О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера

А.Ф. БАРАННИК, В.А. МАРЧЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

С использованием канонического разложения произвольной подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$ описаны максимальные подалгебры ранга n и $n-1$ расширенной изохронной алгебры Галилея, а также максимальные подалгебры ранга n обобщенной расширенной классической алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$, расширенной специальной алгебры Галилея $A\tilde{G}(2,n)$ и расширенной полной алгебры Галилея $A\tilde{G}(3,n)$. По подалгебрам ранга п построены анзацы, редуцирующие многомерные уравнения Шредингера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены точные решения уравнений Шредингера.

With the help of the canonical decomposition of an arbitrary subalgebra of the orthogonal algebra $AO(n)$ the rank n and $n-1$ maxima] subalgebras of the extended isochronous Galileo algebra, the rank n maximal subalgebras of the generalized extended classical Galileo algebra $A\tilde{G}(1,n)$, the extended special Galileo algebra $A\tilde{G}(2,n)$ and the extended whole Galileo algebra $A\tilde{G}(3,n)$ are described. By using the rank n subalgebras, ansätze reducing the many dimensional Schrödinger equations to ordinary differential equations is found. With the help of the reduced equation solutions exact solutions of the Schrödinger equation are constructed.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = k\Delta\psi + V(x,\psi,\psi^*), \qquad (1)$$

где V — произвольная дифференцируемая функция, $\psi=\psi(t,x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, k — ненулевое вещественное число. Это уравнение при $n=3$ и $V=0$ превращается в свободное уравнение Шредингера.

Симметрийные свойства уравнения (1) с использованием методов С. Ли [1–5] при $n=3$ изучены в [4–9], а для произвольного n — в [5, 10, 11]. В настоящей работе уравнение (1) исследуется для случаев $V=\psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, $V=\lambda\psi|\psi|^q$, λ — произвольное комплексное число, а q — вещественное число, и $V=\lambda\psi|\psi|^{4/n}$. Для каждого из указанных случаев мы выделяем в алгебре инвариантности уравнения (1) все максимальные подалгебры, редукция по которым приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Такие подалгебры имеют ранг n. Их описание получено из полного описания максимальных подалгебр ранга n и $n-1$ расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n)$ и основано на каноническом разложении произвольной подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$ [12]. По решениям редуцированных уравнений найдены точные решения уравнения (1).

Теор. и мат. физика, 1991, **87**, № 2, С. 220–234.

1. Алгебра инвариантности уравнения Шредингера

Если $V = \psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, то уравнение (1) инвариантно относительно обобщенной расширенной классической алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$ [5], базис которой составляют такие векторные поля:

$$P_a = -\partial_a, \quad J_{ab} = x_b\partial_b - x_b\partial_a, \quad G_a = t\partial_a + \frac{x_a}{2ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}),$$
$$T = \partial_t, \quad M = \frac{1}{2ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) \quad (a, b = 1, 2, \dots, n).$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, P_b] = [G_a, G_b] = 0,\\
&[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b,\\
&[T, J_{ab}] = 0, \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a, \quad [G_a, P_b] = \delta_{ab}M,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где M — центральный элемент, $\delta_{ab} = 0$, если $a \neq b$, $\delta_{ab} = 1$, если $a = b$. Алгебра $A\tilde{G}(1,n)$ содержит ортогональную алгебру $AO(n) = \langle J_{12}, \dots, J_{n-1,n}\rangle$ и расширенную изохронную алгебру Галилея $AG(0,n) = \langle M, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n\rangle \Supset AO(n)$ ($\Supset$ — знак полупрямой суммы).

Если $V = \lambda\psi|\psi|^q$, где λ — произвольное комплексное число, q — произвольное вещественное число, то уравнение (1) инвариантно относительно расширенной специальной алгебры Галилея $A\tilde{G}(2,n)$, получаемой из алгебры $A\tilde{G}(1,n)$ в результате присоединения генератора дилатации

$$D = 2t\partial_t + x^a\partial_a - \frac{2}{q}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}).$$

Генераторы алгебры $A\tilde{G}(2,n)$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1) и таким соотношениям:

$$[D, J_{ab}] = 0, \quad [D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \quad [D, T] = -2T. \tag{1.2}$$

Если $V = \lambda\psi|\psi|^{4/n}$, где λ — произвольное комплексное число, то уравнение (1) инвариантно относительно расширенной полной алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$ [11], получаемой из алгебры $A\tilde{G}(1,n)$ в результате присоединения генераторов

$$D = 2t\partial_t + x^a\partial_a - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$
$$S = t^2\partial_t + tx^a\partial_a + \frac{|x|^2}{4ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{n}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Генераторы алгебры $A\tilde{G}(3,n)$ связаны коммутационными соотношениями (1.1), (1.2) и следующими соотношениями:

$$[S, J_{ab}] = 0, \quad [S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0, \quad [D, S] = 2S, \quad [T, S] = D.$$

Максимальную локальную группу инвариантности соответствующего уравнения Шредингера обозначим через $\tilde{G}(l,n)$ ($l = 1, 2, 3$). Ее алгебра Ли совпадает с алгеброй $A\tilde{G}(l,n)$. Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ ($l = 1, 2, 3$) следует описать подалгебры алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ с точностью до $\tilde{G}(l,n)$-эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ называются

$\tilde{G}(l,n)$-эквивалентными, если для некоторого $g \in \tilde{G}(l,n)$ алгебры gK_1g^{-1} и K_2 обладают одними и теми инвариантами. Если функции $f_\delta(x)$ $(\delta = 1,\ldots,s)$ являются инварианта ненулевой подалгебры K алгебры $A\tilde{G}(l,n)$, то K будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ существует максимальная алгебра иварианктности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций. Нетрудно доказать, что подалгебры K_1 и K_2 алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр K_1 и K_2 $\tilde{G}(l,n)$-сопряжены. В силу этого в классе всех подалгебр, эквивалентных между собой, естественно выделить и изучить максимальные подалгебры, поскольку такие подалгебры определяются однозначно с точностью до $\tilde{G}(l,n)$-сопряженности.

