Нелиевские интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

Найдены новые интегралы движения уравнений Кеммера–Дэффина–Петье, Штюкельберга, Рариты–Швингера, Дирака–Фирца–Паули, Боба, описывающих минимальное и аномальное взаимодействие частиц спина $s \leq 2$ с полем точечного заряда, а также для ряда релятивистских и квазирелятивистских двух- и трехчастичных уравнений. Эти интегралы принадлежат классу дифференциальных операторов порядка $2s$ с матричными коэффициентами и имеют дискретный спектр.

New integrals of motion are found for the Kemmer–Duffin–Petiau equation, the Stukelberg one, the Rarita–Schwinger equation, the Dirac–Fierz–Pauli one and the Bhabna equation which describe minimal and anomal interaction of particles of spin $s \leq 2$ with the Coulomb field, and for a number of relativistic and quasirelativistic two- and three-particle equations. These motion integrals belong to a class of $2s$-order differential operators with matrix coefficients and have a discrete spectrum.

Хорошо известно, что для многих уравнений квантовой теории, описывающих движение заряженной частицы в различных внешних полях, существуют интегралы движения, которые не связаны непосредственно с геометрической симметрией описываемой системы. В случае нерелятивистской бесспиновой частицы в поле Кулона это вектор Рунге–Ленца, а для релятивистского электрона в поле Кулона — интегралы Дирака [1] и Джонсона–Липпмана [2].

Упомянутые интегралы движения позволяют объяснить вырождение спектра энергий соответствующих физических объектов, а интеграл Дирака существенно упрощает решение уравнения движения методом разделения переменных, обусловливая расцепление уравнений для радиальных функции на незацепляющиеся подсистемы.

Целью настоящей работы является описание дополнительных интегралов движения для заряженной частицы со спином $s \leq 2$ в поле Кулона, а также для систем взаимодействующих частиц. Оказывается, такие интегралы движения существуют для всех релятивистских волновых уравнений, инвариантных относительно пространственной инверсии, и для широкого класса двухчастичных уравнений со сферически-симметричным потенциалом.

Ниже получены новые интегралы движения для уравнений Кеммера–Дэффина, Штюкельберга. Рариты–Швингера, Дирака–Фирца–Паули и Баба, описывающих взаимодействие частиц спина $s \leq 2$ с полем точечного заряда, и указан алгоритм построения таких интегралов для частиц произвольного спина. Эти интегралы являются дифференциальными операторами порядка $2s$ с матричными коэффициентами и могут рассматриваться как обобщение интеграла Дирака на случай произвольных s.

Теор. и матем. физика, 1991, **88**, № 3, 406–415.

В работе найдены новые интегралы движения для целого класса двухчастичных уравнений — Брейта [3], Барута–Коми [4], Кроликовского [5], обобщенного уравнения Брейта для связанных кварковых состояний [6, 7]и других. Дополнительный интеграл движения получен также для трехчастичного уравнения Кроликовского [8].

Следует подчеркнуть, что дополнительные интегралы движения в принципе не могут быть найдены в рамках классического лцевского группового анализа дифференциальных уравнений (современное изложение основных положений и приложений такого анализа см. в [9–11]). Мы исходим из обобщенного нелиевского подхода, предложенного и развитого в [12–14].

1. Интеграл Дирака для электрона

Как было впервые замечено Дираком [1], гамильтониан частицы со спином $\frac{1}{2}$ и зарядом e в поле точечного заряда qe

$$H = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m + V, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где γ_0, γ_a — матрицы Дирака, $V = qe^2/x$, $x = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, коммутирует с оператором следующего вида:

$$Q = \gamma_0 \left(2S_a J_a - \frac{1}{2} \right) \equiv \gamma_0 \left(2\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J} - \frac{1}{2} \right), \tag{1.2}$$

где

$$J_a = \varepsilon_{abc} x_b p_c + S_a, \tag{1.3}$$

$S_a = \frac{i}{4} \varepsilon_{abc} \gamma_b \gamma_c$ — матрицы спина.

