Редукция многомерного Пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$. С использованием этих результатов проведена классификация максимальных подалгебр ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ построены анзацы, редуцирующие уравнение $\Phi(\Box u,(\nabla u)^2,u)=0$ к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных.

1. Введение. Настоящая статья посвящена редукции нелинейного волнового уравнения

$$\Phi\left(\Box u,(\nabla u)^2,u\right)=0 \tag{1}$$

в пространстве Минковского $R_{1,n}$ к двумерным уравнениям. Здесь $u=u(x)$ — скалярная функция от переменной x, $x=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in R_{1,n}$,

$$\Box u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\dots-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

$$(\nabla u)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\dots-\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Симметрийные свойства уравнения (1) при $n\le 3$ изучались в [1], а для произвольного n — в [2, 3]. Частным случаем уравнения (1) являются уравнения Клейна–Гордона, Даламбера, Лиувилля, Гамильтона–Якоби, уравнение синус-Гордона и другие. Их изучению посвящены работы [1–8]. Для уравнения (1) важной является проблема редукции. Суть ее состоит в том, что вводятся новые переменные $\omega_1(x),\dots,\omega_k(x)$, $1\le k\le n$, являющиеся функциями от x и обладающие тем свойством, что анзац $u=\varphi(\omega_1,\dots,\omega_k)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от меньшего числа переменных $\omega_1,\dots,\omega_k$. В частном случае, когда $k=1$, указанный анзац редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi=\varphi(\omega_1)$. Построение всех анзацев для уравнения (1) является очень трудной задачей. Эту трудность в значительной мере можно преодолеть в случае, когда $\omega_1,\dots,\omega_k$ являются инвариантными переменными.

Уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований Пуанкаре $P(1,n)$ пространства $R_{1,n}$. Функции $\omega_1(x),\dots,\omega_k(x)$ называются инвариантными переменными, если они образуют полную систему инвариантов некоторой подгруппы группы $P(1,n)$. Построение инвариантных переменных тесно связано с

Укр. матем. журн., 1991, **43**, № 10, 1311–1323.

задачей классификации связных подгрупп группы $P(1,n)$, которая сводится к задаче классификации подалгебр соответствующей алгебры Ли $AP(1,n)$. В работе [3] описаны максимальные подалгебры ранга n алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-сопряженности. Это позволило выделить семь анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В этой же работе построены все анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух и трех инвариантных переменных в пространствах Минковского $R_{1,2}$ и $R_{1,3}$. По редуцированным уравнениям найдены некоторые классы точных решений уравнений Клейна–Гордона, синус-Гордона и других уравнений.

Настоящая статья является продолжением исследований, выполненных в [7, 8]. В ней полностью изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры $AP(1,n)$. Показано, что инварианты алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$ получаются из инвариантов ортогональной алгебры $AO(n-1)$, если в последних провести нелинейную замену переменных, явный вид которой определяется структурой инвариантного подпространства для подалгебры алгебры $AO(n-1)$. Результаты, относящиеся к инвариантам алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$, позволили дать классификацию максимальных подалгебр рачга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ построены анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2. Подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$ можно использовать для редукции нелинейных уравнении Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Эйконала в пространстве Минковского $R_{1,n}$.

2. Алгебра инвариантности уравнения (1). Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$, базис которой составляют такие векторные поля:

$$\begin{aligned}&P_\mu=\partial_\mu,\quad J_{0a}=x_0\partial_a+x_a\partial_0,\quad J_{ab}=x_b\partial_a-x_a\partial_b,\\&\mu=0,1,\ldots,n;\quad a,b=1,2,\ldots,n.\end{aligned}\tag{2}$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}&[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\beta}-g_{\beta\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\&[P_a,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta,\quad [P_\alpha,P_\beta]=0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $g_{00}=-g_{11}=\cdots=-g_{nn}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,1,\ldots,n$. Алгебра $AP(1,n)$ содержит ортогональную алгебру $AO(n)=\langle J_{ab}\mid a,b=1,\ldots,n\rangle$, псевдоортогональную алгебру $AO(1,n)=\langle J_{\mu\nu}\mid \mu,\nu=0,1,\ldots,n\rangle$, коммутативную алгебру $V=\langle P_0,P_1,\ldots,P_n\rangle$. Важной подалгеброй алгебры $AP(1,n)$ является расширенная специальная алгебра Галилея $A\tilde{G}(2,n-1)=\langle M,T,P_1,\ldots,P_{n-1},G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle\oplus(AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$, где $M=P_0+P_n$, $T=\frac{1}{2}(P_0-P_n)$, $G_a=J_{0a}-J_{an}$, $a=1,\ldots,n-1$, $AO(n-1)=\langle J_{ab}\mid a,b=1,\ldots,n-1\rangle$. Ее можно определить как нормализатор изотропного пространства $\langle P_0+P_n\rangle$ в алгебре $AP(1,n)$. Алгебра $A\tilde{G}(2,n-1)$ содержит расширенную изохронную алгебру Галилея $A\tilde{G}(0,n-1)=\langle M,P_1,\ldots,P_{n-1},G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle\oplus AO(n-1)$.

Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $AP(1,n)$ следует описать подалгебры алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $AP(1,n)$ называются $P(1,n)$-эквивалентными, если для некоторого $g\in P(1,n)$ алгебры gK_1g^{-1} и K_2 обладают одними и теми же инвариантами. Две максимальные подалгебры K_1 и K_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда K_1 и K_2 $P(1,n)$-сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AP(1,n)$ эквивалентных между собой, существует с точностью до $P(1,n)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра. В настоящей статье предложен метод, с помощью которого подалгебры такого рода можно полностью описать.

Пусть K — некоторая подалгебра алгебры $AP(1,n)$. Если $P_0 \in K$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно K, не зависит от x_0 и потому является решением уравнения

$$\Phi\left(-\Box u, -(\nabla u)^2, u\right) = 0 \tag{4}$$

в евклидовом пространстве E_n, где

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Уравнение (4) инвариантно относительно алгебры Евклида $AE(n) = \langle P_1, \ldots, P_n, J_{12}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle$, генераторы которой имеют вид (2). Аналогично, если $P_0+P_n \in K$, то любое решение уравнения (1), инвариантное относительно K, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ и потому является решением уравнения (4) в евклидовом пространстве E_{n-1}. Таким образом, случаи $P_0, P_0 + P_n \in K$ свелись к задаче классификации подалгебр алгебр Евклида $AE(n)$ и $AE(n-1)$ и мы их рассмотрим отдельно.