Пусть K — некоторая подалгебра алгебры $A\tilde{G}(l,n)$. Если $M \in K$, то $\psi\psi^* = \mathrm{const}$, и мы получаем линейное уравнение. При $T \in K$ инварианты не зависят от t. В связи с этим будем предполагать, что все рассматриваемые подалгебры не содержат M и T.

В работе будут использоваться следующие обозначения: $V'[r,s] = \langle G_r,\ldots,G_s\rangle$ $(r \le s)$; $V = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$; τ, ω, φ — проектирования $A\tilde{G}(3,n)$ на $\langle D,T,S\rangle$, $AO(n)$, $\langle G_1,G_2,\ldots,G_n\rangle$, соответственно; $AO[r,s] = \langle J_{ab} \,|\, a,b = r,\ldots,s\rangle$; $AO(n) = AO[1,n]$; $\mathfrak{M}[r,s] = \langle M, G_r,\ldots,G_s,P_r,\ldots,P_s\rangle$ — алгебра Ли над R с генераторами $M, G_r,\ldots, G_s, P_r,\ldots,P_s$.

2. Каноническое разложение подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$

Пространство $V' = \langle G_1,\ldots,G_n\rangle$ можно рассматривать как евклидово пространство с ортонормированным базисом $G_1,\ldots,G_n$. Группу $O(n)$ будем отождествлять с группой изометрий пространства V'.

Пусть $\Gamma : X \to X$ — тривиальное представление алгебры $F \subset AO(n)$. Тогда Γ $O(n)$-эквивалентно $\mathrm{diag}\,[\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m]$, где Γ_j — неприводимое подпредставление $(j = 1,\ldots,m)$. Можно предполагать, что алгебра $F_j = \{\mathrm{diag}\,[0,\ldots,\Gamma_j(X),\ldots,0] \,|\, X \in F\}$ является неприводимой подалгеброй ортогональной алгебры $AO(U_j)$, где $U_j = V'[k_{j-1}+1,k_j]$ $(k_0 = 0;\ k_m = n;\ j = 1,\ldots,m)$. Если $F_j \ne 0$, то алгебру F_j будем называть неприводимой частью алгебры F. Хорошо известно, что если представления Δ и Δ алгебры Ли L кососимметрическими матрицами эквивалентны над R, то $C\Delta(X)C^{-1} = \Delta'(X)$ для некоторой ортогональной матрицы C $(X \in L)$. Отсюда заключаем, что если Γ_r, и Γ_s, суть эквивалентные представления, то можно предполагать, что для любого $X \in F$ имеет место равенство $\Gamma_r(X) = \Gamma_s(X)$. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления, мы получим ненулевые попарно дизъюнктные подпредставления $\Delta_1,\ldots,\Delta_l$ представления Γ. Алгебру

$$A_j = \{\mathrm{diag}\,[0,\ldots,\Delta_j(X),\ldots,0] \,|\, X \in F\} \quad (j = 1,\ldots,l)$$

будем называть примарной частью алгебры F. Очевидно, F является под прямой суммой своих примарных частей. Разложение F в подпрямую сумму своих примарных частей будем называть каноническим разложение алгебры F. Если F совпадает со своей примарной частью, то F называется примарной алгеброй.

Предложение 1. *Пусть $n = ld$, $L = (L \cap \mathfrak{M}[1,n]) \niplus F$ — полупрямая сумма подалгебры $L \cap \mathfrak{M}[1,n]$ и примарной алгебры $F \subset AO(n)$, являющейся подпря-*

мой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1,d], AO[d+1,2d],\dots,AO[(l-1)d+1,ld]$. *Если* $M\notin L$, $L\cap V=0$ *и* $\varphi(L)=\langle G_1,\dots,G_{ld}\rangle$, *то* L *сопряжена с алгеброй* $W_1\Supset F$, *где* W_1 *обладает базисом*

$$
\begin{aligned}
&G_1+\gamma_1P_1,\dots,G_d+\gamma_1P_d,\\
&G_{d+1}+\gamma_2P_{d+1},\dots,G_{2d}+\gamma_2P_{2d},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&G_{(l-1)d+1}+\gamma_lP_{(l-1)d+1},\dots,G_{ld}+\gamma_lP_{ld}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Если $M\notin L$, $L\cap V=0$ *и* $\varphi(L)=\langle G_1,\dots,G_{(l-1)d}\rangle$, *то* L *сопряжена с алгеброй* $W_1\Supset F$, *где* W_1 *обладает базисом*

