Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики

В.И. ФУЩИЧ, П.И. МИРОНЮК

1. Рассматривается нелинейное уравнение

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} - f(u) = 0, \tag{1}$$

$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $f(u)$ — гладкая функция, частным случаем которого есть уравнение нелинейной акустики ограниченных звуковых пучков (уравнение Хохлова–Заболотской) [1]

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{1$'$}$$

Групповые свойства уравнения (1) описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Максимальной (в смисле Ли) группой инвариантности уравнения (1) при произвольной функции $f(u)$) есть 7-параметрическая группа — ядро основних групп (ЯОГ). Базисные оператори алгебры Ли ЯОГ имеют вид: $X_{j+1} = \partial_j$, $j = \overline{0,3}$, $X_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3$, $X_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2$, $X_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3$.*

Расширение ЯОГ возможно лишь при таких специализациях функции $f(u)$:

$$1)\ f(u) = \pm e^{ku}, \quad k \neq 0, \quad k = \text{const}.$$

К ЯОГ прибавляется оператор $X_8 = kx^l\partial_l + 2(x_0\partial_1 - \partial_u)$, $x^l = x_l$ (здесь и ниже по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 0 к 3, а по греческим — от 0 к 4).

$$2)\ f(u) = \pm(u^m)^k, \quad k \neq 0, \quad k, m = \text{const}.$$

К ЯОГ прибавляется оператор $X_8 = kx^l\partial_l + 2(mx_0 - x_1)\partial_1 - x_2\partial_2 - x_3\partial_3 - 2(u + m)\partial_u$.

$$3)\ f(u) = \lambda, \quad \lambda \in \{0; 1; -1\}$$

В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно бесконечноизмеримой алгебры Ли, базис которой можно задать в таком виде:

$$Y_{1,2} = 5\int p_{1,2}(x_0)\partial_0 + p_{1,2}(x_0)\left[\frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2\right)\partial_1 - x_1\partial_u\right] + \\ + p_{1,2}(x_0)\left[x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - \left(4u + \frac{3}{4}\lambda\left(x_2^2 + x_3^2\right)\right)\partial_u\right],$$

где $p_{1,2}$ — линейно независимые решения уравнения $p'' = \lambda p$,

$$\begin{aligned} &Y_3 = \partial_0, \quad Y_4 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad Y_5 = 2x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + 2u\partial_u, \\ &Y_6(A) = A'x_2\partial_1 + 2A\partial_2 - A''x_2\partial_u, \quad Y_7(B) = B'x_3\partial_1 + 2B\partial_3 - B''x_3\partial_u, \\ &Y_8(C) = C\partial_1 - C'\partial_u, \end{aligned} \tag{2}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 6, С. 23–29.

A, B, C — произвольные гладкие функции x_0, штрихами обозначены соответственные производные.

Заметим, что операторы Y_3, Y_4, $Y_6\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y_7\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y_8(1)$, $Y_6(x_0)$, $Y_7(x_0)$ дают ЯОГ.

В [2] построены операторы условной инвариантности и на их основании получены точные решения уравнения (1′) при дополнительном условии

$$u_0u_1 - uu_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \varkappa, \tag{3}$$

если $\varkappa = 0$.

Ниже исследуется условная инвариантность уравнения (1′) дополнительным условием (3) при $\varkappa = \pm 1$, а также рассматривается вопрос Q-условной инвариантности этого уравнения (о условной и Q-условной симметрии см. [3, 4]). При помощи операторов уссловной инвариантности проводится редукция уравнения (1′) к уравнению с меньшим числом независимых переменных, а также строятся точные решения этого уравнения.

2. Исследуем сначала симметрию дополнительного условия (3).