Иными словами, помимо трех очевидных интегралов движения — компонент вектора углового момента J_a — для уравнения Дирака с кулоновским потенциалом существует дополнительный интеграл движения (1.2), который представляет собой дифференциальный оператор с матричными коэффициентами. Такие операторы не являются генераторами группы Ли, поэтому интеграл Дирака в принципе не мог быть найден в рамках классического группового анализа дифференциальных уравнений.

Используя тождество

$$2\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{S}^2, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}, \tag{1.4}$$

нетрудно показать, что в пространстве квадратично интегрируемых функций спектр оператора (1.2) дискретен и задается формулой [1]

$$Q\psi = \varepsilon (j + 1/2) \psi, \quad \varepsilon = \pm l, \quad j = 1/2, 3/2, \ldots. \tag{1.5}$$

Прямым вычислением проверяются следующие полезные соотношения:

$$Q^2 = \boldsymbol{J}^2 + 1/4, \quad [Q, \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}]_+ \equiv Q \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} Q = 0, \quad [Q, \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{x}]_+ = 0. \tag{1.6}$$

Используя (1.6), нетрудно заметить, что оператор (1.2) является интегралом движения не только для частицы, минимально взаимодействующей с полем Кулона, но и для более сложных взаимодействий. В частности, справедливо следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Утверждение 1. *Общий вид сферически-симметричного потенциала $V = V(x)$, при котором гамильтониан (1.1) коммутирует с оператором: (1.2), определяется соотношением*

$$V = V_1 + V_2\gamma_0 + V_3\gamma_a x_a + V_4\gamma_0\gamma_a x_a, \tag{1.7}$$

где $V_1, \ldots, V_4$ — произвольные функции от x.

В случае $V_1 = qe^2/x$, $V_3 = kqe^2/x^3$, $V_2 = V_4 = 0$ соотношение (1.7) задает потенциал аномального взаимодействия Паули с полем точечного заряда, а при $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4 = 0$ — общий вид потенциала взаимодействия, обеспечивающего конфайпмент в кварковых моделях, использующих одночастичное уравнение Дирака [15] (мы не конкретизируем явный вид V_3 и V_4, который для наших целей несуществен). Можно показать, что условие симметрии гамильтониана (1.1) с произвольным потенциалом V относительно группы трехмерных вращений $O(3)$ и относительно преобразования пространственной инверсии

$$\psi(x_0, \boldsymbol{x}) \to P\psi(x_0, \boldsymbol{x}) = r\psi(x_0, -\boldsymbol{x}), \tag{1.8}$$

где $r = \gamma_0$, также сводится к требованию, чтобы V имел форму (1.7). Иными словами, требование P-инвариантности гамильтониана (1.1) с произвольным $O(3)$-инвариантным потенциалом V является необходимым и достаточным условием существования интеграла Дирака для этого гамильтониана. Мы увидим ниже, что симметрия относительно преобразования пространственной инверсии влечет существование дополнительных интегралов движения и для других одно- и двухчастичных уравнений движения.

Итак, интеграл Дирака является оператором симметрии (т.е. оператором, переводящим решения в решения, более строгое определение см. в [16]) для целого класса уравнений вида

$$L\psi = 0, \quad L = i\frac{\partial}{\partial x_0} - H, \tag{1.9}$$

где H — гамильтониан, задаваемый формулами (1.1), (1.7). Действительно, в силу изложенного выше выполняется соотношение коммутации [14, 16]

$$[Q, L]\psi = 0, \tag{1.10}$$

где ψ — произвольное решение уравнения (1.9).

2. Интегралы движения для векторных частиц

Покажем, что для векторных частиц, взаимодействующих с полем точечного заряда, также существуют дополнительные интегралы движения, и найдем их в явном виде.

Рассмотрим уравнение Кеммера–Дэффина–Петье (КДП) с аномальным взаимодействием для частицы спина 1 в поле Кулона

$$[\beta^\mu \pi_\mu - m - ekS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]\psi \equiv L\psi = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

$$\pi_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu, \quad A_0 = \frac{qe}{x}, \quad A_a = 0, \quad S^{\mu\nu} = i[\beta^\mu, \beta^\nu], \tag{2.2}$$

$F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = i[\pi_\mu, \pi_\nu], \quad F_{0a} = \frac{qex_a}{x^3}, F_{ab} = 0, \quad a, b \neq 0, \tag{2.3}$$