$$
\begin{aligned}
&G_1+\gamma_1P_1+\lambda_1P\lambda_{(l-1)d+1},\dots,G_d+\gamma_1P_d+\lambda_1P_{ld},\\
&G_{d+1}+\gamma_2P_{d+1}+\lambda_2P_{(l-1)d+1},\dots,G_{2d}+\gamma_2P_{2d}+\lambda_2P_{ld},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&G_{(l-2)d+1}+\gamma_{l-1}P_{(l-2)d+1}+\lambda_{l-1}P_{(l-1)d+1},\dots,G_{(l-1)d}+\gamma_{l-1}P_{(l-1)d}+\lambda_{l-1}P_{ld}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Доказательство. В силу условия $M\notin L$ подалгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ коммутативная. Поэтому первая часть предложения вытекает из работы [13]. Пусть, далее, $\varphi(L)=\langle G_1,\dots,G_{(l-1)d}\rangle$. Тогда можно предполагать, что $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ есть подпрямая сумма алгебры $\langle G_1+\delta_1P_1,\dots,G_{(l-1)d}+\delta_{(l-1)d}P_{l-1d}\rangle$ и алгебры $\langle P_{(l-1)d+1},\dots,P_{ld}\rangle$, при этом $\delta_1=\dots=\delta_d$, $\delta_{d+1}=\dots=\delta_{2d},\dots,\delta_{(l-2)d+1}=\dots=\delta_{(l-1)d}$.

Алгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{N}_1\dots,\mathfrak{N}_{l-1}$, где $\mathfrak{N}_j$ — алгебра, обладающая базисом

$$
\begin{aligned}
&G_{(j-1)d+1}+\gamma_jP_{(j-1)d+1}+\delta^j_{11}P_{(l-1)d+1}+\dots+\delta^j_{1d}P_{ld},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&G_{jd}+\gamma_jP_{jd}+\delta^j_{d1}P_{(l-1)d+1}+\dots+\delta^j_{dd}P_{ld}\quad(j=1,\dots,l-1).
\end{aligned}
$$

Связывающая матрица

$$
\Delta_j=\begin{pmatrix}\delta^j_{11}&\cdots&\delta^j_{1d}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \delta^j_{d1}&\cdots&\delta^j_{dd}\end{pmatrix}
$$

сплетает представления неприводимой части алгебры F в пространствах $\langle G_{(j-1)d+1},\dots,G_{jd}\rangle$ и $\langle P_{(l-1)d+1},\dots,P_{ld}\rangle$. Поэтому $\Delta_j=\lambda_jC_j$, где λ_j — вещественное число, а C_j — ортогональная матрица. $O(n)$-автоморфизм, соответствующий матрице

$$
\begin{bmatrix}
E_d&&&&\\
&\ddots&&0&\\
&&C_j&&\\
&0&&\ddots&\\
&&&&E_d
\end{bmatrix}
$$

оставляет неизменным F, $\mathfrak{N}_j$, при $i\neq j$ и преобразует пространство $\mathfrak{N}_j$ в пространство, которому соответствует связывающая матрица λ_jE_d. Предложение доказано.

3. Инварианты расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n)$

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{G}(0,n)$, обладающая нулевой проекцией $\omega(L)$ на $AO(n)$, и $M \notin L$. Обозначим через $A_1,\ldots,A_p$ примерные части $\omega(L)$. Подалгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ коммутативна и инвариантна относительно $\omega(L)$. Согласно работе [14] она является прямой суммой

$$W = W_1\oplus\cdots\oplus W_p\oplus\tilde{W}$$

подалгебр W_j $(j=1,\ldots,p)$, $\tilde{W}$, удовлетворяющих соотношениям $[W_j,A_j]=[A_j,W] = W_j$, $[A_r,W_j]=0$ при $r\neq j$, $\tilde{W}=\{y\in W\,|\,[L,Y]=0\}$. Изучим структуру инвариантов алгебр $L_j = W_j \subset\!\!\!\!+ A_j$ $(j=1,\ldots,p)$, так как они в значительной мере определяют структуру инвариантов алгебры L. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением алгебры L_1. Ее пpi часть совпадает с A_1 и является подпрямой суммой неприводимых алгебр соответственно алгебр $AO[1,d], AO[d+1,2d],\ldots,AO[(l-1)d+1,ld]$. Инварианты алгебры L_1 будем рассматривать в пространстве функции переменных $t,\psi,x_1,\ldots,x_{ld}$. Всегда можно предполагать, что $\varphi(L_1)=\langle G_1,\ldots,G_{l_1d}\rangle$, где $1\le l_1\le l$. В зависимости от значения l_1 рассмотрим три случая.

А. Случай $l_1=l$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью $O(n)$-сопряженности обладает базисом (2.1). Так как ранг алгебры W_1 равен ld, то она имеет два основных инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять функции t и

$$\sigma=\psi\exp\left[\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{l}\frac{x^2_{(j-1)d+1}+\cdots+x^2_{jd}}{t-\gamma_j}\right]. \tag{3.1}$$

Так как каждая из них является инвариантом алгебры A_j, то система функций t, σ образует полную систему инвариантов алгебры L_1.

Б. Случай $l_1=l-1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью $O(n)$-сопряженности обладает базисом (2.2). Так как ранг алгебры W_1 равен $(l-1)d$, то ее полная система инвариантов состоит из $d+2$ функций. Очевидно, инвариантами W_1 являются функции t и

$$\sigma=\psi\exp\left[\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{l-1}\frac{x^2_{(j-1)d+1}+\cdots+x^2_{jd}}{t-\gamma_j}\right].$$

