Точные решения некоторых уравнений газовой динамики и нелинейной акустики

В.И. ФУЩИЧ, В.К. РЕПЕТА

New non-Lie ansätze used to construct exact solutions of some gas dynamics equations and nonlinear acoustics equations are suggested.

Предложены анзацы, с помощью которых построены некоторые классы точных решений уравнений газовой динамики: Линя–Рейснера–Циня и “коротких волн”, а также нелинейной акустики.

1. Для описания нестационарных потенциальных течений газа с околозвуковыми скоростями используется уравнение Линя–Рейснера–Циня [1]

$$2u_{01} + u_1 u_{11} - u_{22} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, x_1, x_2) \in R^3$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, 2}$.

В работе [2] показано, что локальная группа симметрии уравнения (1) бесконечномерна и порождается операторами

$$\begin{gathered}
X_1 = 2x_0\partial_0 + x_2\partial_2 - 2u\partial_u, \quad X_2 = h(x_0)\partial_u, \quad X_3 = m(x_0)x_2\partial_u, \\
X_4 = \gamma\partial_1 + \left[2\dot\gamma x_1 + 2\ddot\gamma x_2^2\right]\partial_u, \quad X_5 = \dot\beta x_2\partial_1 + \beta\partial_2 + \left[2\ddot\beta x_1 x_2 + \frac{2}{3}\dddot\beta x_2^3\right]\partial_u, \\
X_6 = 3\alpha x_0\partial_0 + \left[\dot\alpha x_1 + \ddot\alpha x_2^2\right]\partial_1 + 2\dot\alpha x_2\partial_2 + \\
+ \left[-\alpha u + \ddot\alpha x_1^2 + 2\dddot\alpha x_1 x_2^2 + \frac{\alpha^{(4)}}{3} x_2^4\right]\partial_u.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$, $\gamma(x_0)$, $m(x_0)$, $h(x_0)$ — произвольные функции от x_0.

Решения уравнения (1) будем искать в виде

$$\text{а)}\quad u = \int \varphi^1(x_1, x_2)dx_1 + \varphi^2(x_0, x_2) + \varphi^3(x_0, x_2)x_1, \tag{3}$$

$$\text{б)}\quad u = v^1(x_0, x_2) + v^2(x_0, x_2)\varphi(\omega), \quad \omega = v^3(x_0, x_2)x_1 + v^4(x_0, x_2). \tag{4}$$

Подставляя анзац (3) в уравнение (1), получаем

$$\varphi^2_{22} = 2\varphi^3_0 + \varphi^1\varphi^1_1 - \int \varphi^1_{22}dx_1 + \varphi^3\varphi^1_1 - \varphi^3_{22}x_1. \tag{5}$$

Наложим на φ дополнительные условия

$$\varphi^1_{22} - (\varphi^1\varphi^1_1)_1 = \lambda, \tag{6}$$

$$\varphi^3\varphi^1_{11} - \varphi^3_{22} = \lambda \quad (\lambda = \text{const}). \tag{7}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 8, С. 39–45.

Тогда правая часть уравнения (5) является функцией только двух переменных x_0 и x_2.

В работе [3], используя условную симметрию [4, 5], построены точные решения нелинейного волнового уравнения (6) при $\lambda = 0$. Обобщая результаты [3] на случай произвольного значения параметра λ, приходим к следующим решениям уравнения (6):

$\lambda = 0$

$$\begin{gathered}\varphi^1 = W(x_2)x_1^2 + \Lambda(x_2), \quad \varphi^1 = 1 + \sqrt{1 + 2(x_1 - x_2)},\\ \varphi^1 = \frac{1}{2}\left(x_2^2 - 2x_1 + x_2\left(x_2^2 - 4x_1\right)^{1/2}\right), \quad \varphi^1 = x_2 x_1^{1/2},\\ \varphi^1 = x_1^2 x_2^{-2} + x_1^{1/2}\left(a_1 x_2^{5/2} + a_2 x_2^{-3/2}\right);\end{gathered} \tag{8}$$

