

Условная инвариантность нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Установлена условная инвариантность нелинейного волнового уравнения относительно бесконечномерной, конформной и Пуанкаре алгебр.

Введение. Рассмотрим уравнение

$$u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u] = F(x, u, u_1), \quad (1)$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, \mathbf{x}) \in R_{1+n}$, f и F гладкие функции своих аргументов, $f(u) > 0$, $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, $u_\mu = \partial u / \partial x_\mu$, $u_{00} = \partial^2 u / \partial x_0^2$, $\mu = \overline{0, n}$.

Уравнение (1) используется для описания нелинейных волновых процессов. В работе [1] методом Ли изучены групповые свойства уравнения (1) при $F = 0$. Бесконечная алгебра инвариантности уравнения (1) с дополнительным условием

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = m, \quad m = \text{const}. \quad (2)$$

при $f = 1$, $F = m = 0$, найдена в [2].

В настоящей работе исследована условная инвариантность (подробно об этом понятии см. [3–7] уравнения (1), а также лиевская инвариантность уравнения (2).

1. Симметрия уравнения (2). Изучим симметричные свойства уравнения (2) методом С. Ли (см., например, [8, 9]).

1. Рассмотрим сначала случай $m = 0$, т.е. уравнение

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Максимальной, в смысле С. Ли, группой инвариантности уравнения (3) является бесконечномерная группа $C^\infty(1, n) \times C^\infty$, порождаемая операторами

$$X = \{ -b_\mu [x_0^2 f(u) - x_a x_a] + 2x_\mu [b_0 x_0 f(u) - b_a x_a] + c_{00} x_\mu + c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \} \partial_\mu + \\ + \eta \left(-\frac{f'}{2f} x_0 \partial_0 + \partial_u \right), \quad (4)$$

где b_μ , c_{00} , $c_{\mu\nu}$, d_μ , η — произвольные гладкие функции аргумента u , $c_{a0} = c_{0a} f(u)$, $c_{ab} = -c_{ba}$; $\mu, \nu = \overline{0, n}$; $\mu \neq \nu$, $a, b = \overline{1, n}$.

Доказательство. Уравнение (3) заменой

$$y_0 = x_0 \sqrt{f(u)}, \quad y_a = x_a, \quad v = u \quad (5)$$

приводится к уравнению

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a} \frac{\partial v}{\partial y_a} = 0. \quad (6)$$

Инвариантность уравнения (6) относительно бесконечномерной группы установлена в § 1.2 из [7]. Используя эти результаты и замену (5), получаем формулы (4).

2. Пусть $m = 1$. Тогда имеем уравнение

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = 1. \quad (7)$$

Симметрия уравнения (7) существенно зависит от размерности пространства независимых переменных ($n = 1$ или $n \geq 2$). Рассмотрим эти случаи отдельно.

2.1. *Одномерный случай.* В этом случае $x = (x_0, x_1) \in R_2$ а уравнение (7) имеет вид

$$u_0^2 - f(u)u_1^2 = 1. \quad (8)$$

С помощью метода С. Ли [8, 9] доказываются следующие утверждения.

Теорема 2. *Максимальная алгебра инвариантности (МАИ) уравнения (8) задается следующими базисными элементами:*

$$\partial_0 = \partial/\partial x_0, \quad \partial_1 = \partial/\partial x_1, \quad (9)$$

если $f(u)$ — произвольная гладкая функция;

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_0\partial_0 + \frac{k+2}{2}x_1\partial_1 + u\partial_u, \quad (10)$$

если $f(u) = \lambda u^k$, (λ, k — произвольные постоянные).

Если $f(u) = z^{-2}$, где $z(u)$ — решение уравнения

$$z'' = \lambda_1 z, \quad \lambda_1 = \text{const}, \quad (11)$$

то уравнение (8) обладает самой широкой алгеброй инвариантности, состоящей из десяти операторов. Причем в зависимости от значений постоянной λ_1 возможны четыре неэквивалентных случая. Ниже мы приведем их в виде отдельных утверждений.

