W.I. Fushchych, Scientific Works 2002, Vol. 4, 258–266.

Качественный анализ семейств ограниченных решений многомерного нелинейного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.О. ПАРАСЮК

Установлено существование семейств ограниченных по пространственным переменным решений нелинейного многомерного уравнения Шредингера, а также изучены их асимптотические свойства. Исследование включает два этапа. Вначале исходное уравнение с помощью анзацев специального вида редуцируется к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проводится качественный анализ каждого такого уравнения.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1].

Рассмотрим многомерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t\Psi + 1/(2m)\Delta\Psi + \lambda|\Psi|^k\Psi = 0, \tag{1}$$

где $\Psi : R_t \times R^n_x \to \mathbb{C}$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n}(\partial_{x_j})^2$, $m > 0$, $k > 0$, $\lambda \in R$. В [1] это уравнение изучалось в случае, когда $k = 4/n, n = 3$ (при таком k уравнение (1) обладает наиболее широкой группой симметрии [2, 3]). В настоящей работе, следуя [1], изучим ограниченные решения уравнения (1) при произвольном n и более широком диапазоне значений k. Для этой цели с помощью анзацев [2, 3] редуцируем уравнение (1) к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проведем качественный анализ этих уравнений.

1. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-1/k}z(\tau)$, где $\tau = t^{-1/2}\alpha\cdot x$ (здесь и в дальнейшем $\alpha \in R^n$, $\alpha^2 = 1$), редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} - im\tau\dot{z} - 2imk^{-1}z + a|z|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Если $k \neq 4$, то уравнение (2) имеет семейство решений $z = Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau,c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau,c) = Z(\tau,c) \quad \text{и} \quad Z(\tau,c) = O\left(\tau^{-|1/2-2/k|-1/2}\right), \quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение более общего вида чем (2):

$$\ddot{z} \pm im\tau\dot{z} + imbz + a|z|^k z = 0, \quad b \in R. \tag{3}$$

Сделаем замену независимой переменной $s = \tau^2/2$:

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\pm im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} + \frac{imb}{2s}z + \frac{a}{2s}|z|^k z = 0.$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 6, С. 821–828.

Выполнив подстановку

$$z = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\pm im + \frac{1}{2s}\right)ds\right)v = s^{-1/4}\exp(\pm ims/2)v,$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im}{2s} + \left(b \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16s^2}\right)v + \frac{a}{2s^{1+k/4}}|v|^k v = 0. \tag{4}$$

Вначале исследуем линейное уравнение вида

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s} + \frac{3}{16s^2}\right)v = 0, \tag{5}$$

где $\nu = |b \pm 1/2|/2$. Для него $s = 0$ является регулярной особой точкой с определяющим уравнением $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$, которое имеет пару корней $\rho_1 = 1/4$ и $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения $v(s)$ уравнения (5) существует конечный предел

$$\lim_{s\to 0} s^{-1/4}v(s) < \infty. \tag{6}$$

Для исследования асимптотики решений (5) при $s \to \infty$ в соответствии с [4] рассмотрим уравнение

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s}\right) = 0.$$

Для его корней имеет место представление

$$\rho_\pm(s) = \pm i\sqrt{m^2/4 + im\nu/s} = \pm im/2 \pm \nu/s + O\left(s^{-2}\right).$$

Предположим, что $\nu \neq 0$. Тогда уравнение (5) имеет пару решений

$$v_\pm(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s}\rho_\pm(s_1)ds_1\right)(c_\pm + o(1)) = O\left(s^{\pm\nu}\rho\right), \tag{7}$$

вронскиан которых равен 1. Для этих решений выполняется условие (6). Очевидно, что аналогичный результат справедлив и в случае, когда $\nu = -|b \pm 1/2|/2$, поэтому полагаем $\nu > 0$.