Теорема 2. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) при $\varkappa = 1$ — 21-параметрическая группа. Базисные операторы соответственной алгебры Ли имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&X_{\mu+1} = \partial_\mu,\ \mu = \overline{0,3}, \quad X_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad X_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2,\\
&X_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad X_8 = x_0\partial_1 - \partial_u, \quad X_9 = x_0x_2\partial_1 + \left(u + x_0^2\right)\partial_2 - x_2\partial_u,\\
&X_{10} = x_0x_3\partial_1 + \left(u + x_0^2\right)\partial_3 - x_3\partial_u, \quad X_{11} = \left(u - x_0^2\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u,\\
&X_{12} = x_0\partial_0 + \left(\frac{2}{3}x_0^3 - 2ux_0 - x_1\right)\partial_1 - 2x_0^2\partial_u,\\
&X_{13} = x_2\partial_0 + x_2\left(x_0^2 - u\right)\partial_1 + 2\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_2 - 2x_0x_2\partial_u,\\
&X_{14} = x_3\partial_0 + x_3\left(x_0^2 - u\right)\partial_1 + 2\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_3 - 2x_0x_3\partial_u,\\
&X_{15} = \left(u + x_0^2\right)\partial_0 - \left(2x_0x_1 + u^2 + 2ux_0^2 - \frac{1}{3}x_0^4\right)\partial_1 + 2\left(x_1 - \frac{2}{3}x_0^3\right)\partial_u,\\
&X_{16} = \left(2x_1 + ux_0 - \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + \left(u + x_0^2\right)\partial_u,\\
&X_{17} = 4x_0^2\partial_0 + \left(x_2^2 + x_3^2 + +x_0^4 + u^2 - 6x_0^2u\right)\partial_1 + 4x_0(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) +\\
&\qquad + 4x_0\left(u - x_0^2\right)\partial_u,\\
&X_{18} = x_0\left(u + x_0^2\right)\partial_0 + \left[\left(u - x_0^2\right)\partial_1 + \frac{1}{2}x_0\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{5}{3}x_0^3u + \frac{1}{6}x_0^5\right]\partial_1 +\\
&\qquad + \left(u + x_0^2\right)(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) + \left[2x_0x_1 + x_0^2u - \frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{5}{6}x_0^4\right]\partial_u,\\
&X_{19} = x_0x_2\partial_0 + x_2\left(x_1 - ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 +\\
&\qquad + \left[2x_0x_1 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_3^2 - u^2\right) + ux_0^2 + \frac{1}{6}x_0^4\right]\partial_2 + x_2x_3\partial_3 + \left(u - x_0^2\right)\partial_u,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$X_{20} = x_0x_3\partial_0 + x_3\left(x_1 - ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 + x_2x_3\partial_2 +$$
$$+\left[2x_0x_1 - \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_3^2 + u^2\right) + ux_0^2 + \frac{1}{6}x_0^4\right]\partial_3 + \left(u - x_0^2\right)x_3\partial_u,$$
$$X_{21} = \left(x_2^2 + x_3^2 + u^2 + 2ux_0 + x_0^4\right)\partial_0 + \left[4x_1^2 + 4ux_0x_1 - \frac{4}{3}x_0^3x_1 - u^3 -\right.$$
$$\left.- x_0^2u^2 - \frac{5}{3}x_0^4u + \frac{1}{9}x_0^6 + \left(x_0^2 - u\right)\left(x_2^2 + x_3^2\right)\right]\partial_1 +$$
$$+ 4\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) +$$
$$+\left[4ux_1 + 4x_0^2x_1 + \frac{4}{3}x_0^3u - 2x_0\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{2}{3}x_0^5\right]\partial_u.$$

Доказательство теорем проводится методом Ли [4].