Теорема 3. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - u^{-2}u_1^2 = 1 \quad (12)$$

является конформная алгебра $AC(1, 2)$, базисные операторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} p_0 &= \partial_0, \quad p_1 = -u^{-1} \sin x_1 \partial_1 + \cos x_1 \partial_u, \quad p_2 = u^{-1} \cos x_1 \partial_1 + \sin x_1 \partial_u, \\ J_{01} &= x_0 p_1 + u \cos x_1 p_0, \quad J_{02} = x_0 p_2 + u \sin x_1 p_0, \quad J_{12} = \partial_1, \\ D &= x_0 \partial_0 + u \partial_u, \quad K_0 = 2x_0 D - (x_0^2 - u^2) p_0, \\ K_1 &= 2u \cos x_1 D + (x_0^2 - u^2) p_1, \quad K_2 = 2u \sin x_1 D + (x_0^2 - u^2) p_2, \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 4. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - e^{2u}u_1^2 = 1 \quad (14)$$

является конформная алгебра $AC(1, 2)$ с базисными операторами

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-u}(\operatorname{ch} x_0 \partial_0 - \operatorname{sh} x_0 \partial_u), \quad p_1 = \partial_1, \quad p_2 = e^{-u}(-\operatorname{sh} x_0 \partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \partial_u), \\ J_{01} &= e^u \operatorname{sh} x_0 p_1 + x_1 p_0, \quad J_{02} = \partial_0, \quad J_{12} = x_1 p_2 - e^u \operatorname{ch} x_0 p_1, \\ D &= x_1 \partial_1 + \partial_u, \quad K_0 = 2e^u \operatorname{sh} x_0 D + (x_1^2 + e^{2u}) p_0, \\ K_1 &= 2x_1 D - (x_1^2 + e^{2u}) p_1, \quad K_2 = 2e^u \operatorname{ch} x_0 D - (x_1^2 + e^{2u}) p_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 5. МАИ уравнения

$$u_0^2 - \operatorname{ch}^{-2} u u_1^2 = 1 \quad (16)$$

является алгебра Лоренца $AO(2, 3)$ с базисными операторами

$$\begin{aligned} Q_1 &= \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u \partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u \partial_1 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} u \partial_u, \\ Q_2 &= \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u \partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u \partial_1 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} u \partial_u, \\ Q_3 &= \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u \partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u \partial_1 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} u \partial_u, \\ Q_4 &= \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u \partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u \partial_1 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} u \partial_u, \\ Q_5 &= \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} u \partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} u \partial_u, \quad Q_6 = \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} u \partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} u \partial_u, \\ Q_7 &= \operatorname{sh} x_1 \operatorname{th} u \partial_1 - \operatorname{ch} x_1 \partial_u, \quad Q_8 = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{th} u \partial_1 - \operatorname{sh} x_1 \partial_u, \\ Q_9 &= \partial_0, \quad Q_{10} = \partial_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема 6. МАИ уравнения

$$u_0^2 - \cos^{-2} u u_1^2 = 1 \quad (18)$$

является алгебра Лоренца с базисными операторами вида (17), где x_0, x_1, u нужно заменить соответственно на ix_0, ix_1, iu .

Наличие широкой симметрии в уравнениях (12), (14), (16), (18) наводит на мысль, что эти уравнения могут быть локально эквивалентными уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y_1} \right)^2 = 1, \quad v = v(y_0, y_1), \quad (19)$$

МАИ которого является конформная алгебра $AC(1, 2)$ (см. [7], § 1.2). Действительно уравнения (12) и (14) приводятся к уравнению (19), если перейти к цилиндрическим координатам

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = u \cos x_1, \quad v = u \sin x_1 \quad (20)$$

и

$$y_0 = e^u \operatorname{sh} x_0, \quad y_1 = x_1, \quad v = e^u \operatorname{sh} x_0 \quad (21)$$

соответственно. Уравнение (16) приводится к уравнению (19) с помощью сферических координат

$$y_0 = e^{x_0} \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u, \quad y_1 = e^{x_0} \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u, \quad v = e^{x_0} \operatorname{sh} u. \quad (22)$$

Уравнение (18) приводится к уравнению (16), если в нем заменить (x_0, x_1, u) на (ix_0, ix_1, iu) .