Теперь задачу об ограниченных на полуоси $[0, \infty)$ решениях уравнения (4) сведем к интегральному уравнению

$$v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_0^s v_+(\theta)\theta^{-1-k/4}|v(\theta)|^k v(\theta)|d\theta\right) + \\ + \frac{a}{2}v_+(s)\int_s^\infty v_-(\theta)\theta^{-1-k/4}|v(\theta)|^k v(\theta)d\theta \stackrel{\text{def}}{=} A[v](s),$$

где c — комплексный параметр. Покажем, что оператор A на полном метрическом пространстве B_L непрерывных функций $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |f(s) - g(s)|$ таких, что

$$|f(s)| \le L\min\left(s^{1/4}, s^{-\nu}\right), \quad L > 0, \tag{8}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и L является оператором сжатия. Действительно. для любой $f \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_1 L^{k+1}\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+(k+1)/4}d\theta \le c_2 L^{k+1};$$

$$\int_1^\infty |v_+(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_3 L^{k+1}\int_1^\infty \theta^{\nu-1-k/4-(k+1)\nu}d\theta \le c_4 L^{k+1};$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_5 L^{k+1}\int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-(k+1)\nu}d\theta \le$$

$$\le c_6 L^{k+1}s^{-(k+2)\nu-k/4}, \quad s \ge 1,$$

следует оценка

$$|A[f](s)| \le c_7\left(|c| + L^{k+1}\right)\min\left(s^{1/4}, s^{-\nu}\right),$$

причем константа c_7 не зависит ни от $|c|$, ни от L. Значит, $A : B_L \to B_L$, как только малостью L и $|c|$ будет обеспечено выполнение условия $c_7\left(|c| + L^{k+1}\right) \le L$.

Выясним условия сжатия. Для любых $f, g \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le \int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}(|f(\theta)|^k f(\theta) - g(\theta)| + (|f(\theta)|^k - |g(\theta)|^k)|)d\theta \le$$

$$\le c_8 L^k\left(\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+k/4}d\theta\right)\rho(f,g) \le c_9 L^k \rho(f,g);$$

$$\int_1^s |v_+(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le c_{10}L^k\left(\int_1^s \theta^{\nu-1-k/4-k\nu}d\theta\right)\rho(f,g) \le$$

$$\le c_{11}L^k\left(s^{\nu-k/4-k\nu}+1\right)\rho(f,g), \quad s \ge 1;$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le c_{12}L^k\left(\int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-k\nu}d\theta\right)\rho(f,g) \le c_{13}L^k s^{-\nu-k/4-k\nu}, \quad s \ge 1,$$

следует оценка

$$\rho(A[f], A[g]) \le c_{14}L^k \rho(f,g)$$

причем c_{14} не зависит ни от c, ни от L. Выполнение условия сжатия $c_{14}L^k < 1$ также можно добиться малостью L.

Таким образом, уравнение (4) при условии $\nu = 0$, обладает семейством решений, зависящих от параметра c и удовлетворяющих условию (8).

Вернемся теперь к уравнению (2), которое соответствует (3) при $b = -2/k$ и знаке “$-$”. Для него $\nu = |1/2 - 2/k|/2 \ne 0$. Тогда, учитывая связь между v и z, получаем искомое семейство $z = Z(\tau, c)$. Утверждение доказано.

В случае $k = 4$ имеет место утверждение, аналогичное доказанному выше, с той лишь разницей, что семейство ограниченных на всей оси и убывающих на бесконечности с асимптотикой $O(\tau^{-1/2})$ решений будет зависеть от двух комплексных параметров.

2. Анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-1/k} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau), \quad \tau = t^{-1/2}\alpha \cdot x,$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + im\tau\dot{z} + im\left(n - \frac{2}{k}\right) z + a|z|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{9}$$

Утверждение 2. *Если $k \neq 4/(2n-1)$, то уравнение (9) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau, c) = Z(\tau, c); \quad Z(\tau, c) = O\left(\tau^{-|n-2/k-1/2|-1/2}\right).$$

Доказательство. Уравнение (9) имеет вид (3) при $b = n - 2/k$ в знаке "+". К нему применимо доказательство утверждения 1 для случая $\nu = |n-2/k-1/2|$, поскольку $\nu \neq 0$ в силу условия, наложенного на k. Утверждение доказано.

Случай $k = 4/(2n-1)$ аналогичен случаю $k = 4$ из предыдущего пункта.

3. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-n/2} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau)$, $\tau = t^{-1}\alpha \cdot x$, редуцирует (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + a|z|^{4/n} z = 0, \quad a = 2\lambda m,$$

которое исследовано в [1].

4. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-1/k} z(\tau)$, $\tau = t^{-1}x^2$, редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + (n/(2\tau) - im/2)\dot{z} - imz/(2k\tau) + a|z|^k z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Пусть $l_1(n) < k < l_2(n)$, где $l_1(n) = (2 - n + \sqrt{n^2 + 12n + 4})/(2n)$, а $l_2(n) = \infty$ при $n = 1, 2$ и $l_2(n) = 4/(n-2)$ при $n \geq 3$. Тогда уравнение (10) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а $Z(\tau, c)$ при фиксированном c является функцией класса $C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau \cdot \ddot{Z}(\tau, c) < \infty, \quad Z(\tau, c) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad \tau \to \infty,$$

где $\nu = \min(1/k, n/2 - 1/k)$.

Доказательство. Сначала исследуем линеаризованное уравнение, соответствующее (10) ($a = 0$). Справедлива такая лемма.

Лемма. *Уравнение*

$$\ddot{z} + (n/2\tau) - im/2)\dot{z} + imz/(2k\tau) = 0 \tag{11}$$

при выполнении условий утверждения 3 имеет фундаментальную систему решений $z_1(\tau)$ *и* $z_2(\tau)$*, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{\tau\to 0} z_1(\tau) = 1, \quad z_2(\tau) = (1+o(1))\int \tau^{-n/2}(1+o(1))d\tau, \quad \tau\to 0; \tag{12}$$

$$z_j(\tau) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad \dot z_j(\tau) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad j=1,2, \quad \tau\to\infty. \tag{13}$$

Вронскиан этих решений равен $\exp(im\tau/2)\tau^{-n/2}$.

Доказательство. Существование решения $z_1(\tau)$, удовлетворяющего (12), следует из того, что $\tau = 0$ — регулярная особая точка уравнения (11) с определяющим уравнением $\rho((\rho-1)+n/2) = 0$, откуда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1 - n/2$. Решение $z_2(\tau)$ и выражение для вронскиана получаются из формулы Остроградского–Лиувилля.

Для исследования асимптотики $z_j(\tau)$ при $\tau\to\infty$ выполним подстановку

$$z = \left(\exp\left(-\frac12\int\left(\frac{n}{2\tau} - \frac{im}{2}\right)d\tau\right)\right)v = \tau^{-n/4}\exp(im\tau/2)v. \tag{14}$$

Получим уравнение

$$\ddot v + \left(\frac{m^2}{16} + \frac{im}{2\tau}\left(\frac n4 - \frac1k\right) + \frac{4n-n^2}{16\tau^2}\right)v = 0. \tag{15}$$

Исследуется оно так же, как и (5). Если $k\neq 4/n$, то в этом случае $\rho_{1,2}(\tau) = 1 \mp im/4 \pm (n/4 - 1/k)\tau^{-1} + O\left(\tau^{-2}\right)$ и (15) имеет пару линейно независимых решений

$$v_{1,2}(\tau) = O\left(\tau^{\pm(n/4-1/k)}\right). \tag{16}$$

Если же $k = 4/n$, то (15) имеет пару решений с асимптотикой $v_{1,2}(\tau) = O(1)$, которая формально также удовлетворяет (16). Такую же асимптотику имеет $\dot v_{1,2}(\tau)$. В обоих случаях соответствующее решение $z_j(\tau)$ с учетом (14) удовлетворяет (13). Лемма доказана.

Задачу об ограниченных решениях уравнения (10) сведем к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\tau) = z_1(\tau)&\left(c + a\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\theta^{n/2-1}z_2(\theta)|z(\theta)|^k z(\theta)d\theta\right) - \\ &- az_2(\tau)\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\theta^{n/2-1}z_1(\theta)|z(\theta)|^k z(\theta)d\theta \overset{\text{def}}{=} A[z](\tau). \end{aligned} \tag{17}$$

Применим к (17) принцип сжимающих отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство B_L непрерывных функций $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$|f(\tau)| \le L\min\left(1,\tau^{-\nu}\right), \quad L > 0, \tag{18}$$

с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{\tau\in[0,\infty)} |f(\tau)-g(\tau)|$.