В работе будут использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&AO[r,s] = \langle J_{ab} \mid a,b = r,\ldots,s\rangle, \quad r \le s;\\
&AE[r,s] = \langle P_r,\ldots,P_s\rangle \oplus AO[r,s], \quad r \le s;\\
&AE_1[r,s] = \langle G_r,\ldots,G_s\rangle \oplus AO[r,s] \quad r \le s;
\end{aligned}$$

π_0, ω, φ — проектирование $A\tilde{G}(2,n-1)$ на $\langle J_{0n}\rangle$, $AO[1,n-1]$ и $\langle G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle$ соответственно; ω_0 — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $AO(1,n)$; $\mathfrak{M}[r,s] = \langle G_r,\ldots,G_s,P_r, \ldots,P_s\rangle$ — векторное пространство над R, натянутое на $G_r,\ldots,G_s,P_r,\ldots,P_s$.

3. Инварианты расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,\, n-1)$. При изучении структуры инвариантов произвольной подалгебры алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$ используется понятие примарной части подалгебры ортогональной алгебры $AO(n-1)$, введенное в работе [9].

Предложение 1. *Пусть $l = q_1 d_1$, $m_0 \ge 0$, $L = (L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]) \subset\!\!\!\!+ F$ — полупрямая сумма подалгебры $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$, и примарной алгебры $F \subset AO[m_0+1, m_0+l]$, являющейся подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[m_0+1, m_0+d_1]$, $AO[m_0 d_1+1, m_0+2d_1]$,…, $AO[m_0+(q_1-1)d_1+1, m_0+q_1 d_1]$. Если P_0, $P_0+P_n \notin L$, $L \cap V = 0$ и $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1},\ldots,G_{m_0+q_1 d_1}\rangle$, то L сопряжена с алгеброй $\mathfrak{N}_1 \oplus F$, где $\mathfrak{N}_1$ обладает базисом*

$$\begin{aligned}
&G_{m_0+1} + \gamma_1 P_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+d_1} + \gamma_1 P_{m_0+d_1},\\
&G_{m_0+d_1+1} + \gamma_2 P_{m_0+d_1+1}, \ldots, G_{m_0+2d_1} + \gamma_2 P_{m_0+2d_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&G_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \gamma_{q_1} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots, G_{m_0+q_1 d_1} + \gamma_{q_1} P_{m_0+q_1 d_1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Если $P_0, P_0 + P_n \notin L$, $L \cap V = 0$ *и* $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1}, \dots, G_{m_0+(q_1-1)d_1} \rangle$, *то* L *сопряжена с алгеброй* $\mathfrak{N}_2 \oplus F$, *где* $\mathfrak{N}_2$ *обладает базисом*

$$\begin{gathered}
G_{m_0+1} + \gamma_1 P_{m_0+1} + \lambda_1 P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, G_{m_0+d_1} + \gamma_1 P_{m_0+d_1} + \lambda_1 P_{m_0+q_1 d_1}, \\
G_{m_0+d_1+1} + \gamma_2 P_{m_0+d_1+1} + \lambda_2 P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, \\
G_{m_0+2d_1} + \gamma_2 P_{m_0+2d_1} + \lambda_2 P_{m_0+q_1 d_1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
G_{m_0+(q_1-2)d_1+1} + \gamma_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-2)d_1+1} + \lambda_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, \\
G_{m_0+(q_1-1)d_1} + \gamma_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-1)d_1} + \lambda_{q_1-1} P_{m_0+q_1 d_1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. В силу условия $P_0 + P_n \notin L$ подалгебра $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ коммутативная. Поэтому первая часть предложения 1 вытекает из работы [10]. Пусть далее $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1}, \dots, G_{m_0+(q_1-1)d_1} \rangle$. Тогда можно предполагать, что $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ есть подпрямая сумма алгебры $\langle G_{m_0+1} + \delta_1 P_{m_0+1}, \dots, G_{m_0+(q_1-1)d_1} + \delta_{(q_1-1)d_1} P_{m_0+(q_1-1)d_1} \rangle$ и алгебры $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, P_{m_0+q_1 d_1} \rangle$. при этом $\delta_1 = \dots = \delta_{d_1}$, $\delta_{d_1+1} = \dots = \delta_{2d_1}, \dots, \delta_{(q_1-2)d_1+1} = \dots = \delta_{(q_1-1)d_1}$.

Алгебра $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{q-1}$, где $\mathfrak{M}_j$ — алгебра, обладающая базисом

$$\begin{gathered}
G_{m_0+(j-1)d_1+1} + \gamma_j P_{m_0+(j-1)d_1+1} + \delta^j_{11} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \dots + \delta^j_{1d_1} P_{m_0+q_1 d_1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
G_{m_0+jd_1} + \gamma_j P_{m_0+jd_1} + \delta^j_{d_1 1} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \dots + \delta^j_{d_1 d_1} P_{m_0+q_1 d_1}, \\
j = 1, \dots, q_1 - 1.
\end{gathered}$$

Связывающая матрица

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} \delta^j_{11} & \cdots & \delta^j_{1d_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^j_{d_1 1} & \cdots & \delta^j_{d_1 d_1} \end{pmatrix}$$

сплетает представления неприводимой части алгебры F в пространствах $\langle G_{m_0+(j-1)d_1+1}, \dots, G_{m_0+jd_1} \rangle$ и $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, P_{m_0+q_1 d_1} \rangle$. Поэтому $\Delta_j = \mu_j C_j$, где μ_j — вещественное число, а C_j — ортогональная матрица. $O(n)$-автоморфизм, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} E_{d_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & C_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & E_{d_1} \end{pmatrix}$$

оставляет неизменным F, $\mathfrak{M}_l$ при $l \neq j$ и преобразует пространство $\mathfrak{M}_j$ в пространство, которому соответствует связывающая матрица $\mu_j E_{d_1}$. Предложение доказано.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$, обладающая ненулевой проекцией $\omega(L)$ на $AO(n-1)$, P_0, $P_0 + P_n \notin L$. Обозначим через $A_1, \dots, A_t$ примарные части $\omega(L)$. Тогда алгебра $L \cap \mathfrak{M}[1, n-1]$ коммутативна и инвариантна относительно $\omega(L)$. Согласно работе [11] она является прямой суммой