Эти инварианты функционально независимы. Найдем остальные d функционально независимых инвариантов алгебры W_1, которые дополняют систему двух инвариантов t и σ алгебры W_1 до полной системы инвариантов W_1. Легко убедиться, что инвариантом алгебры W_1 является функция

$$\begin{aligned} y_1 = {} & \sum_{s=1}^{l-1}\lambda_s(t+\gamma_1)\cdots(t+\gamma_{s-1})(t+\gamma_{s+1})\cdots(t+\gamma_{l-2})x_{(s-1)d+1} - \\ & -\prod_{s=1}^{l-1}(t+\gamma_s)x_{(l-1)d+1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подействовав на нее генератором $J_{1j} + J_{d+1,d+j} + \cdots + J_{(l-1)d+1,(l-1)d+j}$ $(j = 2\dots, d)$, получаем такой инвариант алгебры W_1:

$$
\begin{aligned}
y_j = \sum_{s=1}^{l-1} &\lambda_s (t+\gamma_1)\cdots(t+\gamma_{s-1})(t+\gamma_{s+1})\cdots(t+\gamma_{l-2}) x_{(s-1)d+j} + \\
&+ \prod_{s=1}^{l-1}(t+\gamma_s) x_{(l-1)d}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Мы нашли d функционально независимых инвариантов $y_1, \dots, y_d$ алгебры W_1, которые вместе с инвариантами t и σ образуют полную систему инвариантов алгебры W_1. Запишем генераторы примарной алгебры, являющейся подпрямой суммой алгебр $AO[1,d], AO[d+1,2d], \dots, AO[(l-1)d+1, ld]$ в новых переменных $y_1, y_2, \dots, y_d$. Рассмотрим, например, генератор $\tilde{J}_{12} = J_{12} + J_{d+1,d+2} + \cdots + J_{(l-1)d+1,(l-1)d+2}$. Используя формулы (3.2) и (3.3), получаем, что в переменных $y_1, y_2, \dots, y_d$ генератор $\tilde{J}_{12}$ принимает вид $\tilde{J}_{12} = y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$.Отсюда вытекает, что A_1 можно рассматривать как подалгебру ортогональной алгебры $A\tilde{O}(d) = \langle \tilde{J}_{12}, \dots, \tilde{J}_{d-1,d}\rangle$ действующую в евклидовом пространстве $\tilde{E}_d$, состоящем из d-мерных векторов $(y_1, y_2, \dots, y_d)$.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от $y_1, y_2, \dots, y_d$ состоит из $d - r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1, \dots, \theta_{d-r}$. Используя эти функции, мы без труда находим полную систему инвариантов алгебры L_1. Она состоит из функций t, σ, $\theta_1, \dots, \theta_{d-r}$, где вместо $y_1, \dots, y_d$ подставлены их выражения (3.2) и (3.3).

В. Случай $l_1 < l - 1$. Аналогично случаю Б A_1 можно рассматривать как подалгебру примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой ортогональных алгебр $A\tilde{O}[1,d], A\tilde{O}[d+1, 2d], \dots, A\tilde{O}[(l-l_1)d - d + 1, (l-l_1)d]$. Генераторы этих алгебр записаны в переменных $y_1, \dots, y_d, \dots, y_{(l-l_1)d}$, которые являются инвариантами алгебры W_1 не зависящими от ψ.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от переменных $y_1, \dots, y_{(l-l_1)d}$ состоит из $(l-l_1)d - r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1, \dots, \theta_{(l-l_1)d-r}$. Используя их, получаем, что полная система инвариантов алгебры L_1 состоит из функций t, σ, $\theta_1, \dots, \theta_{(l-l_1)d-r}$ где σ задается формулой (3.1), в которой $l = l_1$.

4. Максимальные подалгебры ранга n и $n-1$ флгебры $A\tilde{G}(0,n)$

Здесь и в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(d_0, d_1, \gamma_1) = \langle G_{d_0} + \gamma_1 P_{d_0}, \dots, G_{d_1} + \gamma_1 P_{d_1}\rangle \dotplus AO[d_0, d_1];\\
&AE(n-m) = \langle P_{m+1}, \dots, P_n\rangle \dotplus AO[m+1, n] \quad (0 \le m \le n-1);\\
&AE(n-n) = AE(0) = 0;\\
&AE_1(n-m) = \langle G_{m+1}, \dots, G_n\rangle \dotplus AO[m+1, n] \quad (0 \le m \le n-1);\\
&AE_1(n-n) = AE_1(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть $d_1, \dots, d_p$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношение $d_0 = 1 < d_1 < \cdots < d_p \le n$.

Предложение 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(0,n)$, $M \notin L$ и $L \cap V = 0$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с алгеброй $\Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1 + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p)$, $d_p = n$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_p$.*

Доказательство. Пусть $\omega(L) = 0$. Так как $M \notin L$, то L является коммутативной подалгеброй алгебры $\mathfrak{M}[1,n]$. Следовательно, алгебра L $O(n)$-сопряжена с алгеброй $\langle G_1 + \gamma_1 P_1, \ldots, G_n + \gamma_n P_n\rangle$ [13]. Если, например, $\gamma_1 = \gamma_2$, то $J_{12} \in L$, а потому $\omega(L) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$.

Пусть $\omega(L) \neq 0$ и $A_1, \ldots, A_p$ — примарные части алгебры $\omega(L)$. По определению A_1 является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1,d_1], AO[d_1 + l, 2d_1], \ldots, AO[(l-1)d_1 + 1, ld_1]$. Допустим, что $W_1 = 0$. Тогда инвариантами алгебры A_1, а значит, и алгебры L являются функции t, $\varphi_1 = x_1^2 + \cdots + x_{d_1}^2$, …, $\varphi_l = x_{(l-1)d_1+1}^2 + \cdots + x_{ld_1}^2$. Так как по условию полная система инвариантов алгебры L состоит из двух инвариантов, то $l = 1$. Любой другой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(t, \varphi_1)$ и потому $M \in L$, что противоречит условию. Таким образом $W_1 \neq 0$. В силу результатов п. 2 и предложения 1 можно считать, что W_1 обладает базисом (2.1). Поэтому полная система инвариантов алгебры W_1 состоит из функций t, σ, $x_{ld_1+1}, \ldots, x_n$. Следовательно, любой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(t, \sigma, x_{ld_1+1}, \ldots, x_n)$. В силу максимальности L отсюда вытекает, что $AO[1,d_1] \subset L$, а значит, $l = 1$. Мы доказали, что алгебра $\Phi(1,d_1,\gamma_1)$ выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus L'$.