β^μ — десятирядные матрицы, удовлетворяющие алгебре КДП,

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\beta^\mu, \tag{2.4}$$

k — константа аномального взаимодействия. Уравнение (2.1) может быть записано в форме Шредингера (1.9), где

$$H = [\beta_0, \beta_a]p_a + \beta_0 m + \frac{qe^2}{x} + \frac{iqe^2}{m}(k + \beta_0^2 - 1)\frac{\beta_a x_a}{x^3} + \frac{ikqe^2}{m^2}\left[\frac{\beta_a x_a}{x^3}, \beta_b p_b\right], \tag{2.5}$$

а ψ — десятикомпонентная волновая функция, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\left(1 - \beta_0^2 + \frac{\beta_a p_a}{m}\beta_0^2 - \frac{ikqe^2}{m^2}\beta_a\beta_0\frac{x_a}{x^3}\right)\psi = 0.$$

Очевидными операторами симметрии уравнения (2.1) являются генераторы группы $O(3)$ (операторы углового момента), явный вид которых задается формулами (1.3) и (2.6):

$$S_a = i\varepsilon_{abc}\beta_b\beta_c. \tag{2.6}$$

Эти генераторы являются интегралами движения, поскольку коммутируют с гамильтонианом (2.5).

Используя соотношения (2.4), можно убедиться прямой проверкой в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 2. *Для уравнения (2.1)–(2.3) существует дополнительный интеграл движения*

$$Q = (1 - 2\beta_0^2)[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^2], \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{S}$ задаются формулами (1.3), (2.6).

Оператор (2.7) коммутирует как с гамильтонианом (2.5), так и с оператором L (2.1) и, следовательно, является оператором симметрии рассматриваемого уравнения. Этот результат справедлив, конечно, и в случае $k = 0$, т.е. в отсутствие аномального взаимодействия.

Как и интеграл Дирака, оператор (2.7) имеет дискретный спектр, который, в отличие от (1.5), имеет вид

$$Q\psi = \varepsilon j(j+1)\psi. \tag{2.8}$$

К соотношению (2.8) приходим, используя представление (1.4) для оператора $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}$.

Оператор (2.7) не принадлежит обвертывающей алгебре, порождаемой генераторами (1.3), (2.6). Однако квадрат этого оператора выражается через $\boldsymbol{J}^2$:

$$Q^2 = (\boldsymbol{J}^2)^2. \tag{2.9}$$

Интересно отметить, что формула (2.7) задает оператор симметрии также для уравнений Максвелла с токами и зарядами, если последние записать в виде системы [14]

$$(1-\beta_5^2)(\beta^\mu p_\mu + 1)\psi = 0, \quad \beta^\mu p^\mu \beta_5 \psi = 0,$$

где $\beta_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu p\sigma}\beta^\mu\beta^\nu\beta^p\beta^\sigma$, ψ — столбец $(E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0)$, E_a и H_a $(a = 1, 2, 3)$ — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей, j_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ — компоненты четырехвектора тока, β_μ — матрицы КДП в стандартном представлении, явный вид которых приведен, например, в [14]. Действительно, как нетрудно убедиться, $[Q, (1-\beta_5^2)(\beta^\mu p_\mu + 1)] = [Q, \beta^\mu p_\mu \beta_5] = 0$.

Дополнительный интеграл движения существует и для уравнения Штюкельберга [17], описывающего взаимодействие квазичастнцы (с возможными значениями спина $s = 0, 1$) с полем точечного заряда. С учетом аномального взаимодействия Паули это уравнение может быть записано в форме (2.1)–(2.3), где β^μ — матрицы размерности 11×11, явный вид которых приведен, например, в [16], $S^{\mu\nu}$ — генераторы прямой суммы неприводимых представлений $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(0,0) \oplus D(1,0) \oplus D(0,1)$ группы Лоренца. Интеграл движения для такого уравнения задается формулой (2.7), где $S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$, а β_0 и S_{ab} — соответствующие матрицы размерности 11×11. Для нового интеграла движения уравнения Штюкельберга справедливы соотношения (2.8), (2.9).

3. Интегралы движения для частиц произвольного спина

Приведенные выше результаты могут быть обобщены на случай релятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина.