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_t \oplus \widetilde{W}, \tag{7}$$

подалгебр W_i, $i=1,\ldots,t$, $\widetilde{W}$, удовлетворяющих соотношениям $[W_i,A_i]=[A_i,W] = W_i$, $[A_j,W_i]=0$ при $j\neq i$, $\widetilde{W}=\{y\in W[L,y]=0\}$. Изучим структуру инвариантов алгебр $L_i=W_i\oplus A_i$, $i=1,\ldots,t$, так как они в значительной мере определяют структуру инвариантов алгебры L. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением алгебры L_1. Ее примарная часть совпадает с A_1 и является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1,d_1]$, $AO[d_1+1,2d_1]$,$\ldots$,$AO[(q_1-1)d_1+1,q_1d_1]$. Инварианты алгебры L_1 будем рассматривать в пространстве функций от переменных $x_0-x_n,x_1,\ldots,x_{q_1d_1}$. Если $W_1\neq 0$, то всегда можно предполагать, что $\varphi(L_1)=\langle G_1,\ldots,G_{q'd_1}\rangle$, где $1\leq q'\leq q_1$. В зависимости от значения q' рассмотрим три случая.

a) Случай $q'=q_1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n-1)$-сопряженности обладает базисом (5) (если положить $m_0=0$). Так как ранг алгебры W_1 равен q_1d_1, то она имеет два основных инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять функции x_0-x_n и

$$\sigma=-x_0^2+\sum_{i=1}^{q_1}\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\gamma_i}\left(x^2_{(i-1)d_1+1}+\cdots+x^2_{id_1}\right)+x_n^2.$$

Так как каждая из них является инвариантом алгебры A_1, то система функций x_0-x_n, σ образует полную систему инвариантов алгебры L_1.

b) Случай $q'=q_1-1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n-1)$-сопряженности обладает базисом (6) (если положить $m_0=0$). Так как ранг алгебры W_1 равен $(q_1-1)d_1$, то ее полная система инвариантов состоит из d_1+2 функций. Очевидно, инвариантами W_1 являются функции x_0-x_n и

$$\sigma=-x_0^2+\sum_{i=1}^{q_1-1}\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\gamma_i}\left(x^2_{(i-1)d_1+1}+\cdots+x^2_{id_1}\right)+x_n^2.$$

Эти инварианты функционально независимы. Найдем остальные d_1 функционально независимых инварианта алгебры W_1, которые дополняют систему двух инвариантов x_0-x_n и σ алгебры W_1 до полной системы инваиантов W_1. Легко убедиться, что инвариантом алгебры W_1 является функция

$$y_1=\sum_{i=1}^{q_1-1}\frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+1}}{x_0-x_n+\gamma_i}-x_{(q_1-1)d_1+1}. \tag{8}$$

Подействовав на нее генератором $J_{1j}+J_{d_1+1,d_1+j}+\cdots+J_{(q_1-1)d_1+1,(q_1-1)d_1+j}$, $j=2,\ldots,d_1$, получим такой инвариант алгебры W_1:

$$y_j=\sum_{i=1}^{q_1-1}\frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+j}}{x_0-x_n+\gamma_i}-x_{(q_1-1)d_1+j}. \tag{9}$$

Мы нашли d_1 функционально независимых инварианта $y_1,\ldots,y_{d_1}$ алгебры W_1, которые вместе с инвариантами x_0-x_n и σ образуют полную систему инвариантов алгебры W_1. Запишем генераторы примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой алгебр $AO[1,d_1]$, $AO[d_1+1,2d_1]$,$\ldots$, $AO[(q_1-1)d_1+1,q_1d_1]$ в новых переменных $y_1,y_2,\ldots,y_{d_1}$. Рассмотрим, например, генератор

$$\tilde{J}_{ab}=J_{ab}+J_{d_1+a,d_1+b}+\cdots+J_{(q_1-1)d_1+a,(q_1-1)d_1+b},\quad a<b,\ 1\leq a,\ b\leq d_1.$$

Используя формулы (7) и (8), получаем, что в переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{d_1}$ генератор $\tilde{J}_{ab}$ принимает вид $\tilde{J}_{ab} = y_a\frac{\partial}{\partial y_b} - y_b\frac{\partial}{\partial y_a}$. Отсюда вытекает, что A_1 можно рассматривать как подалгебру ортогональной алгебры $A\tilde{O}(d_1) = \langle \tilde{J}_{12}, \ldots, \tilde{J}_{d_1-1,d_1}\rangle$, действующую в евклидовом пространстве $\tilde{E}_d$, состоящем из d_1-мерных векторов $(y_1, y_2, \ldots, y_{d_1})$.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1, в пространстве функций от $y_1, y_2, \ldots, y_{d_1}$ состоит из $d_1 - r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1, \ldots, \theta_{d_1-r}$. Используя эти функции, легко находим полную систему инвариантов алгебры L_1. Она состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $\theta_1, \ldots, \theta_{d_1-r}$, где вместо $y_1, \ldots, y_{d_1}$ подставлены из выражения (7) и (8).

c) Случай $q' < q_1 - 1$. Аналогично случаю b) A_1 можно рассматривать как подалгебру примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой ортогональных алгебр $A\tilde{O}[1, d_1]$, $A\tilde{O}[d_1+1, 2d_1]$,…, $A\tilde{O}[(q_1-q')d_1-d_1+1, (q_1-q')d_1]$. Генераторы этих алгебр записаны в переменных $y_1, \ldots, y_{d_1}, \ldots, y_{(q_1-q')d_1}$, которые являются инвариантами алгебры W_1, не зависящими от u.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от переменных $y_1, \ldots, y_{(q_1-q')d_1}$, состоит из $(q_1 - q')d_1 - r$ функций $\theta_1, \ldots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$. Используя их, получаем, что полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $\theta_1, \ldots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$.