Алгебра $\omega(L')$ является подпрямой суммой примарных частей $A_2, \ldots, A_p$. Применяя к ней предыдущие рассуждения, доказываем, что $L' = \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus L''$. Через p шагов получаем, что $L = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus L_0$, где L_0 — нулевая либо коммутативная подалгебра, содержащаяся в $\mathfrak{M}[d_p, n]$. Если $L_0 = 0$, то все доказано. Если $L_0 \neq 0$, то $\omega(L_0) = 0$, а этот случай уже рассмотрен. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и $M \notin L$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = AE(n)$;

2) $F_2 = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p)$ $(d_p = n)$;

3) $F_3 = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;\ 1 \leq m \leq n)$.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и $M \notin L$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1 = \langle J_{12} + \delta M\rangle \oplus AE(n-2)$ $(n \geq 2)$;

2) $K_2 = AO(m) \oplus AE(n-m)$ $(1 \leq m \leq n)$;

3) $K_3 = AO[1,d] \oplus \Phi(d+1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;$ $m \leq n)$;

4) $K_4 = L_1 \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \subset\!\!\!+ A_1$, W_1 *обладает базисом (2.2), а* A_1 — *диагональ в* $AO[1,d] \oplus \cdots \oplus AO[(l-1)d+1, ld]$ $(m = ld;\ m \leq n)$;

5) $K_5 = L_1 \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \subset\!\!\!+ \langle J + \alpha M\rangle$, W_1 *обладает базисом (2.2) при* $m = 2l$, $d = 2$, *а* $J = J_{12} + \cdots + J_{m-1,m}$ $(m \leq n;\ \alpha > 0)$;

6) $K_6 = L_1 \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_p+1, m, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \subset\!\!\!+ A_1$, W_1 *обладает базисом (2.2) при* $n = d_1$, *а* A_1 — *диагональ в* $AO[1,d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(l-1)d_1+1, ld_1]$ $(m \leq n)$;

7) $K_7 = L_1 \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_p+1, m, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J+\alpha M\rangle$, W_1 *обладает базисом (2.2) при* $n = d_1$, $d = 2$, *а* $J = J_{12} + \cdots + J_{d_1-1,d_1}$ $(\alpha \neq 0)$.

5. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(1, n)$

В настоящем пункте мы проводим редукцию уравнения (1) при $V = \psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, по максимальным подалгебрам ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Все такие подалгебры, содержащиеся в $A\tilde{G}(0, n)$, описаны в предложении 2. Для нахождения максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$, воспользуемся следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть* L *— максимальная подалгебра ранга* n*, алгебры* $A\tilde{G}(1, n)$*, не содержащаяся в* $A\tilde{G}(0, n)$*. Тогда* $L = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle S\rangle$*, где* K *— максимальная подалгебра ранга* $n-1$ *алгебры* $A\tilde{G}(0, n)$*, а* $S = T + X$*,* $X \in A\tilde{G}(0, n)$*.*

Справедливость предложения вытекает из теоремы об универсальном инварианте [1]. Из предложения 4 вытекает, что построение максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$, сводится к нахождению всех расширений максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n)$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle T + X\rangle$, $X \in A\tilde{G}(0, n)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть K — произвольная максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Допустим, что $\mathrm{Nor}_{A\tilde{G}(1,n)}$, где $\mathfrak{N}$ — подпространство. Следовательно, максимальная подалгебра L ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, содержащая K, представляется в виде $L = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T+X\rangle$, где $T+X \in \mathfrak{N}$. Пусть $L' = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T+X'\rangle$ $(T + X' \in \mathfrak{N})$ — какая-нибудь другая максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Тогда имеет место следующее

Предложение 5. *Две подалгебры* $L = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T + X\rangle$ *и* $L' = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T + X'\rangle$ $\tilde{G}(1, n)$*-сопряжены тогда и только тогда, когда* $\langle T + X\rangle$ *и* $\langle T + X'\rangle$ *сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры* $K \oplus \mathfrak{N}$*.*

Из предложений 4 и 5 вытекает следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$.

1. Для максимальной подалгебры $K \subset A\tilde{G}(0, n)$ находим ее нормализатор в алгебре $A\tilde{G}(1, n)$. Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{A\tilde{G}(1,n)} K = K \oplus \mathfrak{N}$.

2. Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов алгебры $K \oplus \mathfrak{N}$ всех одномерных подалгебр пространства $\mathfrak{N}$ с ненулевой проекцией на $\langle T\rangle$.

3. Если $\langle T + X_1\rangle, \ldots, \langle T + X_s\rangle$ — все одномерные подалгебры пространства $\mathfrak{N}$, то $K_1 = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T + X_1\rangle$, …, $K_s = K \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle T + X_s\rangle$ — все расширения ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, содержащие подалгебру K.

Отметим, что алгоритм построения подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(l, n)$ $(l = 2, 3)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(1, n)$, формулируется аналогично.

