О нелиевской симметрии галилеевски-инвариантного уравнения для частицы со спином $s = 1/2$

Р.З. ЖДАНОВ, В.И. ФУЩИЧ

Исследована симметрия одного галилеевски-инвариантного спинорного уравнения в классе дифференциальных операторов первого порядка. Установлено, что множество операторов симметрии первого порядка содержит супералгебру, которая является суперрасширением алгебры Галилея.

Symmetry of a Galilei-invariant spinor equation in a class of first-order matrix differential operators is studied. It is established that a set of the first-order symmetry operators contains a subalgebra which is a superextension of the Galilei algebra.

Под термином “нелиевская симметрия”, введенным в [1], будем понимать симметрию уравнения, которая не может быть получена в рамках классического подхода Софуса Ли (см., например, [2–5]).

Нелиевская симметрия уравнения Дирака исследована в работах [6–8]. Аналогичные результаты получены и для пуанкаре-инвариантных уравнений движения для частиц произвольного спина [9, 10]. В то же время нелиевская симметрия уравнений движения, инвариантных относительно группы Галилея, совершенно не исследована.

В настоящей работе полностью изучена нелиевская симметрия в классе дифференциальных операторов первого порядка простейшего спинорного галилеевски-инвариантного уравнения (1)

$$\{-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_a + m(\gamma_0-\gamma_4)\}\psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_4$ — матрицы Дирака размерности 4×4, $\psi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентная комплекснозначная функция-столбец,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial x_a}{\partial t}, \quad a=\overline{1,3}, \quad m=\text{const}.$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Уравнение (1) предложено рядом авторов [11, 12] для описания галилеевской частицы с массой m и спином $s = 1/2$ (более подробно об этом см. [10, 13]).

Определение. *Линейный дифференциальный оператор*

$$Q = H_0(t,\boldsymbol{x})\partial_t + H_a(t,\boldsymbol{x})\partial_a + H(t,\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

где H_0, H_a, H — переменные матрицы размерности 4×4, называется оператором симметрии уравнения (1), если существует такой дифференциальный оператор X, что выполнено соотношение (3)

$$[L,Q] \equiv LQ - QL = XL. \tag{3}$$

Теор. и мат. физика, 1991, **89**, № 3, С. 413–419.

Здесь символом L обозначен оператор уравнения (1).

Операторное равенство (3) следует понимать следующим образом: дифференциальные операторы, стоящие в левой и правой частях (3), при действии на произвольное решение уравнения (1) дают одинаковый результат.

Если в (2) матрицы H_0, H_a пропорциональны единичной матрице, то оператор (2) генерирует локальную группу Ли преобразований [5, 10]. Отметим, что максимальной локальной группой инвариантности уравне ния (1) является 13-параметрическая группа Ли [5, 11, 14].

Теорема 1. *Произвольный оператор симметрии (2) уравнения (1) при $m \neq 0$ может быть представлен в виде линейной комбинации следующих операторов:*

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b + \frac{1}{2}\gamma_a\gamma_b, \\
&G_a = t\partial_a + 2imx_a + \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + 2 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_4, \\
&A = tD - t^2\partial_t + imx_ax_a + \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a x_a, \quad M_1 = I, \quad M_2 = iI, \\
&W_0 = \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t - \frac{im}{2}(\gamma_0-\gamma_4), \\
&W_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left[\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)(\gamma_b\partial_c - \gamma_c\partial_b) + im\gamma_b\gamma_c\right], \\
&S_a = \gamma_0\gamma_4\partial_a + (\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a\partial_t - im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_a, \\
&T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left[\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_4)(\gamma_b\partial_c - \gamma_c\partial_b) + \gamma_b\gamma_c\partial_t\right], \\
&R_0 = tW_0 + x_aW_a + \frac{3}{4}(\gamma_0+\gamma_4), \\
&R_a = 2tT_a + 2x_aW_0 + \varepsilon_{abc}\left(x_bS_c + \frac{1}{2}\gamma_b\gamma_c\right) + \frac{3}{2}\gamma_a, \\
&N_0 = x_aS_a + \gamma_0\gamma_4, \quad N_a = tS_a + 2\varepsilon_{abc}x_bW_c + (\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a, \\
&K_a = 2x_aR_0 - (x_bx_b)W_a + \\
&\qquad + \varepsilon_{abc}\left(tx_bS_c + \frac{t}{2}\gamma_b\gamma_c + (\gamma_0+\gamma_4)x_b\gamma_c\right) + t^2T_a + \frac{3t}{2}\gamma_a,
\end{aligned} \tag{4}$$