Результаты, изложенные в настоящем пункте, сводят задачу построения инвариантов произвольной подалгебры алгебры $AP(1,n)$ к задаче построения инвариантов неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k \le n$. Известно [12], что неприводимая подалгебра L либо полупроста, либо является полупрямой суммой $L = S \oplus \mathfrak{Z}(L)$ полупростого идеала S и одномерного центра $\mathfrak{Z}(L)$ Задача построения инвариантов полупростой алгебры в общем случае неразрешима в квадратурах. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем предполагать, что если, например, $_1$ — примарная часть алгебры $\omega(L)$, то она является подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1]$, $AO[d_1+1, 2d_1]$,…, $AO[(q_1-1)d_1+1, q_1d_1]$, т.е. рассматриваются лишь те неприводимые подалгебры алгебры $AO[(i-1)d_1+1, id_1]$, которые совпадают с $AO[(i-1)d_1+1, id_1]$, $i = 1, \ldots, q_1$. Этому условию удовлетворяют, очевидно, все разрешимые подалгебры алгебры $AP(1,n)$. Однако класс подалгебр алгебры $AP(1,n)$, который выделяется с помощью данного условия, является более широким, чем класс разрешимых подалгебр.

4. Максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Используя результаты, изложенные в пп. 2 и 3, найдем максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Пусть $d_1, \ldots, d_t$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям $0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_t = m$. Для любых двух натуральных чисел r и s, $r \le s$, положим

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \ldots, G_s + \gamma P_s\rangle \oplus AO[r, s], \qquad \gamma \in R.$$

Теорема 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$ и P_0, $P_0 + P_n \notin L$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $B_1 = \Phi(d_0+1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-2]$;

2) $B_2 = L_1 \oplus \Phi(d+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-1]$, где $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 обладает базисом (6) при $m_0 = 0$, $l = d$, A_1 — диагональ в $AO[1, d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(q-1)d_1+1, q_1d_1]$;

3) $B_3 = AO[1,d] \oplus \Phi(d+1,d_2,\gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_t) \oplus AE[m+1,n-1]$, $d = 1,\ldots,n-2$, $m = d+1,\ldots,n-1$, $n \geq 4$;

4) $B_4 = L_1 \oplus AE[m+1,n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = m$, A_1 *— диагональ в* $AO[1,d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(q_1-1)d_1+1,q_1d_1]$, $m = 2,\ldots,n-1$, $n \geq 4$;

5) $B_5 = L_1 \oplus AE[m+1,n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = m = 2q_1$, $A_1 = \langle J + \alpha M\rangle$, *а* $J = J_{12} + \cdots + J_{l-1,l}$, $m = 2,\ldots,n-1$, $n \geq 4$;

6) $B_6 = L_1 \oplus \Phi(d+1,d_2,\gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_t) \oplus AE[m+1,n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus \langle J + \alpha M\rangle$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = d = 2q_1$, $J = J_{12} + \cdots + J_{d-1,d}$, $m = d+1,\ldots,n-1$;

7) $B_7 = AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $m = 1,\ldots,n-1$; $n \geq 2$;

8) $B_8 = \langle J_{12} + \alpha P_0\rangle \oplus AE[3,n]$, $\alpha > 0$, $n \geq 2$;

9) $B_9 = \langle J_{12} + M\rangle \oplus AE[3,n-1]$, $n \geq 3$;

10) $B_{10} = \langle J_{12} + \alpha P_3\rangle \oplus AE[4,n]$, $\alpha > 0$, $n \geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L \cap V = 0$. Пусть $\omega(L) \neq 0$, $A_1,\ldots,A_t$ — примарные части алгебры $\omega(L)$, $W_1,\ldots,W_t$ — подпространства алгебры $L \cap \mathfrak{M}[1,n-1]$, определяемые разложением (7). По определению A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1,d_1]$, $AO[d_1+1,2d_1]$,..., $AO[(q_1-1)d_1+1,q_1,d_1]$. В зависимости от структуры пространства W_1 рассмотрим три случая.

а) Случай $\varphi(W_1) = \langle G_1,\ldots,G_{q_1d_1}\rangle$. В силу предложения 1 можно считать, что W_1 обладает базисом (5), где $m_0 = 0$. Поэтому полная система инвариантов алгебры W_1 состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $x_{q_1d_1+1},\ldots,x_{n-1}$. Следовательно, любой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \sigma, x_{q_1d_1+1},\ldots,x_{n-1})$. В силу максимальности L отсюда вытекает, что $AO[1,d_1] \subset L$, а значит, $q_1 = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с алгеброй $\Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1)$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = \Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1) \oplus L'$. Через конечное число шагов t_1, $t_1 \leq t$, выделим в качестве прямых слагаемых все подалгебры $W_i \oplus A_i$ указанного вида, т.е.

$$L = \Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t_1-1}+1,d_{t_1},\gamma_{t_1}) \oplus \overline{L}.$$

Если $\overline{L} = 0$, то, очевидно $d_{t_1} = n-2$ и мы получаем алгебру типа 1 теоремы 1.

Пусть $\omega(\overline{L}) = 0$ и $\overline{L} \neq 0$. Так как $\overline{L} \cap V = 0$, то с точностью до $P(1,n)$-сопряженности $\varphi(\overline{L}) = \langle G_{m+1},\ldots,G_{n-2}\rangle$, где $m = d_{t_1}$. Поэтому алгебра $\overline{L}$ обладает либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1}P_{m+1},\ldots,G_{n-2} + \gamma_{n-2}P_{n-2}$, либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1}P_{m+1} + \lambda_{m+1}P_{n-1},\ldots,G_{n-2} + \gamma_{n-2}P_{n-2} + \lambda_{n-2}P_{n-1}$, где $\lambda_{m+1}^2 + \cdots + \lambda_{n-2}^2 \neq 0$. В первом случае $\overline{L} = \Phi(m+1,m+1,\gamma_{m+1}) \oplus \cdots \oplus \Phi(n-2,n-2,\gamma_{n-2})$ и потому алгебра L, относится к типу 1 теоремы. Во втором случае алгебра L относится к типу 2 теоремы.