Рассмотрим произвольное уравнение вида (2.1), где $S^{\mu\nu}$ — генераторы прямой суммы конечномерных неприводимых представлений

$$D = \sum \oplus D(m,n) \tag{3.1}$$

группы Лоренца, β^μ — числовые матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\beta^\mu, S^{\nu\lambda}] = i(g^{\mu\nu}\beta^\lambda - g^{\mu\lambda}\beta^\nu), \tag{3.2}$$

обеспечивающим релятивистскую инвариантность уравнения (2.1).

Потребуем, чтобы уравнение (2.1) было инвариантно относительно преобразования пространственной инверсии (1.8), где r — числовая матрица для которой должно выполняться [18]

$$r^2 = 1, \quad r\beta^0 = \beta^0 r, \quad r\beta^a = -\beta^a r, \quad rS^{ab} = S^{ab}r, \quad rS^{0a} = -S^{0a}r. \tag{3.3}$$

На матрицы β^μ обычно накладывается ряд дополнительных ограничений, обеспечивающих возможность лагранжевой формулировки уравнения (2.2) и единственность значения спина описываемой им частицы [18]. Для наших целей эти дополнительные предположения несущественны.

Ограничимся случаем, когда внешнее поле сводится к потенциалу Кулона (2.2). По аналогии с (1.2), (2.7) оператор симметрии соответствующего уравнения (2.1) ищем в виде

$$Q = rd, \quad d = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, S^{\mu\nu}), \tag{3.4}$$

где r — матрица пространственной инверсии.

Потребовав коммутативность Q (3.4) с L (2.1), получаем, используя (3.2), (3.3), следующие уравнения для d:

$$[d, \boldsymbol{x}] = [d, \beta_0] = 0, \tag{3.5}$$

$$[d, S_{0a}P_a]_+ = [d, S_{0a}x_a]_+ = 0. \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует, что d зависит только от матриц S_{ab}, $a, b \neq 0$, и $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$, а уравнения (3.6) достаточно рассмотреть для матриц S_{0a} из неприводимого представления $D(m, n) \subset D$.

Решение уравнений (3.6) удобно искать в базисе шаровых спиноров (собственных векторов коммутирующих операторов $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{S}^2$, J_3 и $\boldsymbol{L}^2 = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})^2$), в котором операторы $S_{0a}x_a/x$ и $xS_{0a}p_a$ сводятся к числовым матрицам. Явный вид этих матриц приведен в [16].

Переход к базису шаровых спиноров, по существу, является одной из форм реализации предложенного в [12–14] алгоритма поиска нелокальных симметрии дифференциальных уравнений, основная идея которого состоит в преобразовании уравнений к такому представлению, в котором описание симметрии сводится к чисто матричной задаче.

Опуская несколько громоздкие выкладки, приведем явный вид операторов d для произвольных неприводимых представлений $D(m, n)$:

$(m + n)$ целое:

$$d = CF \sum_{s=|m-n|}^{m+n} \sum_{\lambda=0}^{s} (-1)^{\lambda} B^s_{\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, \ldots; \tag{3.7}$$

$(m + n)$ полуцелое:

$$d = CF \sum_{s=|m-n|}^{m+n} \sum_{\nu=1/2}^{s} (-1)^{s+1/2-\nu} N^s_{\nu}, \quad \nu = 1/2, 3/2, \ldots, \tag{3.8}$$

где $F = \sum\limits_{\alpha=1}^{2(m+n)-1} (4\boldsymbol{J}^2 + 1 - \alpha^2)$, $m + n \neq \frac{1}{2}$, и $F = 1$ для $m + n = \frac{1}{2}$, C — произвольная постоянная, B^s_{λ} и N^s_{ν} — операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\lambda=\lambda_0}^{s} B^s_{\lambda} = 1, \quad \lambda = \lambda_0, \lambda_0 + 1, \ldots, \quad \lambda_0 = \frac{1}{4}[1 - (-1)^{2s}]; \tag{3.9}$$

$$B^s_{\lambda} B^s_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} B^s_{\lambda}, \quad B^s_{\lambda} N^s_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} N^s_{\lambda}, \quad N^s_{\lambda} N^s_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} (4\boldsymbol{J}^2 + 1) B^s_{\lambda}, \tag{3.10}$$

$$G_s \equiv P_s(2\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}^2) = \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s} (\lambda N^s_{\lambda} - \lambda^2 B^s_{\lambda}). \tag{3.11}$$

Здесь P_s — оператор проектирования

$$P_s = \prod_{s' \neq s} \frac{S^2 - s'(s'+1)}{s(s+1) - s'(s'+1)}, \quad |m - n| \leq s, s' \leq m + n,$$

$\boldsymbol{S}$ — вектор с компонентами $S_a = 1/2\varepsilon_{abc}S_{bc}$, $S_{bc} \in D(m,n)$.