Как известно [4], максимальной локальной группой инвариантности эйконального уравнения

$$v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1, \tag{5}$$

$v = v(y^0, y^1, y^2, y^3)$, $v_l = \frac{\partial v}{\partial y^l}$, $l = \overline{0,3}$ есть 21-параметрическая конформная группа $C(1,4)$, базисные элементы алгебри Ли $AC(1,4)$ которой имеют вид

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = y_\alpha P_\beta - y_\beta P_\alpha, \quad D = y^\alpha P_\alpha, \tag{6}$$

$$K_\alpha = 2y_\alpha D - s^2 P_\alpha, \tag{7}$$

где $\alpha, \beta = \overline{0,4}$, $y^4 = v$, $y_\alpha = g_{\alpha\beta}y^\beta$, $g_{\alpha\beta} = (1, -1, \ldots, -1)\delta_{\alpha\beta}$, $s^2 = y^\alpha y_\alpha \equiv y_0^2 - y_1^2 - y_3^2 - y_4^2$, и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, J_{\beta\rho}] = g_{\alpha\beta}P_\rho - g_{\alpha\beta}P_\beta, \quad [P_\alpha, D] = P_\alpha,\\
&[J_{\alpha\beta}, J_{\rho\sigma}] = g_{\alpha\sigma}J_{\beta\rho} + g_{\beta\rho}J_{\alpha\sigma} - g_{\alpha\rho}J_{\beta\sigma} - g_{\beta\sigma}J_{\alpha\rho}, \quad [J_{\alpha\beta}, D] = 0,\\
&[K_\alpha, K_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\rho}] = g_{\alpha\beta}K_\rho - g_{\alpha\rho}K_\beta,\\
&[P_\alpha, K_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}), \quad [D, K_\alpha] = K_\alpha.
\end{aligned} \tag{8}$$

Выясним вопрос о взаимосвязи алгебр (4) и (6), (7).

Теорема 3. *Алгебра (4) изоморфная конформной алгебре $AC(1,4)$, заданной соотношениями (6)–(8).*

Доказательство. Положим в (6), (7)

$$\begin{aligned}
&y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^2 = x_2, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 \equiv v = u + x_0^2;
\end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u\right],\\
&P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u\right],\\
&P_2 = -\partial_2, \quad P_3 = -\partial_3, \quad P_4 = x_0\partial_1 - \partial_u.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Вычисляя по формулам (6), (7) операторы $J_{\alpha\beta}$, D, K_α, легко убедиться, что они есть линейными комбинациями операторов X_i (4), и наоборот, а также, что выполняются коммутационные соотношения (8).

Следствие 1. *Уравнение (3) при $\varkappa = 1$ заменой (9) сводится к уравнению (5).*

Действительно, используя (9), имеем

$$
u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v - x_0^2\right) = \frac{\partial v}{\partial y^l}\frac{\partial y^l}{\partial x_1} = \sqrt{2}x_0(v_0 - v_1)u_1 + \sqrt{2}(v_0 - v_1),
$$

$v_l = \frac{\partial v}{\partial y^l}$, откуда $u_1 = \frac{\sqrt{2}(v_0 - v_1)}{1+\sqrt{2}(v_1 - v_0)x_0}$. Аналогично вычисляя u_0, u_2, u_3, после подстановки в (3) и упрощений получаем (5).

Аналогично теоремам 1–3 доказывается

Теорема 4. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) при $\varkappa = -1$ — 21-параметрическая конформная группа $C(2,3)$.*

Аналог операторов (4) вследствие громоздкости приводить не будем. Базис алгебры Ли $AC(2,3)$ имеет вид (6), (7), причем соответственные преобразования (9), (10) задаются формулами

$$
\begin{aligned}
&y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^2 = x_2, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 \equiv v = u - x_0^2;
\end{aligned}
\tag{9$'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_1 - 2x_0\partial_u\right],\\
&P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_1 - 2x_0\partial_u\right],\\
&P_2 = -\partial_2, \quad P_3 = -\partial_3, \quad P_4 = x_0\partial_1 - \partial_u.
\end{aligned}
\tag{10$'$}
$$

$g_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру $(+---+)$.