Пусть далее $\omega(\overline{L}) \neq 0$. Тогда примарными частями алгебры $\overline{L}$ являются алгебры $A_{t_1+1},\ldots,A_t$. Алгебра A_{t_1+1} является подпрямой суммой алгебр $AO[m+1,m+d]$, $AO[m+d+1,m+2d]$,..., $AO[m+(q-1)d+1,m+qd]$, где $m = d_{t_1}$. Допустим, что $W_{t_1+1} = \cdots = W_t = 0$. Если $q > 1$, то инвариантами алгебры A_{t_1+1}, а значит, и алгебры L являются функции $\varphi_1 = x_{m+1}^2 + \cdots + x_{m+d}^2$, $\varphi_2 = x_{m+d+1}^2 + \cdots + x_{m+d}^2$. так как инварианты $x_0 - x_n$, φ_1 и φ_2 алгебры L функционально независимы, то они образуют полную систему инвариантов алгебры L. Следовательно, любой другой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \varphi_1, \varphi_2)$ и потому $P_0 + P_n \in L$. Последнее соотношение противоречит предположению относительно алгебры L. Значит, $q = 1$. Аналогично доказываем, что $t_1 + 1 = t$. Следовательно, $L = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t_1-1} + 1, t_{t_1}, \gamma_{t_1}) \oplus AO[m + 1, m + d] \oplus \overline{L}'$, где $\omega(\overline{L}') = 0$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(\overline{L}') = \langle G_{m+d+1}, \ldots, G_{n-1}\rangle$ и потому $\overline{L}'$ обладает базисом $G_{m+d+1} + \gamma_{m+d+1}P_{m+d+1}, \ldots, G_{n-1} + \gamma_{n-1}P_{n-1}$. это означает, что алгебра L относится к типу 3 теоремы.

Допустим, что $W_{t_1+1} \neq 0$. Тогда $\varphi(W_{t_1+1}) = \langle G_{m+1}, \ldots, G_{m+q'd}\rangle$, где $1 \leq q' \leq q - 1$. В силу результатов п. 3 инвариантами алгебры $L_{t_1+1} = W_{t_1+1} \oplus A_{t_1+1}$ являются функции $x_0 - x_n$, $\theta_1, \ldots, \theta_{(q-q')d-r}$ (см. п. 3с). Они функционально независимы и каждая из них является инвариантом алгебры L. Отсюда вытекает, что если $q' < q - 1$, то $(q - q')d - r \geq 3$ и потому полная система инвариантов алгебры L состоит более чем из трех функций. Это противоречит предположению относительно алгебры L. Таким образом, $q' = q-1$ и потому в силу предложения 1 W_{t_1+1} обладает базисом (6). Но тогда инвариантами алгебры L_{t_1+1}, а значит, и алгебры L являются функции x_0-x_n, $y^2_{m+1}+\cdots+y^2_{m+d}$, где $y_{m+1}, \ldots, y_{m+d}$ заданы выражениями (8) и (9). Докажем, что $t_1 + 1 = t$. Действительно, пусть $t_1 + 1 < t$ Примарная алгебра A_{t_1+2} является подпрямой суммой алгебр $AO[m_1+1, m_1+d_1]$, $AO[m_1+d_1+1, m_1+2d_1]$,..., $AO[m_1+(q_1-1)d_1+1, m_1+q_1d_1]$, где $m_1 = (q-1)d$. Если $W_{t_1+2} = 0$, то инвариантом алгебры A_{t_1+2}, а значит, и алгебры L является функция $x^2_{m_1+1} + \cdots + x^2_{m_1+d_1}$. Следовательно, полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n$, $y^2_{m+1} + \cdots + y^2_{m+d}$, $x^2_{m_1+1} + \cdots + x^2_{m_1+d_1}$. Но тогда $P_0+P_n \in L$, что противоречит предположению относительно алгебры L. Полученное противоречие доказывает, что если $t_1+1 < t$, то $W_{t_1+2} \neq 0$. Аналогично, как и выше, доказываем, что $\varphi(W_{t_1+2}) = \langle G_{m_1+1}, \ldots, G_{m_1+(q_1-1)d_1}\rangle$. Но тогда инвариантом алгебры $L_{t_1+2} = W_{t_1+2} \oplus A_{t_1+2}$ является функция $y^2_{m_1+1} + \cdots + y^2_{m_1+d_1}$, где $y_{m_1+1}, \ldots, y_{m_1+d_1}$ заданы выражениями (8) и (9), если положить $x_{(i-1)d_1+1} = x_{m_1+(i-1)d_1+1}$. Таким образом, мы нашли три функционально независимых инварианта x_0-x_n, $y^2_{m+1}+\cdots+y^2_{m+d}$, $y^2_{m_1+1}+\cdots+y^2_{m_1+d_1}$ алгебры L. Отсюда следует, что $P_0 + P_n \in L$ и мы снова приходим к противоречию. Следовательно, $t_1 + 1 = t$ и потому алгебра L относится к типу 2 или 6 теоремы.

b) Случай $\varphi(W_1) = \langle G_1, \ldots, G_{q'd_1}\rangle$, $1 \leq q' < q_1$. Из рассуждений, изложенных выше, вытекает, что $q' = q_1 - 1$ и потому W_1 обладает базисом (6) при $m_0 = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в п. a), доказываем далее, что $t = 1$. Таким образом, алгебра L относится к одному из типов 4, 5 теоремы.

c) Случай $\varphi(W_1) = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в пп. a) и b), получаем $W_2 = \cdots = W_t = 0$. Следовательно, $t = 1$ и потому алгебра L относится к типу 7 или 9 теоремы. Теорема доказана.

Опишем далее максимальные подалгебры ранга $n - 2$ алгебры $A\tilde{G}(2, n - 1)$ с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$. Каждая такая подалгебра представляется в виде полупрямой суммы $L \mathbin{⋺} \langle J_{0n} + X\rangle$, где L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$, а $X \in A\tilde{G}(0, n - 1)$.

Предложение 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$, для которой существует элемент вида $J_{0n} + X$, $X \in A\tilde{G}(0, n - 1)$, содержащийся в нормализаторе алгебры L. Если $P_0, P_0 + P_n \notin L$, то L $P(1, n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$;

2) $AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+2,\dots,n-2$; $n \geq 4$;

3) $AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,d_2] \oplus AO[d_2+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $d_1 = 1,\dots,n-3$; $d_2 = d_1+1,\dots,n-2$; $m = d_2+1,\dots,n-1$; $n \geq 4$;

4) $AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$, $m = 1,\dots,n-2$; $n \geq 3$;

5) $AO[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $d = 1,\dots,n-2$; $m = d+1,\dots,n-1$; $n \geq 3$.