Покажем, что $A : B_L \to B_L$ при всех достаточно малых $|c|$ и L. Пусть $f \in B_L$. Тогда, учитывая (12), имеем

$$|A[f](\tau)| \le c_1 \left(|c| + L^{k+1} \int_0^\tau \theta^{n/2-1} \left(\int \theta^{-n/2} d\theta \right) d\theta + \right. \\ \left. + L^{k+1} \left(\int \tau^{-n/2} d\tau \right) \int_0^\tau \theta^{n/2-1} d\theta \right) \le c_2 \left(|c| + L^{k+1} \right), \quad \tau \in [0,1]. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что условия утверждения 3 гарантируют выполнение неравенства

$$n/2 - (k+2)\nu < 0. \tag{20}$$

А тогда, учитывая (13), имеем

$$|A[f](\tau)| \le c_3 \left(|c| + L^{k+1} \right) \tau^{-\nu} + c_4 \tau^{-\nu} L^{k+1} \int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+2)\nu} d\theta \le \\ \le c_5 \left(|c| + L^{k+1} \right) \tau^{-\nu}, \quad \tau \in (1, \infty). \tag{21}$$

(Здесь и ниже константы c_i не зависят ни от c, ни от L.) Значит, $A[f](\tau)$ будет удовлетворять условию (18), как только $c_5 \left(|c| + L^{k+1} \right) < L$.

Перейдем к исследованию условий сжатия. Для $f, g \in B_L$ получаются оценки

$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \le c_6 L^k \rho(f,g), \quad \tau \in [0,1];$$

$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \le c_7 \tau^{-\nu} L^k \left(1 + \int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+1)\nu} d\theta \right) \rho(f,g) \le \\ \le c_8 L^k \left(1 + \tau^{n/2-(k+2)\nu} \right) \rho(f,g) \le 2c_8 L^k \rho(f,g), \quad \tau \in (1,\infty),$$

на основании которых находим условие сжатия $\max(c_6, 2c_8) L^k < 1$. Из принципа сжимающих отображений следует существование решения $z(\tau) = Z(\tau, c)$ уравнения (17), удовлетворяющего условию (18).

Для того чтобы закончить доказательство, найдем из (17)

$$\dot z(\tau) = \frac{d}{d\tau} A[z](\tau) = \dot z_1(\tau) \left(c + a \int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_2(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta \right) - \\ - \dot z_2(\tau) \int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_1(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta. \tag{22}$$

С помощью формулы Остроградского–Лиувилля получаем $\dot z_2(\tau) = (1 + o(1)) z_2(\tau)$ $+ (1 + o(1)) \tau^{-n/2}$. А тогда с учетом представления

$$\int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_1(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta = \\ = \tau^{n/2} \int_0^1 \exp(-ims\tau/2) s^{n/2-1} z_1(s\tau) |z(s\tau)|^k z(s\tau) ds$$

и (22) заключаем, что $z(\tau) \in C^1[0, \infty)$.

Свойство для $\ddot Z(\tau, c)$ вытекает непосредственно из уравнения (10). Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n = 1$ при менее жестких ограничениях на параметр k фактически исследован в п. 1.

5. Анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-n/2} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau), \quad \tau = t^{-2}x^2,$$

редуцирует уравнение (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + n\dot{z}/(2\tau) + a|z|^{4/n} z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \tag{23}$$

Утверждение 4. *Если $n \geq 2$, $a > 0$, то уравнение (23) имеет семейство решений вида $z = \exp(i\theta) r(\tau, c)$, где θ, c — вещественные параметры, а $r(\tau, c)$ при фиксированном c является функцией класса $C^1[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$r(0,c) = c; \quad \lim_{\tau\to 0} \ddot{r}(\tau,c)\tau < \infty, \tag{24}$$

$$r(\tau,c) = \begin{cases} O(\tau^{-1/6}), & n = 2, \\ O(\tau^{-n/(2n+4)}), & n \geq 3, \end{cases} \qquad \tau \to \infty, \tag{25}$$

Доказательство. Подстановка $z = \exp(i\theta) r$ в (23) приводит к уравнению

$$\ddot{r} + n\dot{r}/(2\tau) + ar^{4/n+1/}\tau = 0. \tag{26}$$

Для того чтобы показать существование семейства решений (26), удовлетворяющих (24) при малых $\tau \geq 0$, следуя [5], запишем (26) в виде