Для каждого конкретного значения s операторы B_λ^s и N_λ^s можно выразить через G_s. Для этого достаточно последовательно возвести обе части уравнения (3.11) в степень $n = 1, 2, \dots, 2s$ и решить полученную систему $2s + l$ линейных алгебраических уравнений для $2s + l$ неизвестных B_λ^s и N_λ^s. При этом согласно (3.10) уравнения с номерами $n = 2k$ и $n = 2k+1$ имеют вид

$$\begin{gathered} G_s^{2k} = \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s} \left[\sum_{m=0}^{k} \lambda^{2(k+m)} (4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m} C_{2k}^{2m} B_\lambda^s - \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda^{2(k+m)-1} (4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m-1} C_{2k}^{2l+1} N_\lambda^s \right], \quad k \le s; \\ G_s^{2k+1} = \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s} \left[\sum_{m=0}^{k} \lambda^{2(k+m)+1} (4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m} C_{2k+1}^{2m} N_\lambda^s - \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda^{2(k+l)} (4\boldsymbol{J}^2+1) C_{2k+1}^{2l+1} B_\lambda^s \right], \quad k < s \end{gathered} \tag{3.12}$$

(C_b^a — число сочетаний из b элементов по a), а уравнение с номером $2s+1$ задается формулой (3.8).

Пусть $S = (m+n)_{\max}$ — максимальное значение квантового числа s, возникающее при редукции представления (3.1) по группе $O(3)$. Приведем решения уравнений (3.7)–(3.9), (3.12) для $d = d_S$, $S \le 2$:

$$d_{1/2} = 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 1/2; \tag{3.13}$$

$$d_1 = 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^2; \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered} d_{3/2} = 4/3[g^3 - g^2 - (7\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{S}^2)g + (4\boldsymbol{S}^2 - 6)\boldsymbol{J}^2] + 3; \\ g = 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 3/2; \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} d_2 = 2/3[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 4\boldsymbol{J}^2](\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 3) - \\ - \boldsymbol{J}^2(\boldsymbol{J}^2 - 2) + (1/3\boldsymbol{S}^2 - 2)[(4 - 3\boldsymbol{J}^2)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 + (7\boldsymbol{J}^2 - 4)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \\ - 4\boldsymbol{J}^2 + 3/8\boldsymbol{S}^2(4\boldsymbol{J}^2 + 1). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — оператор (1.3), $\boldsymbol{S}$ — матрицы, входящие в соответствующее представление D (3.1) при $S \le 2$.

Формулы (3.4), (3.13)–(3.16) задают операторы симметрии для целого класса релятивистски- и P-инвариантных уравнений вида (2.1), соответствующих $S \le 2$. В этот класс входят уравнения, обсуждаемые выше в разделах 1, 2, уравнения Рариты–Швингора [19] в формулировке, приведенной в [20], Дирака–Фирца–Паули [21, 22], описывающие частицы с фиксированными значениями массы и спина, а также уравнения Баба [23] для наборов частиц со спинами $s \le S$ и массами m_s. Явный вид соответствующих матриц r и $\boldsymbol{S}$ приведен в [18, 20, 23].

Отметим еще, что спектр операторов (3.13), (3.14) задается формулами (1.5), (2.8) (где $Q \to d_s$), а для операторов (3.15), (3.16) получаем с использованием (1.4)

$$d_{3/2}\psi = \varepsilon(2j-1)(2j+1)(2j+3)\psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad j = 1/2, 3/2, \ldots;$$
$$d_2\psi = \varepsilon(j-1)j(j+1)(j+2)\psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

4. Интегралы движения для двух- и трехчастичных уравнений

Приведенные выше результаты позволяют построить новые интегралы движения для уравнений, описывающих системы взаимодействующих частиц.