$\lambda \in R^1$

$$\varphi^1 = x_1 x_2 + \frac{x_2^4}{12} + \frac{\lambda x_2^2}{4} + a_1 x_2 + a_2,$$

$$\varphi^1 = x_1^2 x_2^{-2} + 3a_1 x_2^3 x_1 + \frac{a_1^2 x_2^8}{6} + a_2 x_2^{-1} + a_3 x_2^2 + \frac{\lambda}{3} x_2^2 \ln x_2.$$

Решения уравнения (7), соответствующее (8), имеют вид

$\lambda = 0$

$$\varphi^3 = \Lambda(x_2), \quad \varphi^3 = 0;$$

$\lambda \in R^1$

$$\begin{gathered}\varphi^3 = \frac{\lambda}{2} x_2^2 + b(x_0)x_2 + c(x_0),\\ \varphi^3 = b_1(x_0)x_2^2 + b_2(x_0)x_2^{-1} + \frac{\lambda}{3} x_2(\ln x_2 - 1).\end{gathered} \tag{9}$$

Проинтегрировав уравнение (5) с учетом (8), (9) и подставив значения функций φ^1, φ^2, φ^3 в (3), получим точные решения уравнения

$$\begin{aligned}
&u = W(x_2)\frac{x_1^3}{3} + 2\Lambda(x_2)x_1 + H,\\
&u = \frac{x_1^3 x_2^{-2}}{3} + \frac{2}{3}x_1^{3/2}\left(a_1 x_2^{5/2} + a_2 x_2^{-3/2}\right) + \frac{a_1^2}{84}x_2^7 + \frac{a_2^2}{4}x_2^{-1} + \frac{a_1 a_2}{6}x_2^3 + H,\\
&u = x_1 + \frac{1}{3}[1 + 2(x_1 - x_2)]^{3/2} - \frac{x_2^2}{2} + H, \quad u = \lambda x_2 x_1^{3/2} + \frac{3}{48}\lambda^2 x_2^4 + H,\\
&u = -\frac{x_2^4}{12} + \frac{1}{2}\left[x_1 x_2^2 - x_1^2 - \frac{x_2}{6}\left(x_2^2 - 4x_1\right)^{3/2}\right] + H,\\
&u = \frac{x_1^2 x_2}{2} + x_1\left[\frac{x_2^4}{12} + (a_1 - b)x_2 + a_2 - c\right] + \frac{x_2^7}{504} +\\
&\quad + (a_1 - b)\frac{x_2^4}{12} + \frac{1}{6}(a_2 - c - 2\dot{b})x_2^3 - \dot{c}x_2^3 + H,\\
&u = \frac{1}{3}x_1^3 x_2^{-2} + \frac{3}{2}a_1 x_1^2 x_2^3 + x_1\left[\frac{a_1^2}{6}x_2^8 + (a_2 - b_2)x_2^{-1} + (a_3 + b_1)x_2^2\right] +\\
&\quad + \frac{a_1}{2}\left[\frac{a_1^2}{156}x_2^{13} + \frac{a_3 + b_1}{7}x_2^7\right] + \frac{2\dot{b}_2 + 3a_1(b_2 + a_2)}{12}x_2^4 +\\
&\quad + 2\dot{b}_2 x_2(\ln x_2 - 1) + H.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $W(x_2)$ — функция Вейерштрасса, т.е. решение уравнения $W'' = 6W^2$; $\Lambda(x_2)$ — решение уравнения Ламе $\Lambda'' = 2W\Lambda$; $H = h^1(x_0)x_2 + h^2(x_0)$; a, b, c, b_1, b_2, h^1, h^2 — произвольные функции от x_0. Точкой обозначено дифференцирование по x_0.