где I — единичная матрица 4×4,

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1, & (a,b,c) = \textit{цикл}\,(1,2,3), \\ -1, & (a,b,c) = \textit{цикл}\,(2,1,3), \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство сформулированного утверждения существен упрощается, если переписать уравнение (1) в эквивалентном виде, умножив его на несингулярную матрицу $i\gamma_3$

$$\tilde{L}\psi \equiv \{(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3\partial_t + \gamma_3\gamma_1\partial_1 + \gamma_3\gamma_2\partial_2 + \partial_3 + im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_3\}\psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

и исключить в операторе (2) производную ∂_3 по правилу

$$\partial_3 = -(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3\partial_t - \gamma_3\gamma_1\partial_1 - \gamma_3\gamma_2\partial_2 - im(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3. \tag{6}$$

Подставляя $\tilde{L}$ и $\tilde{Q} = \tilde{H}_0\partial_t + \tilde{H}_1\partial_1 + \tilde{H}_2\partial_2$ в соотношение (2), имеем

$$[\tilde{L}, \tilde{Q}] = X\tilde{L}. \tag{7}$$

Вычисляя коммутатор в левой части равенства (7) и приравнивая коэффициенты при операторе ∂_3, приходим к выводу, что $X = 0$. Следовательно, задача построения операторов симметрии вида (2) уравнения (1) сводится к нахождению всех операторов

$$\tilde{Q} = \tilde{H}_0\partial_t + \tilde{H}_1\partial_1 + \tilde{H}_2\partial_2 + \tilde{H}, \tag{8}$$

коммутирующих с $\tilde{L}$.

Разлагая матрицы $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{H}$ по базису из 16 линейно независимых γ-матриц с коэффициентами, зависящими от t, $\boldsymbol{x}$, имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_\alpha &= a^{(\alpha)} + b_0^{(\alpha)}\gamma_0 + b_a^{(\alpha)}\gamma_a + C_{0a}^{(\alpha)}\gamma_0\gamma_a + C_{ab}^{(\alpha)}\gamma_a\gamma_b + \\
&\quad + d_0^{(\alpha)}\gamma_0\gamma_4 + +d_a^{(\alpha)}\gamma_4\gamma_a + e^{(\alpha)}\gamma_4, \\
\tilde{H} &= a + b_0\gamma_0 + b_a\gamma_a + C_{0a}\gamma_0\gamma_a + C_{ab}\gamma_a\gamma_b + d_0\gamma_4 + d_a\gamma_4\gamma_a + e\gamma_4,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, \ldots, e$ — произвольные комплекснозначные функции от t, $\boldsymbol{x}$, $\alpha = \overline{0,2}$.

Вычисляя коммутатор (7), где $X = 0$, а оператор $\tilde{Q}$ задается формулами (8), (9), и приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых операторах ∂_t^2, $\partial_t\partial_a$, $\partial_a\partial_b$, ∂_t, ∂_a, $a, b = 1, 2$, $a \le b$, получаем переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных на функции $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, b_0, \ldots, e$ содержащую более 80 уравнений. Мы не приводим эти уравнения из-за недостатка места.

Анализ полученной системы показывает, что все третьи производные от функций $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, b_0, \ldots, e$ равны нулю, т.е. они являются полиномами по переменным t, $\boldsymbol{x}$ не выше второго порядка. С учетом этого факта вышеуказанная система уравнений легко интегрируется. Подставляя ее общее решение в формулы (8), (9) и совершая замену (6), приходим к следующему выводу: произвольный оператор симметрии первого порядка уравнения (1) является линейной комбинацией операторов (4), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Произвольный оператор симметрии (2) уравнения (1) при $m = 0$ может быть представлен в виде линейной комбинации следующих операторов:*