2.2. *Многомерный случай.* При $n \geq 2$ уравнения (12), (16) и (18) не обладают симметричными свойствами, описанными в теоремах 3, 5, 6. Только уравнение (14), которое в многомерном случае имеет вид

$$u_0^2 - e^{2u}(\nabla u)^2 = 1, \quad (23)$$

конформно инвариантно. Как и предыдущие утверждения, методом С. Ли доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *МАИ уравнения (7) задается базисными операторами:*

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n} \quad (24)$$

если $f(u)$ — произвольная гладкая функция:

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad D = x_0 \partial_0 + \frac{k+2}{2} x_a \partial_a + u \partial_u, \quad (25)$$

если $f(u) = \lambda u^k$, (λ, k — произвольные постоянные);

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad D = x_0 \partial_0 + u \partial_u, \quad K_0 = 2x_0 D - (x_0^2 - u^2) \partial_0, \quad (26)$$

если $f(u) = e^{2u}$;

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-u}(\operatorname{ch} x_0 \partial_0 - \operatorname{sh} x_0 \partial_u), \quad p_a = \partial_a, \quad p_{n+1} = e^{-u}(-\operatorname{sh} x_0 \partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \partial_u), \\ J_{0a} &= e^u \operatorname{sh} x_0 p_a + x_a p_0, \quad J_{0n+1} = \partial_0, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \\ J_{an+1} &= x_a p_{n+1} - e^u \operatorname{ch} x_0 p_a, \quad D = x_a \partial_a + \partial_u, \\ K_0 &= 2e^u \operatorname{sh} x_0 D + (x^2 + e^{2u}) p_0, \quad K_a = 2x_a D - (x^2 + e^{2u}) p_a, \\ K_{n+1} &= 2e^u \operatorname{ch} x_0 D + (x^2 + e^{2u}) p_{n+1}, \end{aligned} \quad (27)$$

если $f(u) = e^{2u}$. Причем операторы (27) образуют конформную алгебру $AC(1, n+1)$.

Замечание 1. С помощью обобщенных цилиндрических координат

$$y_0 = e^u \operatorname{sh} x_0, \quad y_a = x_a, \quad v = e^u \operatorname{ch} x_0, \quad a = \overline{1, n} \quad (28)$$

уравнение (23) приводится к уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a} \frac{\partial v}{\partial y_a} = 1. \quad (29)$$

Замечание 2. Уравнение (2) $m \neq 0; 1$ локально эквивалентно уравнению (7). В этом нетрудно убедиться, если заменить в нем x на $x/\sqrt{m}$.

2. Условная нвариантность уравнения (1). Покажем, что симметрия уравнения (1) значительно расширяется, если его рассматривать в системе с дополнительным условием (2). Это означает, что уравнение (1) имеет подмножества решений, обладающие более широкой симметрией, чем все множество решений данного уравнения.

Теорема 8. *Уравнение (1), в котором $F(x, u, u_1) = 0$, при условии (3) инвариантно относительно бесконечномерной группы Ли $\tilde{P}_\infty(1, n)$, порождаемой операторами (4) при $b_\mu = 0$.*

Доказательство данной теоремы заключается в проверке выполнения условий [7]

$$\tilde{X}S \Big|_{\substack{S=0 \\ S_1=0}} = 0, \quad \tilde{X}S_1 \Big|_{S_1=0} = 0, \quad (30)$$

где

$$S = u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u], \quad S_1 = u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2, \quad (31)$$

$\tilde{X}$ — продолжение оператора (4).

Аналогично теореме 8 доказываются следующие утверждения.

Теорема 9. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(u^{-2}u_1) = -u^{-1} \quad (32)$$

при условии (12) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 2)$, базисными операторами которой являются операторы $p_0, p_1, p_2, J_{01}, J_{02}, J_{12}, D$, заданные формулами (13).

