \beta_2)(t - \beta_2)} + \frac{x_1 + tx_2}{t^2 - \alpha t + 1},$

$u^3 = -(2t - \alpha)x_3/(t^2 - \alpha t + 1),$

$p = (1 - t^2 - (t-\alpha)^2 - (t-\alpha)t)x_3^2/(t^2 - \alpha t + 1)^2,$

$\tau = \frac{t^5}{5} - \frac{\alpha}{2}t^4 + \frac{1}{3}(2 + \alpha^2)t^3 - \alpha t^2 + t, \quad z = (t^2 - \alpha t + 1)x_3.$

9°. $u^1 = -\frac{t}{1+t^2}\varphi_z^2(\tau, z) - x_2, \quad u^2 = \frac{1}{1+t^2}\varphi_z^2(\tau, z), \quad u^3 = \varphi^1(\tau, z),$

$p = \frac{2}{(1+t^2)^2}\varphi^2(\tau, z), \quad \tau = \frac{1}{3}t^3 + t, \quad z = x_1 + tx_2.$

10°. $$u^1=\frac{1}{\alpha}\varphi^1(\tau,z)+\left(-\frac{1}{\beta^2}\frac{t}{t^2+\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\right)\varphi^2_z(\tau,z)-x_2,$$
$$u^2=\frac{\varphi^2_z(\tau,z)}{t^2+\beta^2},\quad u^3=\frac{1}{\alpha\beta^2}\left(\frac{t}{t^2+\beta^2}+\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\right)\varphi^2_z(\tau,z),$$
$$p=\frac{2}{(t^2+\beta^2)^2}\varphi^2(\tau,z),\quad \beta=\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}},\quad \tau=\frac{1}{3}t^3+\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)t,$$
$$z=x_1+tx_2-\frac{x_3}{\alpha}.$$

11°. $$u^1=-\frac{1}{1+t^2}(\varphi^2_z(\tau,z)+2tx_1-2x_2)-\frac{x_1}{t},$$
$$u^2=\frac{1}{1+t^2}(\varphi^2_z(\tau,z)-2x_1-2tx_2),\quad u^3=\frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z)+\frac{x_3}{t},$$
$$p=\frac{2}{t(1+t^2)^2}\varphi^2(\tau,z)-\frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)^2}(x_1+tx_2)^2,\quad \tau=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3},$$
$$z=t(x_1+tx_2).$$

12°. $$u^1=-\frac{t-\gamma}{1+(t-\gamma)^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)(x_1+(t-\gamma)x_2)\right)-\frac{x_1}{t}+$$
$$+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)x_2,$$
$$u^2=\frac{1}{1+(t-\gamma)^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)(x_1+(t-\gamma)x_2)\right),$$
$$u^3=\frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z)+\frac{x^3}{t},$$
$$p=\frac{2\varphi^2(\tau,z)}{t(1+(t-\gamma)^2)^2}+\frac{(x_1+(t-\gamma)x_2)^2}{1+(t-\gamma)^2}\left(\frac{\frac{\gamma}{t}-2}{1+(t-\gamma)^2}-\frac{1}{t^2}\right),$$
$$\tau=\frac{t^5}{5}-\frac{\gamma}{2}t^4+(1+\gamma^2)\frac{t^3}{3},\quad z=t(x_1+(t-\gamma)x_2).$$

13°. $$u^1=\frac{1}{t-\lambda}(\varphi^1(\tau,z)+\alpha(\operatorname{arctg}t)\varphi^2_z(\tau,z)+x_1-\alpha x_3)+\alpha(x_2+tx_3)\times$$
$$\times\left(-\frac{2}{(1+\lambda^2)^2}\ln|t-\lambda|+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{t-\lambda}+\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}\ln|1+t^2|+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^3+3\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\operatorname{arctg}t\right),$$
$$u^2=-\frac{t}{1+t^2}\varphi^2_z(\tau,z)+\frac{1}{(1+t^2)(t-\lambda)}((2t-\lambda)x_3+(t^2-\lambda t-1)x_2),$$
$$u^3=\frac{1}{1+t^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)-\frac{2t-\lambda}{t-\lambda}(x_2+tx_3)\right),$$
$$p=\frac{2}{(t-\lambda)(1+t^2)}\varphi^2(\tau,z)-\frac{(x_2+tx_3)^2}{(t-\lambda)^2(1+t^2)}((2t-\lambda)(t-\lambda)+1),$$
$$\tau=\frac{t^5}{5}-\lambda\frac{t^4}{2}+\frac{1}{3}(1+\lambda^2)t^3-\lambda t^2+\lambda^2 t,\quad z=(t-\lambda)(x_2+tx_3).$$