Доказательство. Пусть $\omega(L) \neq 0$, $A_1,\dots,A_t$ — примарные части $\omega(L)$ и A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1,d_1], AO[d_1+1,2d_1],\dots,AO[(q_1-1)d_1+q_1d_1]$. Допустим, что $W_1 \neq 0$. Тогда из условия $[J_{0n}+X,L] \subset L$ вытекает $W_1 = \langle G_1,\dots,G_{q'd_1}\rangle$, где $q' \geq 1$. В силу максимальности L имеем $AO[1,d_1] \subset L$ и потому $q' = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с $AE_1[1,d_1]$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = AE_1[1,d_1] \oplus L'$. Если $L' = 0$, то $d_1 = n-3$ и алгебра L относится к типу 1 предложения 2. Пусть далее $L' \neq 0$. При этом условии $\omega(L') \neq 0$ и алгебры $A_2,\dots,A_t$ являются примарными частями алгебры $\omega(L')$. Из условия $[J_{0n}+X,L] \subset L$ и максимальности L вытекает $W_2 = \dots = W_t = 0$. Так как ранг алгебры L равен $n-3$, то $t \leq 3$. Рассмотрим случай $t = 2$. Нетрудно убедиться, что A_2 — ортогональная алгебра, совпадающая с $AO[d_1+1,n-1]$. Если $d_1+1 = n-2$, то $AO[d_1+1,n-1] = \langle J_{n-2,n-1}\rangle$ и потому $L = AE_1[1,d_1] \oplus \langle J_{n-2,n-1} + \alpha M\rangle$. Используя соотношение $[J_{0n}+X,L] \subset L$, получаем $\alpha = 0$. Таким образом, алгебра L относится к типу 2 предложения 2. Если $d_1+1 < n-2$, то $AO[d_1+1,n-1] \subset L$ и потому $L = AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,n-1]$. Если $t = 3$, то аналогичными рассуждениями доказываем, что L относится к типу 3 предложения.

Допустим далее, что $W_1 = \dots = W_t = 0$. Если $t = 1$, то, очевидно, $L = AO[1,n-2]$. Если $t = 2$, то $L = AO[m+1,n-1]$.

Пусть $\omega(L) = 0$. В этом случае $L = \langle G_1\rangle$ и, значит, $n = 3$, т.е. получаем алгебру типа 1 предложения 2. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(2,n-1)$, $\pi_0(L) = \langle J_{0n}\rangle$, $L \cap V \subset \langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$;

2) $L_2 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

3) $L_3 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{n-2,n-1} + cJ_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$; $c > 0$;

4) $L_4 = (AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$;

5) $L_5 = (AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1}\rangle$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

6) $L_6 = (AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,d_2] \oplus AO[d_2+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $d_1 = 1,\dots,n-3$; $d_2 = d_1+1,\dots,n-2$, $m = d_2+1,\dots,n-1$; $n \geq 5$;

7) $L_7 = (AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-2$; $n \geq 3$;

8) $L_8 = (AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1}\rangle$, $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

9) $L_9 = (AO[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $d = 1,\dots,n-2$; $m = d+1,\dots,n-1$; $n \geq 3$.

Доказательство. Классификация всех максимальных подалгебр ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(2,n-1)$, удовлетворяющих условию теоремы 2, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений максимальных подалгебр F ранга $n-3$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{0n}+X\rangle$, $X \in A\tilde{G}(0,n-1)$.

1°. Алгебра $F_1 = AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,n)}F_1$ алгебры F_1 в $AP(1,n)$ совпадает с алгеброй $F_1 \oplus K$, где $K = \langle P_0+P_n, P_{n-2}, P_{n-1}, J_{n-2,n-1}, J_{0n}\rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры K с точностью до сопряженности относительно группы внутренних автоморфизмов. Алгебра K содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$: $\langle J_{0n}\rangle$, $\langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$, $\alpha>0$, $\langle J_{n-2,n_1}+cJ_{0n}\rangle$, $c>0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга $n-2$ алгебры F_1: $F_1\oplus\langle J_{0n}\rangle$, $F_1\oplus\langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$, $\alpha>0$, $F_1\oplus\langle J_{n-2,n_1}+cJ_{0n}\rangle$, $c>0$.

2°. Алгебра $F_2 = AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,n)}F_2$ алгебры F_2 в $AP(1,n)$ совпадает с алгеброй $F_2 \oplus K$, где $K = \langle P_0+P_n, P_{n-1}, J_{0n}\rangle$. Алгебра K содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$: $\langle J_{0n}\rangle$, $\langle J_{0n}+\alpha J_{n-1}\rangle$, $\alpha>0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга $n>2$, содержащие F_2: $F_2\oplus\langle J_{0n}\rangle$, $F_2\oplus\langle J_{0n}+\alpha J_{n-1}\rangle$, $\alpha>0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(2,n-1)$ и $L\cap V \subset \langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AE[1,n-1]$;

2) $AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\geq 2$;

3) $AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-1] \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $m=2,\dots,n-1$; $n\geq 3$;

4) $\langle G_1+P_0-P_n\rangle \oplus AE[2,n-1]$, $n\geq 2$;

5) $(AE_1[1,m]\oplus AE[m+1,n-2])\oplus\langle J_{0n}\rangle$, $m=1,\dots,n-2$; $n\geq 3$;

6) $\Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1)\oplus\cdots\oplus\Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_1)\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\geq 2$;

7) $\langle J_{0n}+\alpha P_1\rangle \oplus AE[2,n-1]$, $n\geq 2$; $\alpha>0$;

8) $(AE_1[1,m]\oplus\langle J_{0n}+\alpha P_{m+1}\rangle)\oplus AE[m+2,n-1]$, $m=1,\dots,n-2$; $\alpha>0$; $n\geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L\cap V=0$. Если $\pi_0(L)=\langle J_{0n}\rangle$, то L является полупрямой суммой $K \niplus \langle J_{0n}+X\rangle$ максимальной подалгебры K ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$ и одномерной подалгебры $\langle J_{0n}+X\rangle \subset A\tilde{G}(2,n-1)$. Используя описание максимальных подалгебр ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$, изложенное в теореме 1, и доказательство теоремы 2, легко проводим классификацию подалгебр, удовлетворяющих указанным требованиям.