Теорема 10. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(u^{-2}u_1) = u^{-2}u_1 \operatorname{ctg} u_1 \quad (33)$$

при условии (12) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, 1)$, состоящей из операторов $p_0, p_1, J_{01}, D, K_0, K_1$ алгебры (13).

Теорема 11. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(\operatorname{ch}^{-2}uu_1) = 2\operatorname{sh}^{-1}2u \quad (34)$$

при условии (16) инвариантно относительно алгебры Лоренца $AO(2, 2)$, состоящей из операторов $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_9, Q_{10}$ алгебры (17).

Теорема 12. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(\operatorname{ch}^{-2}uu_1) = -(u_0 + \operatorname{th} u) \quad (35)$$

при условии (16) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 2)$ с базисными элементами $Q_3 - Q_1, Q_4 - Q_2, Q_6 - Q_5, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}$ где $Q_1, \dots, Q_{10}$ — операторы алгебры (17).

Теорема 13. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(\cos^{-2}uu_1) = 2\sin^{-1}2u \quad (36)$$

при условии (18) инвариантно относительно алгебры Лоренца с базисными операторами $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_9, Q_{10}$ алгебры (17), в которых вместо (x_0, x_1, u) необходимо положить (ix_0, ix_1, iu) .

В уравнениях (32)–(36) функция u зависит от двух переменных (x_0, x_1) . Для многомерного уравнения (1) справедливы следующие результаты.

Теорема 14. Уравнение

$$u_{00} - \nabla(e^{2u}\nabla u) = 0 \quad (37)$$

при условии (28) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\bar{P}(1, n+1)$ с базисными элементами $p_0, p_a, p_{n+1}, J_{0a}, J_{0n+1}, J_{ab}, J_{an+1}, D$, заданными формулами (27).

Теорема 15. Уравнение

$$u_{00} - \nabla(e^{2u}\nabla u) = n(u_0 \operatorname{th} x_0 + 1) \quad (38)$$

при условии (28) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n)$ с базисными операторами $p_0, p_a, J_{0a}, J_{ab}, D, K_0, K_a$ алгебры (27).

Замечание 3. Наличие бесконечномерной алгебры инвариантности в уравнения

$$u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u] = 0 \quad (39)$$

при условии (3) позволяет получить следующую формулу разложения решений. Если $u = W(x_0, x)$ — решение системы уравнений (3), (39), то

$$\Phi(u) = \tau(x_0 f^{1/2}(u), \mathbf{x}) \quad (40)$$

— также решение данной системы при произвольной гладкой функции $\Phi(u)$, где функция $\tau(y_0, x)$ находится из уравнения

$$\tau = W(y_0 f^{-1/2}(\tau), \mathbf{x}), \quad (41)$$

а $y_0 = x_0 f^{1/2}(u)$.

Например, $u = (\alpha\mathbf{x})^{-1}(\alpha_0 x_0 - 1)$ — решение системы (3), (39) при $\alpha_0^2 = \alpha^2$ и $f(u) = u^{-2}$. Из уравнения $\tau = (\alpha\mathbf{x})^{-1}(\alpha_0 y_0 \tau - 1)$ находим $\tau = (\alpha_0 x_0 - \alpha\mathbf{x})^{-1}$. Тогда $\Phi(u) = u(\alpha_0 x_0 - u\mathbf{d}\mathbf{x})^{-1}$ или $\varphi(u) = \alpha_0 x_0 - u\mathbf{d}\mathbf{x}$ — решение системы уравнений (3), (39) ($f(u) = u^{-2}$) при произвольной гладкой функции $\varphi(u)$.

1. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *J. Non-Linear Mechanics*, 1981, **16**, № 5–6, 439–447.
2. Шульга М.В., Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
3. Фушич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
4. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фушич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 9, 17–20.
6. Фушич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 10, 28–33.
7. Фушич В.И., Штельен В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
9. Olver P., Application of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986, 497 p.