Для систем 14°–18° знайти явний вигляд заміни змінних, яка зводить до пар рівнянь теплопровідності, не вдалось, бо їх пошук пов'язаний з розв'язанням достатньо складних систем ЗДР. Наприклад, у найпростішому з останніх випадку

16° одержимо

$$u^1 = \left(\frac{Y^i(t)}{t^2+1} - \frac{tZ^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right)\varphi^i_z(\tau, z) - \frac{x^3}{\alpha},$$
$$u^2 = \left(\frac{tY^i(t)}{t^2+1} + \frac{Z^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right)\varphi^i_z(\tau, z) + x_1 + \frac{tx^3}{\alpha},$$
$$u^3 = \alpha\frac{Z^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\varphi^i_z(\tau, z),$$
$$p = -\frac{2\alpha^2\varphi^i(\tau, z)}{(t^2+1)(t^2+1+\alpha^2)}\left(\frac{Y^i(t)}{t^2+1} + \frac{tZ^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right),$$

де

$$z = -tx_1 + x_2 - \frac{t^2+1}{\alpha}x_3, \quad \tau = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{t^5}{5} + (2+\alpha^2)\frac{t^3}{5} + (1+\alpha^2)t\right),$$

а $Y^i(t))$, $Z^i(t))$, $i = 1, 2$ — фундаментальна система розв'язків рівнянь

$$\dot{Y}(t) = 2Z/(t^2+1+\alpha^2), \quad \dot{Z}(t) = -2Y/(t^2+1). \tag{10}$$

Для систем 14°–18° також можна виписати вирази типу (10), але через громіздкість ми їх не наводимо.

Зауваження 1. Можна говорити, що для деяких множин розв'язків нелінійного рівняння НС (1) виконується деякий принцип суперпозиції, оскільки розв'язок нелінійних рівнянь НС (1) одержуємо з розв'язків лінійних рівнянь теплопровідності.

Зауваження 2. Алгебрами 1°–18° не вичерпуються всі можливі нееквівалентні підалгебри алгебри $A\tilde{G}(1,3)$, для яких "лінеаризуються" редуковані рівняння, одержані за їх допомогою.

Зауваження 3. Одержані результати легко узагальнюються на деякі двовимірні підалгебри з A^∞. Наприклад, розглянемо підалгебру з базисними елементами

$$Q_1 = E(t)\partial_1 + \dot{E}(t)\partial_{u_1} - \ddot{E}(t)x_1\partial_p, \quad Q_2 = F(t)\partial_2 + \dot{F}(t)\partial_{u_2} - \ddot{F}(t)x_2\partial_p, \tag{11}$$

де $E(t)$, $F(t)$ — деякі гладкі ненульові функції змінної t. Відповідний їй анзац має вигляд

$$\begin{aligned} &u^1 = v^1(\omega_1, \omega_2) + \dot{E}x_1/E, \quad u^2 = v^2(\omega_1, \omega_2) + \dot{F}x_2/F, \quad u^3 = v^3(\omega_1, \omega_2), \\ &p = q(\omega_1, \omega_2) - \frac{1}{2}\ddot{E}x_1^2/E - \frac{1}{2}\ddot{F}x_2^2/F, \end{aligned} \tag{12}$$

де інваріантні змінні $\omega_1 = t$ і $\omega_2 = x_3$. Підставимо анзац (12) у рівняння (1) і проробимо з одержаною системою обчислення, аналогічні наведеним вище для системи 1°. Тут ми випишемо лише кінцевий вираз для розв'язку рівнянь НС (1), одержаний за допомогою анзацу (12)

$$u^1 = (\varphi^1(\tau, z) + \dot{E}(t)x_1)/E(t), \quad u^2 = (\varphi^2(\tau, z) + \dot{F}(t)x_2)/F(t),$$
$$u^3 = -(\dot{E}(t)/E(t) + \dot{F}(t)/F(t))x_3, \quad p = \frac{1}{2}\ddot{E}(t)x_1^2/E(t) - \frac{1}{2}\ddot{F}(t)x_2^2/F(t) +$$
$$+ \frac{x_3^2}{2}((\ddot{E}(t) - 2\dot{E}(t))/E^2(t) + (\ddot{F}(t) - 2\dot{F}^2(t))/F^2(t)),$$

де $\tau = \int E^2(t)F^2(t)dt$, $z = E(t)F(t)x_3$.

1. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963, 244 с.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики, 1983, 4–23.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Lloyd S.P., The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations, *Acta Mechanica*, 1981, **38**, 85–98.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Slavutsky S.L., Reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**, № 4, 971–986.
6. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук. думка, 1991, 304 с.