Используя указанный алгоритм, доказываем следующую теорему

Теорема 1. *Пусть* L *— максимальная подалгебра ранга* n *алгебры* $A\tilde{G}(l, n)$ *и* $M, T \notin L$*. Тогда* L $\tilde{G}(1, n)$*-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $F_1 = AE(n)$;

2) $F_2 = \Phi(1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;\ 1 \le m \le n)$;

3) $F_3 = \langle T + \gamma M, J_{12} + \delta M\rangle \oplus AE(n-2)$ $(\gamma, \delta \in R;\ \gamma \neq 0)$;

4) $F_4 = \langle T + \gamma M\rangle \oplus AE(n-1)$;

5) $F_5 = \langle T + \alpha G_1 \rangle \oplus AE(n-1)$;
6) $F_6 = \langle T + \gamma M \rangle \oplus AO[1,m] \oplus AE(n-m)$ $(\gamma \in R;\ \gamma \neq 0;\ 3 \leq m \leq n)$.

Для подалгебр F_1–F_6 получаем такие анзацы:

$$F_1: \quad \psi = \varphi(\omega), \quad \omega = t;$$

$$F_2: \quad \psi = \exp\left[-\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{p}\frac{x^2_{d_{j-1}+1} + \cdots + x^2_{d_j}}{t - \gamma_j}\right]\varphi(\omega), \quad \omega = t;$$

$$F_3: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\omega), \quad \omega = x_1^2 + x_2^2;$$

$$F_4: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t\right)\varphi(\omega), \quad \omega = x_1;$$

$$F_5: \quad \psi = \exp\left(\frac{i\alpha^2}{6k}t^3 - \frac{i\alpha t}{2k}x_1\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \alpha t^2 - 2x_1;$$

$$F_6: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V = \psi F(|\psi|)$ обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$F_1: \quad i\dot\varphi - \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_2: \quad \dot\varphi + \frac{\varphi}{2}\sum_{j=1}^{p}\frac{d_j - d_{j-1}}{\omega - \gamma_j} + i\varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_3: \quad 4k\omega\ddot\varphi + 4k\dot\varphi - \left(\frac{\gamma}{2k} + \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_4: \quad k\ddot\varphi - \frac{\gamma}{2k}\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_5: \quad 4k\ddot\varphi + \frac{\alpha}{4k}\omega\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_6: \quad 4k\omega\ddot\varphi + 2mk\dot\varphi - \frac{\gamma}{2k}\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0.$$

6. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde G(2,n)$

В этом пункте мы рассматриваем уравнение Шредингера (1) при $V = \lambda\psi|\psi|^q$, где λ — произвольное комплексное число, а q — произвольное вещественное число. Для редукции данного уравнения мы используем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde G(2,n)$, которые не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde G(1,n)$. Учитывая, что каждая из таких подалгебр L удовлетворяет условию $D \in \tau(L)$ и используя алгоритм описания таких подалгебр, изложенный в п. 5, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde G(2,n)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde G(1,n)$. Если $D \in \tau(L)$, $M, T \notin L$, то L $\tilde G(2,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AO(m) \oplus AE(n-m) \oplus \langle D + \delta M\rangle$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $L_2 = AO(m) \oplus AE_1(l-m) \oplus AE(n-1) \oplus \langle D + \delta M\rangle$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1;$ $l = m+1, \ldots, n)$;

3) $L_3 = \langle J_{12} + \alpha M, D + \delta M\rangle \oplus AE(n-2)$ $(\alpha \geq 0)$;

4) $L_4 = \langle J_{12} + \alpha M, D + \delta M\rangle \oplus AE_1(m-2) \oplus AE(n-m)$ $(\alpha \geq 0,\ m = 3, \ldots, n)$.

Подалгебрам L_1–L_4 соответствуют такие анзацы:

$$L_1: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2/t;$$

$$L_2: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t - \frac{i}{4kt}\sum_{j=m+1}^{l} x_j^2\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2/t;$$

$$L_3: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t};$$

$$L_4: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - \frac{i}{4kt}\sum_{j=3}^{m} x_j^2\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V = \lambda\psi|\psi|^q$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$L_1: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (2km + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_2: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (2km + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{i(l-m)}{2} - \frac{\delta}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_3: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (4k + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k} - \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_4: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (4k + i\omega)\dot{\varphi} + \\ + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k} - \frac{i(m-2)}{2} - \frac{\delta}{4k} - \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0.$$

7. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(3,n)$

В данном пункте речь пойдет о симметрийной редукции уравнения Шредингера (1) при $V = \lambda\psi|\psi|^{4/n}$, где λ — произвольное комплексное число. Поскольку это уравнение является частным случаем уравнений, рассмотренных в п. 5, 6, то при изучении симметрийной редукции его можно ограничиться теми подалгебрами, которые не сопряжены с подалгебрами алгебр $A\tilde{G}(1,n)$ и $A\tilde{G}(2,n)$. Таковыми являются те и только те подалгебры алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, проекции которых на $\langle D, S, T\rangle$ совпадают с $\langle S + T\rangle$ или с $\langle D, S, T\rangle$. Но поскольку мы исключаем случаи, когда подалгебр; содержит T, то следует ограничиться подалгебрами, чьи проекции на $\langle D, S, T\rangle$ совпадают с $\langle S + T\rangle$. Нетрудно убедиться, что для таких подалгебр L $\omega(L)=0$ или $\omega(L)$ — примарная алгебра. Используя описание максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и алгоритм, изложенный в п. 5, можно получить полное описание максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, чьи проекции на $\langle D,S,T\rangle$ совпадают с $\langle S+T\rangle$. Так как операторы этих подалгебр имеют громоздкий вид, то мы выпишем лишь подалгебры L, у которых примарная алгебра $\omega(L)$ является подпрямой суммой не более трех неприводимых алгебр.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, $\tau(L)=\langle S+T\rangle$ и $\omega(L)$ — примарная алгебра, являющаяся подпрямой суммой не более трех неприводимых алгебр. Если $M,T\notin L$, то L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1=AO(n)\oplus\langle S+T+\alpha M\rangle$;