Если $\pi_0(L)=0$, то доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

5. Максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. Подалгебра $L\subset AP(1,n)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$, относящаяся к классу 0, и $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1=AO[0,m]\oplus AE[m+1,n-2]$, $m=2,\dots,n-2$; $n\ge 4$;

2) $F_2=AO[1,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\ge 3$;

3) $F_3=\langle J_{12}+\alpha P_0, J_{34}+\beta P_0\rangle\oplus AE[5,n]$, $n\ge 4$;

4) $F_4=\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle\oplus AO[3,m]\oplus AE[m+1,n]$, $m=3,\dots,n$; $n\ge 3$;

5) $F_5=AO[0,m]\oplus AE[m+1,n-3]\oplus\langle J_{n-2,n-1}+\alpha P_n\rangle$, $m=2,\dots,n-3$; $\alpha>0$; $n\ge 5$;

6) $F_6=AO[0,d_1]\oplus AO[d_1+1,d_2]\oplus AO[d_2+1,m]\oplus AE[m+1,n]$, $d_1=2,\dots,n-2$; $d_2=d_1+1,\dots,n-1$; $m=d_2+1,\dots,n$; $n\ge 4$;

7) $F_7=AO[0,d]\oplus AO[d+1,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $d=2,\dots,n-2$; $m=d+1,\dots,n-1$; $n\ge 4$;

8) $F_8=AO[0,m]\oplus AO[m+1,d]\oplus AE[d+1,n]$, $m=1,\dots,n-1$; $d=m+1,\dots,n$; $n\ge 2$.

Доказательство. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$, $L\cap V=0$ и подалгебра $\omega_0(L)$ относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L-подпространств $V_0,V_1,\dots,V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0=\langle P_0,P_1,\dots,P_{k_0}\rangle$, $V_1=\langle P_{k_0},\dots,P_{k_0+k_1}\rangle$, …, $V_s=\langle P_{\sigma+1},\dots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma=k_0+k_1+\dots+k_{s-1}$, $\sigma+k_s=n$, $k_0\ge 0$, $k_1\ge 1$, $i=1,\dots,s$. Здесь V_0 — псевдоевклидово пространство типа $(1,k_0)$, если $k_0\ne 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i=1,\dots,s$. Если $k_0=0$, то $V_0=\langle P_0\rangle$. Отсюда вытекает, что алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой подалгебр $A_1=AO[1,k_1]$, …, $A_s=AO[\sigma+1,\sigma+k_s]$. Пусть $A_1\ne 0$, а $A_2=\dots=A_s=0$. Тогда $k_1=n-1$ и потому L относится к типу 2 или 4 теоремы 4. Пусть $A_1\ne 0$, $A_2\ne 0$, а $A_3=\dots=A_s=0$. Нетрудно убедиться, что алгебра L относится к одному из типов 3, 8 теоремы 4. Если $A_1\ne 0$, $A_2\ne 0$, $A_3\ne 0$, то вследствие максимальности L имеем $P_0\in L$, что противоречит предположению.

Пусть далее $k_0\ne 0$. Тогда $k_0\ge 2$ и алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой алгебр $A_0=AO[1,k_0]$, $A_1=AO[k_0+1,k_0+k_1]$, …, $A_s=AO[\sigma+1,\sigma+k_s]$. Если $A_1=\dots=A_s=0$, то, очевидно, $k_0=n-2$ и L относится к типу 1 теоремы 4. Пусть $A_1\ne 0$, $A_2=\dots=A_s=0$. Если допустить, что $k_1>3$, то $L=AO[0,k_0]\oplus AO[k_0+1,n-1]$. Если $k_1=2$, то $1+k_0=n-2$, т.е. $k_0=n-3$. Следовательно, получаем такие алгебры: $AO[0,k_0]\oplus AO[k_0+1,n-1]$, $AO[0,n-3]\oplus\langle J_{n-2,n-1}+\alpha P_n\rangle$, $\alpha>0$.

Пусть $A_1\ne 0$, $A_2\ne 0$, $A_3=\dots=A_s=0$. Тогда $k_0+k_1+k_2=3$ и алгебра L относится к типу 6 теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$ и $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) B_1–B_{10} теоремы 1;

2) F_1–F_8 теоремы 4;

3) L_2, L_3, L_5, L_7–L_9 теоремы 2.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что каждая из подалгебр F_i теоремы 4, $i=1,\dots,7$, максимальна в алгебре $AP(1,n)$. Исследуем на максимальность алгебры, представленные в теореме 2. Если алгебра L теоремы 2 не является максимальной в алгебре $AP(1,n)$, то она содержится в некоторой максимальной подалгебре L' ранга $n-2$, относящейся к классу 0. Так, для алгебры L_1 соответствующей максимальной подалгеброй L является алгебра $\langle J_{01},\dots,J_{0m},J_{1n},\dots,J_{mn},\ J_{0n}\rangle\oplus AE[m+1,n-3]$, которая сопряжена с алгеброй $AO[0,m+1]\oplus AE[m+2,n-2]$. Аналогично исследуются алгебры L_4, L_6. Все остальные алгебры теоремы 2, отличные от L_1, L_4 и L_6, максимальны в алгебре $AP(1,n)$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1=AE[1,n-1]$;

2) $L_2=AO[1,m]\oplus AE[m+1,n]$, $m=1,\dots,n$; $n\geq 2$;

3) $L_3=AE_1[1,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\geq 2$;

4) $L_4=AO[1,m]\oplus AE[m+1,n-1]\oplus\langle J_{0n}\rangle$, $m=1,\dots,n-1$; $n\geq 3$;

5) $L_5=AO[0,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=2,\dots,n-1$; $n\geq 3$;

6) $L_6=AO[0,m]\oplus AO[m+1,q]\oplus AE[q+1,n]$, $m=2,\dots,n-1$; $q=m+1,\dots,n$; $n\geq 3$;

7) $L_7=\langle G_1+P_0-P_n\rangle\oplus AE[2,n-1]$, $n\geq 2$;

8) $L_8=\Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1)\oplus\cdots\oplus\Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_t)\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\geq 3$;

9) $L_9=\langle J_{0n}+\alpha P_1\rangle\oplus AE[2,n-1]$, $n\geq 2$; $\alpha>0$;

10) $L_{10}=(AE_1[1,m]\oplus\langle J_{0n}+\alpha P_{m+1}\rangle)\oplus AE[m+2,n-1]$, $m=1,\dots,n-2$; $\alpha>0$; $n\geq 3$;

11) $L_{11}=\langle J_{13}+\alpha P_0\rangle\oplus AE[3,n]$, $n\geq 2$; $\alpha>0$.

Теорема 6 доказывается аналогично доказательству теорем 4 и 5.

6. Редукция по подалгебрам алгебры $\boldsymbol{AP(1,n)}$. В настоящем пункте проводим редукцию уравнения (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1, ω_3. Для проведения указанной редукции используем максимальные подалгебры L ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющие условию $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Отдельно рассмотрим случай, когда $L\cap V$ изотропно или $L\cap V=\langle P_0\rangle$.