Следствие 2. *Уравнение (3) при $\varkappa = -1$ заменой (9$'$) сводится уравнению*

$$
v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = -1. \tag{5$'$}
$$

3. Теорема 5. *Уравнение (1$'$) при дополнительном условии (3) инвариантно относительно 16-параметрической группы, изоморфной группе $\tilde{P}(1,4)$ при $\varkappa = 1$ и $\tilde{P}(2,3)$ при $\varkappa = -1$, ($\tilde{P}(1,4)$, $\tilde{P}(2,3)$ — расширенные группы Пуанкаре в 5-измеримом пространстве). Базисные элементы алгебр Ли $A\tilde{P}(1,4)$ и $A\tilde{P}(2,3)$ имеют соответственно вид (6), (9), (10) и (6), (9$'$), (10$'$).*

Заметим, что алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $A\tilde{P}(2,3)$ есть максимальными (в смысле Ли) алгебрами инвариантности системы (1′), (3) с $\varkappa = \pm 1$.

Следствие 3. *Система (1′), (3) заменой (9) при $\varkappa = 1$ ((9′) при $\varkappa = -1$) сводится к системе:*

$$\begin{aligned} &v_{00} - v_{11} - v_{22} - v_{33} = 0, \\ &v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = \varkappa. \end{aligned} \tag{11}$$

Действительно, вычисляя $u_{\alpha\beta}$ через $v_{\alpha\beta}$, v_α, v, y^α при помощи формул (9) или (9′) и подставляя в (1′), после упрощений получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A}(v_{00} - v_{11} - v_{22} - v_{33}) + \frac{1}{A^3}\Bigg[2x_0^2(v_{00} - 2v_{01} + v_{11}) + \\ &\qquad + 2\sqrt{2}Ax_0\left(\frac{\partial}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial y^1}\right)\Bigg]\left(v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - \varkappa\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

где $A \equiv 1 + \sqrt{2x_0}(v_1 - v_0)$, x_0 выражается через (y^α, v) по формула (9) или (9′). С (12) видно, что при выполнении дополнительного условия (3) получаем систему (11).

Замечание 1. С уравнения (12) получается еще другое дополнительное условие $v_0 - v_1 = 0$, которое также сводит (12) к уравнению д'Аламбера. Этому условию в пространстве (x, u) соответствует условие $u_1 = 0$.

Замечание 2. Операторы X_9–X_{16} с (4) не входят в алгебру инвариантности уравнения (1′), они есть операторами симметрии этого уравнения лишь при выполнении дополнительного условия (3). Это означает, что уравнение (1′) без дополнительного условия (3) не инвариантно относительно группы $\tilde{P}(1,4)$ или $\tilde{P}(2,3)$, поэтому для решений уравнения (1′) не выполняется принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна. С теоремы 5 следует, что из множества всех решений уравнения (1′) дополнительным условием (3) выделяется подмножество, для элементов которого указанный принцип выполняется.

Замечание 3. Используя теоремы 2, 3 работы [2], можно получить замену

$$\begin{aligned} &y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + 2x_1 + 2ux_0), \quad y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - 2x_1 - 2ux_0), \\ &y^2 = x_2, \quad y^3 = x_3, \quad y^4 \equiv v = u, \end{aligned} \tag{13}$$

при помощи которой уравнение (3) при $\varkappa = 0$ сводится к уравнению $v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 0$, а соответственная система (1′), (3) — к системе (11) с $\varkappa = 0$.

4. Исследуем Q-условную инвариантность уравнения (1′) в классе операторов первого порядка

$$Q = \xi^l(x,u)\partial_l + \eta(x,u)\partial_u, \tag{14}$$

$l = \overline{0,3}$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Теорема 6. *Уравнение (1′) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = 3\partial_1 + (a - bx_1)\partial_u, \tag{15}$$

если функции $a = a(x_0, x_2, x_3)$, $b = b(x_0, x_2, x_3)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$b_{22} + b_{33} = b^2, \quad a_{22} + a_{33} + b_0 - ab = 0. \tag{16}$$

Никаких других операторов Q-условной инвариантности класса (4) (кроме операторов вида $R = f(x, u)X$, где $f(x, u)$ — некоторая функция, X — оператор симметрии уравнения (1′)) уравнение Хохлова–Заболотской (1′) не имеет.