$$\begin{aligned}
& M_1 = I, \quad M_2 = iI, \quad T_\infty^1 = \varphi_1^1(\gamma_0 + \gamma_4) + i\varphi_2^1(\gamma_0 + \gamma_4), \\
& D_\infty^1 = \varphi^2\partial_t + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(1 - \gamma_0\gamma_4), \\
& A_\infty = \varphi^3(x_a\partial_a + 1) + \frac{1}{2}\varphi^3\gamma_0\gamma_4 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^3(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a x_a, \\
& G_\infty = \varphi_a^4\partial_a + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^4, \\
& J_\infty = \varepsilon_{abc}\varphi_a^5\left(x_c\partial_b + \frac{1}{4}\gamma_b\gamma_c\right) + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^5(\gamma_b x_b), \\
& W_\infty = (\gamma_0 + \gamma_4)(\varphi_a^6\partial_t + \varphi_a^6\partial_a), \\
& S_\infty = \varphi_a^7((\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\partial_t + \gamma_0\gamma_4\partial_a) + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^7,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$T^2_\infty = \varphi^8_a(2\gamma_a\partial_t - (\gamma_0+\gamma_4)\partial_a) + \frac{1}{4}(2\gamma_a + \varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c)\dot\varphi^8_a,$$
$$D^2_\infty = \varphi^9(\gamma_0+\gamma_4)x_a\partial_a,$$
$$R_\infty = \varphi^{10}_a\left\{\varepsilon_{abc}((\gamma_0+\gamma_4)x_b\gamma_c + \gamma_0\gamma_4x_b\partial_c) + \frac{1}{2}\gamma_a\right\} - \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a\dot\varphi^{10}_a(\gamma_bx_b),$$
$$N_\infty = \varphi^{11}\left((\gamma_0+\gamma_4)\gamma_ax_a\partial_t + \gamma_0\gamma_4x_a\partial_a + \frac{1}{2}(1+\gamma_0\gamma_4)\right) + \frac{1}{2}\dot\varphi^{11}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_ax_a,$$
$$K_\infty = \varphi^{12}_a(-(\gamma_0+\gamma_4)x_bx_b\partial_a + 2x_a(\gamma_0+\gamma_4)x_b\partial_b + {}$$
$$+ 2x_a(\gamma_0+\gamma_4) - \varepsilon_{abc}x_b\gamma_c(\gamma_0+\gamma_4)),$$
$$\Sigma_\infty = \varepsilon_{abc}\varphi^{13}_a(\gamma_0+\gamma_4)\left(x_b\partial_c + \frac{1}{4}\gamma_b\gamma_c\right),$$

где φ^N_a — произвольные гладкие действительные функции от t, точкой обозначено дифференцирование по t.

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Таким образом, операторы симметрии первого порядка уравнения (1) при $m \neq 0$ образуют 35-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Это пространство не замкнуто относительно операции

$$Q_1, Q_2 \to Q_3 = [Q_1, Q_2]$$

и, следовательно, не является алгеброй Ли. Однако оно содержит подпространства, на которых можно ввести структуру алгебры Ли (простейший пример — это тринадцатимерная обобщенная алгебра Галилея с базисными элементами P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, A, M_2 из (4)).

Коэффициенты операторов W_0, W_a, S_a, T_a, R_0, R_a, N_0, N_a, K_a являются матрицами, не кратными единичной матрице, вследствие чего эти операторы симметрии в принципе не могут быть получены методом Ли (для их нахождения следует применять обобщенный метод Ли — метод Ли–Бэклунда [3, 15]).

Построим в качестве примера группу преобразований, генерируемую нелиевским оператором симметрии $Q = \theta_aW_a$, $\theta_a \in \mathbb{R}^1$. Для этого согласно [9, 10] необходимо вычислить экспоненту

$$\exp\{\theta_aW_a\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\theta_aW_a)^n. \tag{11}$$

Ряд в правой части равенства (11) нетрудно просуммировать, если заметить, что операторы W_a на множестве решений уравнения (1) представляются в следующем эквивалентном виде:

$$W_a = \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\partial_a - im\gamma_a.$$

Используя тождество $(\theta_aW_a)^2 = m^2\theta_a\theta_aI$, имеем

$$\exp\{\theta_aW_a\} = I + \theta_aW_a + \frac{1}{2!}m^2\theta_a\theta_aI + \frac{1}{3!}m^2\theta_a\theta_a(\theta_bW_b) + \cdots =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^{2k}(\theta_a\theta_a)^k}{(2k)!}\right)I + m^{-1}(\theta_a\theta_a)^{-1/2}\theta_bW_b\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^{2k+1}(\theta_a\theta_a)^{k+1/2}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$= I \operatorname{ch} m\theta + m^{-1}\theta^{-1}\theta_a W_a \operatorname{sh} m\theta,$$

где $\theta = (\theta_a\theta_a)^{1/2}$.