Во втором случае, подставляя анзац (4) в уравнение (1), придет к соотношению

$$\ddot{\varphi}\left[2v^2v^3\left(v_0^3x_1+v_0^4\right)-v^2\left(v_2^3x_1+v_2^4\right)^2\right]+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(v^2)^2(v^3)^3-v_{22}^1-\varphi v_{22}^2+ \\ +\dot{\varphi}\left[2(v^2v^3)_0-2v_2^2(v_2^3x_1+v_2^4)-v^2(v_{22}^3x_1+v_{22}^4)\right]=0. \tag{11}$$

При некоторых условиях на функции v^i, $i=\overline{1,4}$ (11) сводится обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) для $\varphi(\omega)$. Рассмотрим несколько случаев:

Случай 1.

$$v^2=v^3=1,\quad 2v_0^4-(v_2^4)^2=\lambda,\quad v_{22}^4=0,\quad v_{22}^1=\lambda_1,\quad \lambda_1\neq 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) при выполнении (12) будет иметь вид

$$\ddot{\varphi}\lambda+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-\lambda_1=0. \tag{13}$$

Решая (12) и (13), получаем точное решение уравнения (1)

$$u=\frac{\lambda_1}{2}x_2^2\pm\frac{1}{3\lambda_1}[\lambda_2+2(\lambda_1\omega+\lambda_2)]^{3/2}-\lambda\omega+H, \tag{14}$$

где $\omega = x_1 + x_0\frac{\lambda+(\lambda_2)^2}{2} + \lambda_2 x_2$, λ_2 — произвольная константа.

Случай 2. Положим в (11) $\varphi=\omega^{3/2}$. Тогда функции v^i, $i=\overline{1,4}$ удовлетворяют системе уравнений

$$v_{22}^2=0,\quad 2v_0^4-(v_2^4)^2=0,\quad v_{22}^1=\frac{9}{8}(v^2)^2,\quad 2v_0^2-2v_2^2v_2^4-v^2v_{22}^4=0. \tag{15}$$

Решая систему уравнений (15), по формуле (4) получаем решения уравнения (1)

$$u=\frac{3}{32}\frac{(g^1x_2+g^2)^4}{(g^1)^2}+(g^1x_2+g^2)\omega^{3/2}+H, \tag{16}$$

где функции g^1, g^2 и ω принимают вид

1) $g^1=\lambda_1x_0^{-3/2},\quad g^2=\lambda_2x_0^{-2},\quad \omega=x_1-\dfrac{x_2^2}{2x_0},$

2) $g^1=\mathrm{const},\quad g^2=-g^1x_0+\lambda_3,\quad \omega=x_1+\dfrac{x_0}{2}-x_0.$

Полученные результаты обобщаются на уравнение $2u_{01}+u_1u_{11}-u_{22}-u_{33}=0$. Для этого в формулах (10), (14), (16) необходимо x_2 заменить на $\alpha_1x_2+\alpha_2x_3$ $(\alpha_1^2+\alpha_2^2=1)$.

Замечание 1. Решения уравнения (1) можно размножить с помощью операторов (2). Формула размножения, построенная по операторам X_1–X_5 для известного решения $u=f(x_0,x_1,x_2)$, имеет вид

$$u=\theta_1^2f(\theta_1^2x_0,\gamma\theta_3+x_2\theta_4+x_1,\theta_1(x_2+\beta\theta_4))-\theta_2m(x_2+\beta\theta_1)-h\theta_5- \\ -\theta_3\left[2\dot{\gamma}(x_2\theta_4+x_1)+2\ddot{\gamma}(x_2+\beta\theta_4)^2\right]-2\ddot{\beta}x_1x_2\theta_4-\frac{2}{3}\dddot{\beta}\,x_2^2\theta_4,$$

где θ_i — групповые параметры, $i=\overline{1,5}$.

Укажем формулы размножения для некоторых конкретных значений функции $\alpha(x_0)$

$\alpha = \mathrm{const}$

$$u = (x_0 + \theta, x_1, x_2);$$

$\alpha = x_0$

$$u = \theta^2 f(\theta^3 x_0, \theta x_1, \theta^2 x_2),$$

$\alpha = x_0^n$, $n \neq 0;\ 1$

$$u = f\left((qa+p)^{1/(1-n)}, (qa+p)^{n/q}\left(x_1^{-n/p} - \frac{b_1}{q}F(-1)\right),\right.$$
$$\left. x_2\left(\frac{q}{p}a+1\right)^{2n/q}\right)(qa+p)^{n/q} + \frac{1}{q}\left(n(n-1)b_2F(-1) -\right.$$
$$\left. - b_1b_2nF(-2) + b_1^2F(-3)\left[\frac{n}{3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\right]\right)p^{-n/q},$$

где $q = 3(1-n)$, $p = x_0^{1-n}$, $b_1 = n(n-1)x_1^2p$, $b_2 = x_1x_0^{-n/q} + \frac{b_1}{qp}$, $F(k) = (qa+p)^k - p^k$; θ, a — групповые параметры.