Рассмотрим обобщенное двухчастичное уравнение вида

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\psi = (H^{(1)} + H^{(2)} + V)\psi, \tag{4.1}$$

где $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ — одночастичные гамильтонианы Дирака

$$H^{(\alpha)} = \gamma_0^{(\alpha)}\gamma_a^{(\alpha)}p_a - \gamma_0^{(\alpha)}m_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4.2}$$

$\{\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)}\}$ и $\{\gamma_0^{(2)}\gamma^{(2)}\}$ — коммутирующие наборы матриц Дирака размерности 16×16, V — потенциал взаимодействия следующего общего вида:

$$V = V_A\Gamma_A + V_B'\Gamma_B^a x_a + V_c''\Gamma_c^{ab}x_a x_b. \tag{4.3}$$

Здесь $\{\Gamma_A\}$ $(A = 1, 2, \ldots, 16)$ — набор матриц $\{\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}, \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}, \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}, I\}$ и их всевозможных произведений, пронумерованный произвольным образом, $\sigma_a^{(a)} = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\gamma_b^{(\alpha)}\gamma_c^{(\alpha)}$, $\{\Gamma_B^\alpha\} = \{\gamma_4^{(\alpha)}\gamma_0^{(\beta)}\sigma_a^{(\nu)}, \gamma_4^{(\alpha)}\sigma_a^{(\beta)}, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_4^{(\alpha)}\sigma_a^{(\beta)}\}$, $B = 1, 2, \ldots, 24$, $(\alpha, \beta, \nu) = 1, 2, \{\Gamma_C^{ab}\}$ $(C = 1, 2, \ldots, 8)$ — набор матриц вида $\Gamma_C'\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)}$, где $\{\Gamma_C'\} = \{\gamma_0^{(\alpha)}, \gamma_4^{(1)}, \gamma_4^{(2)}, I, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}, \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\gamma_0^{(\alpha)}, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\}$, V_A, V_B', V_C'' — произвольные функции от x.

Формула (4.3) определяет общий вид потенциала V, при котором уравнение (4.1) сохраняет инвариантность относительно группы $O(3)$ и преобразования пространственной инверсии (1.8) (при этом $r = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}$). Такой потенциал включает как частные случаи (получаемые специальным выбором функций V_A, V_B' и V_C'') квазирелятивистский потенциал Брейта [3], релятивистский потенциал двухчас тичного уравнения Барута–Коми [4], а также потенциалы, используемые в кварцовых моделях мезонов [5–7]. Соответствующие уравнения (4.1) интерпретируются как двухчастичные уравнения в системе центра масс [7].

Для уравнения (4.1) с произвольным потенциалом вида (4.3) существует очевидный векторный интеграл движения — оператор полного момента (1.3), где

$$S_a = S_a^{(1)} + S_a^{(2)}, \quad S_a^{(\alpha)} = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b^{(\alpha)}\gamma_c^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{4.4}$$

Оказывается, однако, что, как и для рассмотренных выше одночастичных релятивистских уравнений, можно указать дополнительный интеграл движения уравнения (4.1), который имеет вид

$$Q = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}d_1, \tag{4.5}$$

где d_1 задается формулами (3.14), (1.3), (4.4).

Как можно убедиться прямой проверкой, оператор (4.5) коммутирует с гамильтонианами $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ (4.2) с любым потенциалом вида (4.3). Такую проверку несложно осуществить, воспользовавшись следующим представлением для $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}([Q_{(1)}, Q_{(2)}]_+ - 1/2), \tag{4.6}$$

где $Q_{(\alpha)}$ — операторы, явный вид которых может быть получен из (3.13) заменой $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}^{(\alpha)}$ ($\boldsymbol{S}^{(\alpha)}$ заданы в (4.4), $\boldsymbol{J}$ — в (1.3), (4.4)). Эти операторы удовлетворяют условиям

$$[Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{p}]_+ = \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')} \cdot \boldsymbol{p}, \quad [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{x}]_+ = \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')} \cdot \boldsymbol{x},$$
$$[Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')} \cdot \boldsymbol{p}] = [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')} \cdot \boldsymbol{x}] = [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{x}] = 0, \quad \alpha' \neq \alpha.$$

Таким образом, для любого двухчастичного уравнения вида (4.1) существует дополнительный интеграл движения, задаваемый формулами (4.5), (4.6). Можно показать, что в пространстве квадратично интегрируемых функций спектр оператора (4.5) дискретен и задается формулой (2.8).