Следовательно, нелиевский оператор $\theta_a W_a$ генерирует группу преобразований вида

$$\begin{aligned} &t' = t, \quad x'_a = x_a, \\ &\psi'(t', \boldsymbol{x}') \equiv \exp\{\theta_a W_a\}\psi(t, \boldsymbol{x}) = (\operatorname{ch} m\theta - i\theta^{-1}\gamma_a \operatorname{sh} m\theta)\psi(t, \boldsymbol{x}) + \\ &\qquad + (2m\theta)^{-1}(\operatorname{sh} m\theta)(\gamma_0 + \gamma_4)\theta_a \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_a}. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку закон преобразования компонент функции $\psi(t, \boldsymbol{x})$ содержит первые производные от нее, (12) — это группа преобразований Ли–Бэклунда. Можно непосредственной проверкой убедиться в том, что группа преобразований (12) переводит множество решений уравнения (1) в себя.

Как установлено в работе [16], из множества операторов симметрии первого и второго порядков уравнения Дирака можно выделить подмножество, являющееся супералгеброй Ли. Мы покажем, что аналогичный результат имеет место и для уравнения (1).

Теорема 3. *Операторы P_0, P_a, J_{ab}, G_a, M_2, W_0, W_a образуют базис 15-мерной супералгебры Ли.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} &[P_0, P_a] = [P_a, P_b] = [P_0, M_2] = [P_a, M_2] = [J_{ab}, M_2] = [G_a, M_2] = 0, \\ &[P_0, J_{ab}] = 0, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c, \\ &[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}, \\ &[G_a, J_{bc}] = \delta_{ac}C_b - \delta_{ab}G_c, \quad [P_a, G_b] = 2M_2\delta_{ab}, \\ &[P_0, W_0] = [P_0, W_a] = [P_a, W_0] = [P_a, W_b] = 0, \quad [W_0, J_{ab}] = 0, \\ &[W_a, J_{bc}] = \delta_{ab}W_c - \delta_{ac}W_b, \quad [W_0, M_2] = [W_a, M_2] = 0, \quad [G_a, W_0] = -W_a, \\ &[G_a, W_b] = 0, \quad [W_0, W_0]_+ = 2imP_0, \quad [W_0, W_a]_+ = 2imP_a, \\ &[W_a, W_b]_+ = -iM_2\delta_{ab}. \end{aligned}$$

Здесь $[Q_1, Q_2]_+ = Q_1Q_2 + Q_2Q_1$. Из приведенных соотношений вытекает, что операторы P_0, P_a, J_{ab}, G_a, M_2 могут быть выбраны в качестве четных (Ч), а операторы W_0, W_a — в качестве нечетных (Н) элементов некоторой супералгебры, поскольку выполнены равенства

$$[\text{Ч}, \text{Ч}] = \text{Ч}, \quad [\text{Ч}, \text{Н}] = \text{Н}, \quad [\text{Н}, \text{Н}]_+ = \text{Ч}.$$

Теорема доказана.

Важно подчеркнуть, что симметрия галилеевски-инвариантного уравнения (1) существенно шире, чем симметрия уравнения Дирака, которое при $m \neq 0$ допускает двадцать шесть линейно независимых операторов симметрии первого порядка, а при $m = 0$ — пятьдесят два оператора [7, 10].

Полученные выше результаты по исследованию нелиевской симметрии уравнения (1) могут быть использованы для построения новых интегралов движения с помощью обобщенной теоремы Нетер [3, 4] либо в рамках подхода, развиваемого в [9, 10], а также для разделения переменных.

Следуя [7, 14], решением уравнения (1) с разделенными переменными в координатах $z_\mu = z_\mu(t,x)$, $\mu = \overline{0,3}$, будем называть четырехкомпонентную функцию

$$\psi(t,x) = R(t,x)\prod_{\mu=0}^{0} V_\mu(z_\mu;\lambda)X \tag{13}$$

(где R, V_μ — невырожденные 4×4-матрицы, λ_a — константы, X — произвольный постоянный четырехкомпонентный столбец), которая удовлетворяет (1) тождественно по λ. При этом параметры λ_a называют константами разделения.