2. В теории "коротких волн" в газовой динамике используется система уравнений

$$\begin{aligned} &w_2 - 2v_1 - 2(v - x_1)v_1 - 2kv = 0,\\ &v_2 + w_1 = 0, \quad (k = 0;\ 1), \end{aligned} \tag{17}$$

которая представляет собой некоторую аппроксимацию уравнений введенную в работе [6].

Замена $w = u_2$, $v = -u_1$ сводит (17) к уравнению

$$2u_{01} - 2(x_1 + u_1)u_{11} + u_{22} + 2ku_1 = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18), также как и система (17), допускает бесконечную группу точечных преобразований [7, 8].

Для отыскания решений уравнения (18) используем анзацы вид (4) и

$$u = x_1^{3/2}\varphi^1(x_0, x_2) + x_1^2\varphi^2(x_0, x_2) + \varphi^3(x_0, x_2). \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнение (18), получим

$$x_1^{3/2}\varphi_{22}^1 + x_1^2\varphi_{22}^2 + x_1^{1/2}\left(\varphi_0^1 - \varphi^1\left(3\varphi^2 - k + \frac{1}{2}\right)\right) +$$
$$+ x_1\left(\varphi_0^2 - 2(\varphi^2)^2 - \varphi^2(1-k)\right) + \varphi_{22}^3 - \frac{9}{4}(\varphi^1)^2 = 0.$$

Итак, уравнение (18) при помощи анзаца (18) редуцируется к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_{22}^1 = \varphi_{22}^1 = 0, \quad \varphi_{22}^3 = \frac{9}{4}(\varphi^1)^2,\\ &\varphi_0^1 = \varphi^1\left[3\varphi^2 - k + \frac{1}{2}\right], \quad \varphi_0^2 = 2(\varphi^2)^2 + \varphi^2(1-k). \end{aligned} \tag{20}$$

Интегрируя (20) и подставляя полученные значения функций φ^1, φ^2, φ^3 в (19), получаем точные решения уравнения (18)

$k=0$

$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0}(c_1x_2+c_2) - \frac{x_1^2}{2} + e^{-2x_0}H_1, \quad u = x_1^{3/2}e^{x_0/2}(c_1x_2+c_2) + e^{x_0}H_1,$$
$$u = x_1^{3/2}e^{x_0/2}(1-2ce^{x_0})^{-3/2}(c_1x_2+c_2) + \\ + x_1^2e^{x_0}c(1-2ce^{x_0})^{-1} + e^{x_0}(1-2ce^{x_0})^{-3}H_1,$$

$k=1$

$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0/2}(c_1x_2+c_2) + e^{-x_0}H_1,$$
$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0/2}(2x_0+c)^{-3/2}(c_1x_2+c_2) - \frac{x_1^2}{2x_0+c} + e^{-x_0}H_1.$$

Здесь c, c_1, c_2 — произвольные постоянные; $H_1 = \frac{3}{16c_1^2}(c_1x_2+c_2)^4 + h^3(x_0)x_2 + h^4(x_0)$; $h^3(x_0)$, $h^4(x_0)$ — произвольные функции.