Укажем еще новый интеграл движения для трехчастичного уравнения Кроликовского [8]:

$$Q = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_0^{(3)} d_{3/2}.$$

Здесь $d_{3/2}$ — оператор (3.14) для $S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}(\gamma_b^{(1)}\gamma_c^{(1)} + \gamma_b^{(2)}\gamma_c^{(2)} + \gamma_b^{(3)}\gamma_c^{(3)})$, $\{\gamma_\mu^{(1)}\}$, $\{\gamma_\mu^{(2)}\}$, $\{\gamma_\mu^{(3)}\}$ — три набора коммутирующих матриц Дирака размерности 64×64.

5. Заключение

Мы убедились, что дополнительпые интегралы движения типа Дирака существуют для широкого класса одночастичных и двухчастичных уравнений. Найденные интегралы движения могут быть использованы при решении соответствующих уравнений методом разделения переменных, при построении ортогональных базисов и для других целей.

При выводе новых интегралов движения существенно использовалась симметрия рассматриваемых уравнений относительно группы $O(3)$ и преобразования пространственной инверсии P. Полученные результаты могут быть обобщены па случай произвольных $O(3)$- и P-инвариантных уравнений, не обязательно удовлетворяющих условию релятивистской инвариантности. В частности, такие интегралы движения могут быть получены для галилеевски-инвариантных волновых уравнений [24–26, 16] и для уравнений вида (2.1) с произвольным $O(3)$- и P-инвариантным потенциалом A_0.

Следует еще раз отметить, что найденные интегралы движения в принципе не могут быть получены методами классического группового анализа дифференциальных уравнений. Существенннно “нелиевскими элементами” используемого нами подхода являются высокий порядок операторов дифференцирования, входящих в операторы симметрии, и сведение задачи к нахождению общего решения антикоммутационных соотношений (3.6).

Многочисленные примеры нелиевской симметрии основных уравнений квантовой теории приведены в [16].

1. Дирак П.А.М., Принципы квантовой механики, М., Мир, 1979.
2. Johnson M.H., Lippman B.A., *Phys. Rev.*, 1950, **77**, № 3, 702.
3. Breit G., *Phys. Rev.*, 1929, **34**, № 4, 553–573.
4. Barut A.O., Komy S., *Forts. Phys.*, 1985, **33**, № 6, 309–318.
5. Krolikowski W., Rzewuski I., *Acta Physica Polonica*, 1976, **7**, № 7, 481–496.
6. Хелашвили А.А., *ТМФ*, 1982, **51**, № 2, 201–210.
7. Childers R.W., *Phys. Rev. D*, 1982, **26**, № 10, 2902–2915.
8. Krolikowski W., *Acta Physica Polonica B*, 1984, **15**, № 10, 927–944.
9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
10. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
11. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989.
12. Фущич В.И., *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1983, **14**, Вып. 1, 5–57.
14. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987 (Сокращенный вариант: Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983).
15. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповая структура групп Галилея и Пуанкаре и редукция в нелинейных уравнениях, Киев, Наукова думка, 1991.
16. de Amaral M.L., Zagury N., *Phys. Rev. D*, 1982, **26**, № 11, 3119–3122.
17. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
18. Stucelberg E., *Helv. Phys. Acta*, 1938, **11**, 225.
19. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
20. Rarita, Schwinger J., *Phys. Rev.*, 1941, **60**, № 1, 61–62.
21. Боте Г., Солпитер Э., Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., Физматгиз, 1960.
22. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1936, **155**, 447–459.
23. Fierz M., Pauli W., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1939, **173**, 211–232.
24. Kraicik R.A., Nieto M.M., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, № 12, 4049–4060.
25. Levy-Leblond J.-M., *Comun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
26. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, № 10, 2339–2347.
27. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1980, **44**, № 1, 34–46.