К настоящему времени не существует сколько-нибудь общих подходов к решению задачи полного описания решений с разделенными переменными для заданной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, если эта система обладает нетривиальной симметрией (лиевской или нелпевской), существует конструктивный метод построения таких решений. Он состоит в том, что решения с разделенными переменными ищутся как решение переопределенной системы дифференциальных уравнений [7, 14]

$$L\psi = 0, \quad Q_a\psi = \lambda_a\psi, \quad a = \overline{1,3} \tag{14}$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — операторы симметрии уравнения $L\psi = 0$, коммутирующие друг с другом, λ_a — константы разделения.

В [14] с использованием лиевской симметрии уравнения (1) получены пять систем координат, в которых оно допускает разделение переменных, и построены соответствующие решения вида (13). Используя нелиевскую симметрию уравнения (1), можно получить новые системы координат, в которых возможно разделение переменных. Подробный анализ этой проблемы будет проведен в одной из наших последующих публикаций, здесь мы ограничимся тем, что приведем пример разделения переменных с помощью нелиевской симметрии уравнения (1).

Выбирая в качестве Q_1, Q_2, Q_3 операторы P_0, J_{12}, N_0 из (4), переписываем систему уравнений (14) в виде

$$\begin{gathered}\{-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_a + m(\gamma_0-\gamma_4)\}\psi = 0,\\ P_0\psi = \lambda_1\psi, \quad J_{12}\psi = \lambda_2\psi, \quad N_0\psi = \lambda_3\psi.\end{gathered}$$

Совершив в этих уравнениях замену переменных

$$\begin{gathered}z_0 = t, \quad z_1 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad z_2 = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}, \quad z_3 = \operatorname{arctg}\frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}},\\ \tilde\psi(z_0,z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}}\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right\}\psi(t,x),\end{gathered} \tag{15}$$

после очень громоздких вычислений получаем

$$\frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_0} = \lambda_1\tilde\psi, \quad \frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_2} = -\lambda_2\tilde\psi,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z_1}=\{\lambda_1(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_1+im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_1-z_1^{-1}-\lambda_3 z_1^{-1}\gamma_0\gamma_4\}\tilde{\psi},\\
&\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z_3}=\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg} z_3+\lambda_2(\cos z_3)^{-1}\gamma_2\gamma_3-\lambda_3\gamma_2\right\}\tilde{\psi},
\end{aligned}\tag{16}$$

т.е. переменные “разделились”.

Обозначая символами $V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_2)$, $V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3)$ матриканты третьей и четвертой систем обыкновенных дифференциальных уравнений из (16), запишем общее решение уравнений (16) в виде

$$\tilde{\psi}(z_0,\boldsymbol{z})=e^{i(\lambda_1 z_0-\lambda_2 z_2)}V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_3)V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3)X,\tag{17}$$

где X — произвольный постоянный четырехкомпонентный столбец. Подстановка полученного результата в формулу (15) даст точное решение исходного уравнения (1) вида (13), где

$$\begin{aligned}
&R(t,\boldsymbol{x})=\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3\operatorname{arctg}\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}\right\},\\
&V_0(z_0;\boldsymbol{\lambda})=e^{i\lambda_1 z_0},\quad V_1(z_1;\boldsymbol{\lambda})=V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_3),\\
&V_2(z_2;\boldsymbol{\lambda})=e^{-i\lambda_2 z_2},\quad V_3(z_3;\boldsymbol{\lambda})=V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3),
\end{aligned}$$

Следовательно, собственная функция коммутирующих операторов симметрии P_0, J_{12}, N_0 является решением уравнения (1) с разделенными переменными в сферических координатах.

1. Фущич В.И., *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 5, 846–850.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
4. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1989.
5. Фущич В.И., Штелень В.М, Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989.
6. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
7. Шаповалов В.П., Экле Г.Г., Алгебраические свойства уравнения Дирака, Элиста, Изд-во Калмыцкого госуниверситета, 1972.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, № 3, 81–85.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983.
10. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
11. Levi-Leblond J.M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
12. Galindo A., Sanchez C., *Amer. J. Phys.*, 1961, **29**, № 9, 582–584.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, Вып. 3, 1157–1219.
14. Фущич В.И., Жданов Р.З., Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения, Киев, Наукова думка, 1991.
15. Жданов Р.З., О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметрийных свойств уравнения Дирака, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 70–73.
16. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 4, 537–549.