Анзац (4) при $v^2 = \mathrm{const}$, $v^3 = \mathrm{const}$ (не ограничивая общности можно положить $v^2 = v^3 = 1$) приводит уравнение (18) к виду

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2\left[x_1 - v_0^4 - \frac{(v_2^4)^2}{2}\right]\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}[2k + v_{22}^4] - v_{22}^1 = 0. \tag{21}$$

Требуя, чтобы (21) сводилось к ОДУ для $\varphi(w)$, получаем на функции v^1 и v^2 систему уравнений

$$v_{22}^1 = \lambda_1, \quad v_0^4 + \frac{(v_2^4)^2}{2} + v^4 = \lambda, \quad v_{22}^4 = -2k + \lambda_2, \tag{22}$$

где λ, λ_1, λ_2 — постоянные.

При условии (22) уравнение (21) принимает вид

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\varphi}(\omega - \lambda) - \dot{\varphi}\lambda_2 - \lambda_1 = 0. \tag{23}$$

Система уравнений (22) имеет решения

$\lambda_2 = 2k$

$$v^4 = e^{-x_0}(\lambda_3x_2+\lambda_4) + \frac{\lambda_3^2}{2}e^{-2x_0} + \lambda, \quad v^1 = \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + H;$$

$\lambda_2 = 2k-1$

$$v^4 = -\frac{x_2^2}{2} + \lambda_3e^{-x_0} + \lambda_4x_2 - \frac{\lambda_4^2}{2}, \quad v^1 = \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + H.$$

Таким образом, в первом случае

$$w = x_1 + e^{-x_0}(\lambda_3x_2+\lambda_4) + \frac{\lambda_3^2}{2}e^{-2x_0} + \lambda, \tag{24}$$

а во втором

$$w = x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \lambda_3e^{-x_0} + \lambda_4x_2\frac{\lambda_4^2}{2} + \lambda. \tag{25}$$

Решения уравнения (23) представляются в параметрическом виде

$\lambda_2 = 0$:

$$\varphi = c_3 e^{2t/\lambda_1}\left(\frac{2t}{\lambda_1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(-t^2 - \lambda_5 + \lambda\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right),$$

$$w = \frac{2c_3}{\lambda_1}e^t - t + \lambda - \frac{\lambda_1}{2};$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\varphi = (-t+\lambda_1)^{-2}\left(c_3(2t-\lambda_1) - \frac{t^4}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 t^3 - t^2(\lambda_5 + \lambda\lambda_1)\right],$$

$$\omega = (-t+\lambda_1)^{-2}\left[c_3 - \frac{2}{3}t^3 + t^2(\lambda+\lambda_1) - 2t\lambda\lambda_1 - \lambda_1\lambda_5\right]; \tag{26}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\varphi = t^2\left(4c_3 - \frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda_1}{4}t - \frac{1}{4}(4\lambda_1 c_3 + \lambda\lambda_1 + \lambda_4) + \frac{1}{8}(4t^2 - \lambda_1^2)\ln(2t+\lambda_1),$$

$$w = t(8c_3 - 1) + \frac{1}{2}(2t+\lambda_1)\ln(2t+\lambda_1)\ln(2t+\lambda_1) + \lambda + 4\lambda_1 c_3;$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\varphi = c_3(t+\lambda_1)^2(2t-\lambda_1) - t^2 + \frac{1}{3}(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_5),$$

$$w = 3c_3(t+\lambda_1)^2 - 2t + \lambda - \lambda_1.$$

Подставляя (24)–(26) в (4), получим точные решения уравнения (18).

3. Построим новые решения, отличные от [3], уравнения нелинейной акустики

$$u_{00} - (uu_1)_1 = 0. \tag{27}$$

Следуя [3–5, 9], можно показать, что уравнение (27) Q-условно инвариантно относительно операторов

$$Q_1 = \partial_0 - 2x_0\partial_1 + 8x_0\partial_0,$$

$$Q_2 = x_0\partial_0 - \left(6x_0^5 + x_1\right)\partial_1 + 2\left[u - 3\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2x_1x_0^3 - 24x_0^8\right)\right]\partial_u,$$

$$Q_3 = 2x_0\partial_0 + \left(x_1 - 3x_0^2\right)\partial_1 - 2\left(u + 3x_1 - 9x_0^2\right)\partial_u,$$

$$Q_4 = 2W\partial_0 + \dot{W}x_1\partial_1 - \dot{W}\left[2u - Wx_1^2\right]\partial_u,$$

$$Q_5 = x_0\partial_0 - 3x_0^2\partial_1 + \left[u + 27x_0^4\right]\partial_u.$$

Здесь $W(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{W} = W^2$.