Теорема 6 доказывается по схеме, приведенной в [4]. Заметим, что в ходе доказательства теоремы 6 кроме оператора Q-условной инвариантности (15) получаются и все операторы (2) лиевской симметрии уравнения (1′).

5. Перейдем к построению точных решений уравнения (1′). Учитывая следствие 3 и замечание 3, получаем, что произвольное точное решение системы (11) в пространстве переменных (y, v) порождает соответственное точное решение системы (1′), (3) (а значит, и уравнения Хохлова–Заболотской (1′)).

Система типа (11) играет важную роль в теории пуанкаре-инвариантных дифференциальных уравнений в частных производных [5], поэтому вопросы ее совместности и построения точных решений детально изучены (см. [5] и цитированную там литературу).

В [6] показано, что произвольное решение системи (11) при $\varkappa = 0$ (как комплексное, так й действительное) можно получить из формулы Бейтмена–Смирнова–Соболева

$$\psi(v) = \varphi_i(v) y^i, \tag{17}$$

где $\psi(v)$ — произвольная гладкая функция, $\varphi_i(v) = \varphi^j(v) g_{ij}$, $g_{ij} = (1, -1, -1, -1)\delta_{ij}$, $\varphi^j(v)$ — гладкие функции, удовлетворяющие условию $\varphi_j(v)\varphi^j(v) = 0$, а также в виде

$$v = F(a_i y^i, b_i y^i), \tag{18}$$

где $a_i = a^j g_{ij}$, $b_i = b^j g_{ij}$, a^j, b^j — постоянные, удовлетворяющие условиям $a_j b^j = a_j a^j = b_j b^j = 0$, F — произвольная гладкая функция.

Переходя в (17), (18) к переменным (x, u), по формулам (13) получим классы точных решений (1′), заданных в неявном виде.

Заметим, что в классе, заданном формулой (17), содержатся как действительные, так и комплексные решения, а в классе (18) действительные решения исчерпываются формулой $v = \Phi(a_i y^i)$, $a_i a^i = 0$, Φ — произвольная гладкая функция; все остальные решения этого класса являются комплексными.

В [5] построено в параметрическом виде общее решение системы (11) при $\varkappa = \pm 1$. Там же рассмотрен ряд случаев, когда решения этой системы можно задать в явном или неявном виде. Для примера приведем два класса точных решений системы (1′), (3) при $\varkappa = -1$ и $\varkappa = 1$.

1) $\varkappa = -1$.

$$u = x_0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3 + c_1\right)\cos\varphi(z) + x_2 \sin\varphi(z) + \psi(z),$$

где $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right) + x_3 + c_2$; c_1, c_2 — произвольные постоянные; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные гладкие функции.

2) $\varkappa = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3 + c_1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3 + c_2\right) \times$$
$$\times \sin\varphi(z) + (x_1 + c_3)\cos\varphi(z) + \psi(z) = 0,$$

$z = i\left(u + x_0^2\right) + x_3 + c_4$, $i^2 = -1$, $c_j = \mathrm{const}$, $j = \overline{1,4}$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные гладкие функции.

Широкий класс точных решений уравнения ($1'$) можно построить при помощи оператора Q-условной инвариантности (15). Этому оператору соответствует анзац [4]

$$u = \frac{1}{3}a(x_0, x_2, x_3)x_1 - \frac{1}{6}b(x_0, x_2, x_3)x_1^2 + \varphi(x_0, x_2, x_3). \tag{19}$$

Подставляя (19) в ($1'$), после упрощений получаем на функции a, b, φ систему уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered} b_{22} + b_{33} = b^2, \quad a_{22} + a_{33} + b_0 - ab = 0, \\ \varphi_{22} + \varphi_{33} - \frac{1}{3}b\varphi - \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{9}a^3 = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

решив которую, получим согласно (19) точное решение уравнения ($1'$).