Пусть L — некоторая подалгебра алгебры $AP(1,n)$. Если $P_0\in L$ или $P_0+P_n\in L$, то, как показано в п. 2, любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L, является решением уравнения (4) в евклидовом пространстве E_n. Таким образом, случаи $P_0, P_0+P_n\in L$ свелись к задаче классификации подалгебр Евклида $AE(n)$ и $AE(n-1)$.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-3$ алгебры Евклида $AE[1,n-1]$. Тогда L $E[1,n-1]$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $F_1=AO[1,m]\oplus AE[m+1,n-2]$, $m=1,2,\dots,n-2$; $n\geq 4$;

2) $F_2=AO[1,m]\oplus AO[m+1,d]\oplus AE[d+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-2$; $d=m+1,\dots,n-1$; $n\geq 4$;

3) $F_3=\langle J_{12}+\alpha P_3\rangle\oplus AE[4,n-1]$, $\alpha>0$; $n\geq 4$.

Предложение 3 доказывается аналогично доказательству теоремы 4.

Подалгебрам F_1–F_3 предложения 3 соответствуют такие анзацы:

$$F_1: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\cdots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_{n-1};$$
$$F_2: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\cdots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\left(x_{m+1}^2+\cdots+x_d^2\right);$$
$$F_3: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+x_3.$$

Анзац $u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$ редуцирует уравнение (4) к дифференциальному уравнению от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2:

$$F_1: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{m-1}{\omega_1}\varphi_1-\varphi_{22},-\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$
$$F_2: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{m-1}{\omega_1}\varphi_1-\varphi_{22}-\frac{d-m-1}{\omega_2}\varphi_2,-\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0; \tag{10}$$
$$F_3: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{1}{\omega_1}\varphi_1-\alpha^2\varphi_{22}+\frac{\alpha}{\omega_2}\varphi_2,-\varphi_1^2-(\alpha^2+1)\varphi_2^2,\varphi\right)=0.$$

Используя далее подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AE(n)$, изложенные в предложении 3 (если вместо $n-1$ положить n), редуцируем уравнение (4) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2. Все эти редуцированные уравнения имеют вид (10).

Проведем редукцию уравнения (1) по подалгебрам L_i, представленными в теореме 6. Этим подалгебрам соответствуют следующие анзацы:

$$L_1: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0, \quad \omega_2=x_n;$$
$$L_2: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0, \quad \omega_2=\left(x_1^2+\cdots+x_m^2\right)^{1/2};$$
$$L_3: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0-x_n, \quad \omega_2=\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2};$$
$$L_4: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\cdots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\left(x_0^2-x_n^2\right)^{1/2};$$
$$L_5: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2\cdots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_{m+1};$$
$$L_6: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2\cdots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2},$$
$$\omega_2=\left(x_{m+1}^2+\cdots+x_q^2\right)^{1/2};$$
$$L_7: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=(x_0-x_n)^2-4x_1,$$
$$\omega_2=(x_0-x_n)^2-6x_1(x_0-x_n)+6(x_0+x_n);$$
$$L_8: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_2=x_0-x_n,$$
$$\omega_1=x_0^2-\sum_{i=1}^{t}\frac{(d_i-d_{i-1})(x_0-x_n)}{x_0-x_n+\gamma_i}\left(x_{d_{i-1}+1}^2+\cdots+x_{d_i}^2\right)+x_n^2;$$
$$L_9: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_n^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\alpha\ln(x_0+x_n)-x_1;$$
$$L_{10}: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2},$$
$$\omega_2=\alpha\ln(x_0-x_n)+x_{m+1};$$
$$L_{11}: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_0+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}.$$

Анзац $u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от двух инвариантных переменных ω_2 и ω_2:

$$L_1: \quad \Phi\left(\varphi_{11}-\varphi_{22},\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_2: \quad \Phi\left(\varphi_{11}-\varphi_{22}+\frac{1-m}{\omega_2}\varphi_2,\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_3: \quad \Phi\left(2\varphi_{11}+\frac{2\omega_1}{\omega_2}\varphi_{12}+\varphi_{22}+\frac{m+1}{\omega_2}\varphi_2,2\varphi_1^2+\frac{2\omega_1}{\omega_2}\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_4: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}+\varphi_{22}+\frac{1-m}{\omega_1}\varphi_1+\frac{1}{\omega_2}\varphi_2,-\varphi_1^2+\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_5: \quad \Phi\left(\varphi_{11}-\varphi_{22}+\frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1,\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_6: \quad \Phi\left(\varphi_{11}-\varphi_{22}+\frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1+\frac{m+1-q}{\omega_2}\varphi_2,\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_7: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}+4\omega_1\varphi_{22},-\varphi_1^2+4\omega_1\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_8: \quad \Phi\left(\varphi_{11}+\frac{2\omega_2}{\omega_1}\varphi_{12}+\frac{1}{\omega_1}\left[1+\sum_{i=1}^{t}\frac{(d_i-d_{i-1})\omega_2}{\omega_2+\gamma_i}\right]\varphi_1,\right.$$
$$\left.\varphi_1^2+\frac{2\omega_2}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2,\varphi\right)=0;$$

$$L_9: \quad \Phi\left(\varphi_{11}+\frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_{12}-\varphi_{22}+\frac{1}{\omega_1}\varphi_1,\varphi_1^2+\frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_{10}: \quad \Phi\left(\varphi_{11}+\frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_{12}-\varphi_{22}+\frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1,\varphi_1^2+\frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;$$

$$L_{11}: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}+\frac{\omega_1^2-1}{\omega_1^2}\varphi_{22}-\frac{1}{\omega_1}\varphi_1,-\varphi_1^2+\frac{\omega_1^2-1}{\omega_1^2}\varphi_2^2,\varphi\right)=0.$$

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
3. Grundland A.M., Harnad J., Winlernilz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically equations, *J. Math. Pnys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
5. Фущич В.И., Баранник А.Ф., О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1990, № 6, 31–34.
6. Баранник Л.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.
7. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.
8. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 12, 1693–1700.

9. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, № 1, 67–72.

10. Barannik L.F., Fushchych W.I., On continuous subgroups of the generalired Schrödinger group, *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, № 1, 31–40.

11. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подалгебры обобщенной алгебры Галилея, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 39–43.

12. Гото М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Ли, М., Мир, 1981, 336 с.