Используя операторы Q_1–Q_5 находим анзацы

$$u = 4x_0^2 + \varphi(w), \quad w = x_1 + x_0^2,$$

$$u = 30x_0^2\varphi(w) + \left(\frac{x_1}{x_0} + bx_0^4\right)^2, \quad w = x_0\left(x_1 + x_0^5\right),$$

$$u = -2\left(x_0^2 - x_1\right) + x_0^{-1}\varphi(w), \quad w = x_0^{-1/2}\left(x_1 + x_0^2\right), \tag{28}$$

$$u = W^{-1}\varphi(w) + \frac{1}{6}Wx_1^2, \quad w = W^{-1/2}x_1,$$

$$u = 9x_0^4 + x_1\varphi(w), \quad w = x_1 + x_0^3,$$

которые редуцируют уравнение (27) к ОДУ

$$
\begin{gathered}
2\varphi-\varphi\dot{\varphi}+8w=0, \quad \varphi\dot{\varphi}-\varphi-2w-\lambda=0, \\
\dot{\varphi}^2+\ddot{\varphi}\left(\varphi-\frac{w^2}{4}\right)-\frac{7}{4}w\dot{\varphi}-2\varphi=0, \\
\dot{\varphi}^2+\ddot{\varphi}\varphi-\frac{\lambda}{2}[\ddot{\varphi}w^2+7w\dot{\varphi}+8\varphi]=0, \quad \dot{\varphi}^2+\ddot{\varphi}\varphi-12\varphi-108w+\lambda=0.
\end{gathered} \tag{29}
$$

Решая уравнения (29) и используя формулы (28), находим точные решения уравнения (27). Приведем некоторые из них

$$
\begin{gathered}
\left[u-4\left(x_1+2x_0^2\right)\right]^2\left(u+2\left(x_1-x_0^2\right)\right)=c, \\
\left(\frac{u}{6x_0}-3x_1-\frac{9}{2}x_0^3\right)^3\left(\frac{u}{6x_0}-\frac{x_0^2}{2}+x_1\right)=c, \\
\left(u-\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2-72x_1x_0^3-96x_0^8-30\lambda x_0^2\right)^2\times \\
\times\left(u-\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2+18x_1x_0^3-6x_0^8+15\lambda x_0^2\right)=cx_0^4
\end{gathered} \tag{30}
$$

(c, λ — произвольные постоянные).

Известно, что заменой $v=u^{1/2}$ уравнение (27) приводится к уравнению $v_{11}-\left(v^{-1/2}v_0\right)_0=0$.

Таким образом, меняя в (30) местами x_1 и x_0, и заменяя u на $u^{1/2}$, получим точные решения уравнения $u_{00}-\left(u^{-1/2}u_1\right)_1=0$.

Замечание 2. Операторы Q_2–Q_4 впервые были найдены при изучении условной симметрии уравнения Буссинеска в работе [9].

Замечание 3. Отметим, что анзац $u=9x_0^4+12x_0\varphi\left(x_1+x_0^2\right)$ редуцирует уравнение $u_{00}=uu_{11}$ к ОДУ $\varphi\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}=\frac{3}{4}$.

1. Lin C.C. Reissner E. Tslen H.S., Non-steady motion of a slender body in a compressible fluid, *J. of Math. and Phys.*, 1948, **27**, № 3.
2. Мамонтов Е.В., Некоторые вопросы теории нестационарных околозвуковых течений, *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, 1969, 61–75.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 5, 29–34.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И.. Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
6. Рыжов О.С., Христанович С.А., О нелинейном отражении слабых ударных волн, *Прикл. математика и механика*, 1958, **22**, № 3, 586–599.
7. Кухарчик П., Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике, *Бюллетень Польской АН, Сер. техн. наук*, 1965, **13**, № 5, 469–477.
8. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
9. Фушич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска, в сб. Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 96–103.