2) $K_2=\langle G_1+P_{d+1},G_2+P_{d+2},\dots,G_d+P_{2d}\rangle \subset\!\!\!\!+ (K\oplus\langle J\rangle)$, *где K — диагональ в $AO[1,d]\oplus AO[d+1,2d]$, а* $J=S+T+\sum\limits_{a=1}^{d}J_{a,a+d}+\alpha M$ $(n=2d;\ d>1)$;

3) $K_3=\langle S+T+\beta M, J_{12}+\alpha M\rangle\oplus AE(n-2)$;

4) $K_4=\langle G_a+\frac{1}{\sqrt{3}}P_a+\frac{2}{\sqrt{3}}P_{2d+a}, G_{d+a}-\frac{1}{\sqrt{3}}P_{d+a}+\frac{2}{\sqrt{3}}P_{2d+a}\mid a=1,\dots,d\rangle \subset\!\!\!\!+ (K\oplus\langle J\rangle)$ $(n=3d,\ d>1)$, *где K — диагональ в $AO[1,d]\oplus AO[d+1,2d]\oplus AO[2d+1,3d]$, а* $J=S+T+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{a=1}^{d}(J_{a,d+a}+J_{a,2d+a}+J_{d+a,2d+a})+\beta M$;

5) $K_5=\langle G_1+P_3,G_2+P_4\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{12}+J_{34}+\beta M\rangle\oplus\langle J\rangle)$, $J=S+T+J_{13}+J_{24}+\alpha M$;

6) $K_6=\langle G_a+\frac{1}{\sqrt{3}}P_a+\frac{2}{\sqrt{3}}P_{4+a}, G_{2+a}-\frac{1}{\sqrt{3}}P_{2+a}+\frac{2}{\sqrt{3}}P_{4+a}\mid a=1,2\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{12}+J_{34}+J_{56}+\beta M\rangle\oplus\langle J\rangle)$, *где* $J=S+T+\frac{2}{\sqrt{3}}(J_{13}+J_{24}+J_{15}+J_{35}+J_{26}+J_{46})+\alpha M$.

Алгебрам K_1–K_6 соответствуют такие анзацы:

$$K_1:\quad \psi=\exp\left[\frac{it\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2}{4k(t^2+1)}-\frac{n}{4}\ln(t^2+1)-\frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}t\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=\sum_{j=1}^{n}x_j^2/(t^2+1);$$

$$K_2:\quad \psi=\exp\left[-\frac{d}{2}\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\sum_{a=1}^{d}\frac{x_a^2}{t}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}\sum_{a=1}^{d}(x_a+tx_{d+a})^2;$$

$$K_3:\quad \psi=\exp\left[-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\frac{it(x_1^2+x_2^2)}{4k(t^2+1)}-\frac{i\beta}{2k}\operatorname{arctg}t+\frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{t^2+1};$$

$$K_4:\quad \psi=\exp\left[-\frac{3d}{4}\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(4\omega t\frac{t^2-3}{3t^2-3}+\right.\right.$$

$$+\sum_{a=1}^{d}\left(\frac{x_a^2}{t-\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{x_{d+a}^2}{t+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+2\beta\operatorname{arctg}t\Bigg)\Bigg]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-3}\sum_{a=1}^{d}\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_a+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_{d+a}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_{2d+a}\right]^2;$$

$$K_5:\quad \psi=\exp\left[-\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\frac{x_1^2+x_2^2}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\alpha\operatorname{arctg}t-2\beta\operatorname{arctg}\frac{x_1+tx_3}{x_2+tx_4}\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}\left[(x_1+tx_3)^2+(x_2+tx_4)^2\right];$$

$$K_6:\quad \psi=\exp\left[-\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\frac{x_1^2+x_2^2}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\alpha\operatorname{arctg}t-2\beta\frac{y_1}{y_2}\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$y_1=\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_1+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_5,$$

$$y_2=\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_2+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_4+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_6,$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}(y_1^2+y_2^2).$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V=\lambda\psi|\psi|^{4/n}$ к следующим уравнениям:

$$K_1:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}+2nk\dot{\varphi}-\left(\frac{\alpha}{2k}+\frac{\omega}{4k}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/n}=0;$$

$$K_2:\quad -\frac{1}{k}\left(\omega+\frac{\beta}{2}\right)\varphi+2kd\dot{\varphi}+4k\omega\ddot{\varphi}+\lambda\varphi|\varphi|^{2/d}=0;$$

$$K_3:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}+4k\dot{\varphi}-\left(\frac{\beta}{2k}+\frac{\omega}{4k}+\frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^2=0;$$

$$K_4:\quad 2k\omega\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}kd\dot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(3\omega+\frac{\beta}{2}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3d}=0;$$

$$K_5:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(\omega+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta^2}{4\omega}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|=0;$$

$$K_6:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(3\omega+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta^2}{4\omega}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{2/3}=0.$$