Характерной особенностью анзаца (19) является то, что при его помощи проводится редукция по независимым и антиредукция по зависимым переменным (от одного уравнения в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3, u) переходим к системе трех уравнений в пространстве $(x_0, x_2, x_3, a, b, \varphi)$). Понятно, что построить точные решения системы (20) проще, нежели уравнения ($1'$), поскольку практически только первое уравнение в (20) нелинейное, а переменная x_0 фактически играет роль параметра. В [7] исследована симметрия и построены точные решения уравнения $b_{22} + b_{33} = b^k$. Подставив полученные там решения во второе уравнение системы (20), будем иметь линейное уравнение для нахождения функции $a(x_0, x_2, x_3)$, решив которое (построив частные решения), для φ получаем также линейное уравнение.

Классы точных решений системы (20) можно построить и на основании ее симметрии, которая описывается следующей теоремой.

Теорема 7. *Максимальной группой инвариантности системы (20) является бесконечнопараметрическая группа, базисные операторы алгебры Ли которой имеют вид:*

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_0, \quad X_2 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad X_3 = x_0\partial_0 - a\partial_a - 2\varphi\partial_\varphi, \\ X_4 = x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - 2b\partial_b + 2\varphi\partial_\varphi, \\ X_5 = \frac{5}{12}x_0^2\partial_0 + \frac{1}{2}x_0(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) - x_0 b\partial_b - \\ - \left[\frac{5}{6}ax_0 - \frac{1}{8}\left(x_2^2 + x_3^2\right)b + \frac{1}{2}\right]\partial_a - \left[\frac{2}{3}x_0\varphi + \frac{1}{24}\left(x_2^2 + x_3^2\right)a\right]\partial_\varphi, \\ X(A) = 2A\partial_2 + A'x_2 b\partial_a - \left(\frac{1}{3}A'x_2 a + A''x_2\right)\partial_\varphi, \\ X(B) = 2B\partial_3 + B'x_3 b\partial_a - \left(\frac{1}{3}B'x_3 a + B''x_3\right)\partial_\varphi, \end{gathered} \tag{21}$$

$$X(C) = Cb\partial_a - \left(\frac{1}{3}Ca + C'\right)\partial_\varphi,$$

где A, B, C — произвольные функции от x_0, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial a}$, $\partial_b = \frac{\partial}{\partial b}$, $\partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Построив по операторам (21) соответственные анзацы [4], редуцируем систему (20) к системе трех уравнений с двумя независимыми переменными.

Приведем для иллюстрации решения уравнения (1′) вида

$$u = -\frac{1}{6}W(x_i)x_1^2 + \varphi(x_0, x_2, x_3), \tag{22}$$

где $W(x_i)$, $i = 2, 3$ — функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $\frac{d^2W(x_i)}{dx_i^2} = W^2$, а φ — решением линейного уравнения $\varphi_{22} + \varphi_{33} - \frac{1}{3}W(x_i)\varphi = 0$, в котором переменная x_0 является параметром. Эти решения неинвариантны относительно алгебры инвариантности уравнения (1′), поэтому их нельзя получить классическим методом Ли.

1. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В., Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков, *Акуст. журн.*, 1969, **15**, № 1, С. 40–47.
2. Фущич В.И., Чопик В.И., Миронюк П.И., Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 9, 24–27.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений д'Аламбера й Гамильтона, Препринт № 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.
6. Еругин Н.П., О функционально-инваринтных решениях, *Докл. АН СССР*, 1944, **52**, № 9, 3–4.
7. Жданов Р.З., Лагно В.И., О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера, содержащих произвольные функции, в сб. Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 34–39.