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{r}\tau^{n/2}) = -a\tau^{n/2-1} r^{4/n+1}, \tag{26$'$}$$

откуда с учетом требования непрерывности $\dot{r}$ при $\tau = 0$ имеем представление

$$\dot{r}(\tau) = -a\tau^{-n/2} \left(\int_0^\tau \tau_2^{n/2-1} r^{4/n+1}(\tau_2) d\tau_2 \right).$$

Следовательно, искомое семейство удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(\tau) = c - a\int_0^\tau \tau_1^{-n/2} \int_0^{\tau_1} \tau_2^{n/2-1} r^{4/n+1}(\tau_2) d\tau_2.$$

При каждом фиксированном $c \in R$ локальная (при малых τ) разрешимость этого уравнения легко доказывается с помощью принципа сжимающих отображений.

Теперь докажем, что всякое решение из семейства $r(\tau, c)$ продолжимо на полуось $[0, \infty)$ и обладает асимптотикой (25). Заметим, что (26$'$) — это известное уравнение Эдмена–Фаулера. Его качественный анализ проведен, например, в [4]. К сожалению, в [4] не выписаны в явном виде формулы асимптотик в рассматриваемом здесь случае.

Пусть $n = 2$. Положим $\tau = e^s$, $r = \exp(-s/6)p$. Получим

$$\ddot{p}(1/3)\dot{p} + (1/36)p + ap^3 \exp(2s/3) = 0 \quad \left(\dot{p} = \frac{dp}{ds}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим функцию

$$V(s,p,\dot p)=\dot p^2/2+(1/72)p^2+(c/4)p^4\exp(2s/3).$$

В силу (27) имеем

$$\dot V=(2/3)\left(\dot p^2/2+(a/4)p^4\exp(2s/3)\right)\le(2/3)V.$$

Отсюда $V=O(\exp(2s/3))$ и $p=O(1)$ при $s\to\infty$. Значит, $r=O\left(\tau^{-1/6}\right)$.

Пусть $n\ge 3$. Положим $r=\tau^{(2-n)/2}p$. Получим

$$\ddot p+(4-n)\dot p/(2\tau)+a\tau^{4/n-3}p^{4/n+1}=0. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию

$$W(\tau,p,\dot p)=\dot p^2/2+a(4/n+2)^{-1}\tau^{4/n-3}p^4.$$

Ввиду (28) получим

$$\dot W=\tau^{-1}\left[(n-4)\dot p^2/2+a(4/n-3)(4/n+2)^{-1}\tau^{4/n-3}p^{4/n+2}\right]\le(n-4)\tau^{-1}W.$$

Отсюда $W=O\left(\tau^{n-4}\right)$. Следовательно,

$$p^{4/n+2}=O\left(\tau^{n-4}\right),\quad p=O\left(\tau^{(n^2-n-4)/(2n+4)}\right),$$
$$r=O\left(\tau^{(2-n)/2+(n^2-n-4)/(2n+4)}\right)=O\left(\tau^{-n/(2n+4)}\right).$$

Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n=1$ сводится к п. 3.

6. Анзац

$$\Psi(t,x)=(1-t^2)^{-n/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1-t^2}\right)z(\tau),\quad \tau=x^2/\left(1-t^2\right),$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot z+n\dot z/(2\tau)+m^2z+a|z|^{4/n}z/\tau=0,\quad a=\lambda m/2. \tag{29}$$

Утверждение 5. *Уравнение (29) имеет семейство решений $z=Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр и функция $Z(\tau,c)$ при фиксированном c принадлежит классу $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to0}\tau\ddot Z(\tau,c)<\infty,\quad Z(\tau,c)=\left(\tau^{-n/4}\right),\quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Линеаризованное уравнение (29) ($a=0$) обладает фундаментальной системой решений $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, удовлетворяющих условиям (12), (13) при $\nu=n/4$. Это утверждение, а также последующие рассуждения повторяют схему доказательства в п. 4. Соответствующее интегральное уравнение отличается от (17) лишь отсутствием экспонент под знаком интеграла. Осталось заметить, что неравенство (20) при $\nu=n/4$, $k=4/n$ выполняется.

1. Парасюк И.О., Фущич В.И., Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 10, 1344–1350.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 929–933.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
4. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 216 с.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 480 с.