8. Точные решения уравнений Шредингера

Редуцированное уравнение, соответствующее подалгебре F_j будем обозначать $(5.j)$ $(j = 1, \ldots, 7)$. Аналогично редуцированное уравнение, соответствующее подалгебре L_j обозначим $(6.j)$ $(j = 1, \ldots, 4)$. Найдем решения уравнения Шредингера (1) в случае $V = \psi F(|\psi|)$. Уравнение (5.2) имеет общее решение

$$\varphi = C \prod_{j=1}^{p} (t - \gamma_j)^{-\frac{1}{2}(d_j - d_{j-1})} \int F\left(\prod_{j=1}^{p} (t - \gamma_j)^{-\frac{1}{2}(d_j - d_{j-1})} \right) dt.$$

Следовательно, решением уравнения Шредингера (1) является функция

$$\psi = \exp\left[-\frac{i}{4k} \sum_{j=1}^{p} \frac{x_{d_{j-1}+1}^2 + \cdots + x_{d_j}^2}{t - \gamma_j} \right] \varphi(t). \tag{8.1}$$

Найдем решения уравнения (1), соответствующие решениям редуцированного уравнения (5.4), в предположении, что $F(|\psi|)$ — вещественная функция. Пусть $\varphi(\omega) = \rho(\omega)\exp(i\theta(\omega))$, где $\rho(\omega)$, $\theta(\omega)$ — вещественные функции. Нетрудно получить, что

$$\omega = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{-\frac{kC^2}{\rho^2} + \frac{\gamma}{2k}\rho^2 - 2\rho \int F(\rho) d\rho}}, \quad \theta = \frac{C}{\rho^2}.$$

Уравнение (5.6) при $F(|\varphi|) = \lambda |\varphi|^q$ и $\gamma = 0$ имеет решение

$$\varphi = \left[\frac{2k}{\lambda q \omega} \left(m - 2 + \frac{2}{q} \right) \right]^{1/q}.$$

Следовательно, решением уравнения Шредингера (1) является функция

$$\psi = \left[\frac{2k}{\lambda q \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2} \left(m - 2 + \frac{2}{q} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.2}$$

Уравнение (5.3) при $F(|\varphi|) = \lambda |\varphi|^q$ и $\gamma = 0$ имеет решение

$$\varphi = \left[\frac{1}{\lambda\omega} \left(\frac{4k}{q^2} - \frac{\alpha^2}{4k} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.3}$$

Ему соответствует такое решение уравнения Шредингера (I):

$$\psi = \exp\left(\frac{i\alpha}{2k} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right) \left[\frac{1}{\lambda(x_1^2 + x_2^2)} \left(\frac{4k}{q^2} - \frac{\alpha^2}{4k} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.4}$$

Уравнение (5.2) при $F(|\varphi|) = \lambda |\varphi|^q$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_p$ имеет решения

$$\varphi = C\omega^{-m/2} \exp\left(\frac{iC^q}{1 - mq/2} \omega^{1 - mq/2} \right), \quad mq \neq 2;$$

$$\varphi = C\omega^{-1/q} \exp(iC^q \ln|\omega|), \quad mq = 2.$$

Им соответствуют следующие решения уравнения Шредингера (1):

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{4k(t-\gamma_1)}\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right) Ct^{-m/2}\exp\left(\frac{iC^q}{1-mq/2}t^{1-mq/2}\right), \ mq \neq 2; \quad (8.5)$$

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{4k(t-\gamma_1)}\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right) Ct^{-1/q}\exp\left(iC^q \ln|t|\right), \ mq = 2. \quad (8.6)$$

Уравнение (6.1) обладает решением $\varphi = C$, где

$$|C|^q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{4k} - \frac{i}{q}\right).$$

В результате получаем такое решение уравнения (1):

$$\psi = C\exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t\right]. \quad (8.7)$$

Аналогичное уравнение (6.2) обладает решением $\varphi = C$, где

$$|C|^q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{4k} + \frac{i(l-m)}{2} - \frac{i}{q}\right).$$

Ему соответствует решение

$$\psi = C\exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t - \frac{i}{4kt}\sum_{j=m+1}^{l} x_j^2\right]. \quad (8.8)$$

уравнения (1).

Итак, формулы (8.1)–(8.7) определяют многопараметрические семейства точных решений уравнения (1) с нелинейностями $V = \psi F(|\psi|)$ и $V = \lambda\psi|\psi|^q$. Эти решения могут быть размножены, если воспользоваться инвариантностью уравнения (1) относительно $G(1,n)$ и $G(2,n)$. Действительно, если $\psi_1(t,x)$ есть решение, то новые решения строятся по формулам

$$\psi_2 = \psi_1\left(\frac{t}{1-\theta t}, \frac{x}{1-\theta t}\right) + \frac{ix^2}{4k}\frac{\theta}{1-\theta t},$$

$$\psi_3 = \psi_1(t, x+vt) + \frac{iv^2}{4k}t + \frac{i}{2k}vx,$$

где θ, v — параметры группы $G(1,n)$.

1. Овсянников Д.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
2. Ибрагимов И.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
3. Олвер П., Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1986.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1987, **20**, 929.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989.

6. Баранник Л.Ф., Марченко В.А., в сб. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988.
7. Gagnon L., Winternitz P., Preprint CRM-1528, Centre de recherches mathematiques, 1988.
8. Gagnon L., Winternitz P., Preprint CRM-1544, Centre de recherches mathematiques, 1988.
9. Gagnon L., Grammaticos B., Ramanl, Winternits P., Preprint CRM-1555, Centre de recherches mathematiques, 1988.
10. Fushchych W.I., Cherniha R.M., *J. Phys. A*, 1985. **18**, 3491.
11. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986.
12. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., *УМЖ*, 1986, **38**, 67.
13. Barannik L.F., Fushchych W.J., *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, 31.
14. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985.