Общие решения нелинейного волнового уравнения и эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

The necessary and sufficient compatibility conditions are established for the system of differential equations consisting of the nonlinear wave and eikonal equations in the four-dimensional pseudo-Euclidian space. A general solution of this system is constructed.

Проблема редукции (понижения размерности) нелинейного волнового уравнения

$$\Box v = H(v), \tag{1}$$

где $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta_3$, $v = v(x_0, x_1, x_2, x_3)$, H — произвольная гладкая функция от v, с помощью анзаца [1]

$$v = \varphi(u) \tag{2}$$

сводится к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных на одну неизвестную функцию $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$$\Box u = F_1(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = F_2(u). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве $R(1,3)$ с метрикой $g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$.

Ниже построены общие решения системы (3), (4). Вывод основных формул весьма громоздкий, поэтому читателя, интересующегося деталями доказательств, мы отсылаем к работе [2].

Поскольку система дифференциальных уравнений (3), (4) является переопределенной, нужно исследовать необходимые и достаточные условия се совместности (отметим, что необходимые условия были установлены в [3, 4]).

Теорема 1. *Пусть в (3), (4)* $u = u(x) \in C^3(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$, $F_1(u), F_2(u) \subset C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$. *Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных (3), (4) совместна, если и только если*

$$1)\quad F_1(u) = F_2(u) = 0 \tag{4}$$

или

$$2)\quad F_1(u) = N(\dot f f)^{-1} - \ddot f(\dot f)^{-3}, \quad F_2(u) = (\dot f)^{-2}, \tag{5}$$

где $f = f(u) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ *— произвольная функция, удовлетворяющая условию* $\dot f(u) \not\equiv 0$; N *— дискретный параметр, принимающий значения* 0, 1, 2, 3; $\dot f = df/du$.

Доклады АН УССР, 1991, № 10, 29–31.

Следствие. *Система уравнений*

$$\Box u = 0, \quad u_{x_\mu} u_{x^\mu} = F_2(u)$$

совместна, если и только если функция $F_2(u)$ задается одним из выражений

а) $F_2(u) = C_1 \exp(C_2 u)$,

б) $F_2(u) = (C_1 u + C_2)^{2N/(1-N)}$, $N = 0, 2, 3$; где $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}^1$.

Для доказательства этого утверждения следует проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение $F_1(u) = N(\dot{f} f)^{-1} - \ddot{f}(\dot{f})^{-3} = 0$ и подставить результат в соотношение $F_2(u) = (\dot{f})^{-2}$.

Теорема 2. *Общее решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ задается одной из формул*

$$\begin{aligned} &1)\quad G(A_\mu(u)x^\mu, B_\mu(u)x^\mu, u) = 0,\\ &2)\quad u(x) = C_\mu(\tau_1\tau_2)x^\mu + C(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $G \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, $A_\mu(u)$, $B_\mu(u)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$A_\mu A^\mu = 0, \quad A_\mu B^\mu = 0, \quad B_\mu B^\mu = 0, \tag{7}$$

$\tau_a = \tau_a(x)$ — комплекснозначные функции, определяемые неявными формулами $\frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_a} x^\mu + \frac{\partial C}{\partial \tau_a} = 0$, $a = 1, 2$; $C_\mu(\tau_1, \tau_2)$, $C(\tau_1, \tau_2)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$C_\mu C^\mu = 0, \quad \frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_a}\frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_b} = 0, \quad a, b = 1, 2.$$

Замечание 1. Общее решение системы (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ в случае, когда $u = u(x_0, x_1, x_2)$, дается формулой Смирнова–Соболева [5]

$$A_0(u)x_0 - A_1(u)x_1 - A_2(u)x_2 + A(u) = 0, \quad A_0^2 - A_1^2 - A_3^2 = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что формулы (9) получаются из (7), (8) при $B_\mu = 0$, $A_3 = 0$.

Замечание 2. Бейтмен в работе [6] получил класс точных решений, уравнений (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ вида $u(x) = C_\mu(\tau)x^\mu + C(\tau)$, где $\tau = \tau(x)$ — функция, определяемая неявным соотношением $\dot{C}_\mu(\tau)x^\mu + \dot{C}(\tau) = 0$, а $C_\mu(\tau)$, $C(\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие равенствам $C_\mu C^\mu = 0$, $\dot{C}_\mu \dot{C}^\mu = 0$.

Нетрудно показать, что эти решения также содержатся классе (7).

Теорема 3. *Общее решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) в случае, когда F_1, F_2 имеют вид (6), задается одной формул*

1) $N = 0$

$$f(u(x)) = A_\mu(\tau)x^\mu + R_1(\tau),$$

где $\tau = \tau(x)$ определяется неявным соотношением $B_\mu(\tau)x^\mu + R_2(\tau) = 0$, а $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям: $A_\mu A^\mu = 1$, $A_\mu B^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu B^\mu = 0$, $B_\mu B^\mu = 0$;

2) $N = 1$

$$f^2(u(x)) = (a_\mu x^\mu + R_1)^2 - (d_\mu x^\mu + R_2)^2,$$

где $R_a = R_a(b_\mu x^\mu + ic_\mu x^\mu) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ *— произвольные функции,* a_μ*,* b_μ*,* c_μ*,* d_μ *— произвольные константы, удовлетворяющие соотношениям*

$$-a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = d_\mu d^\mu = -1,$$
$$a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0;$$

3) $N = 2$

а) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)) = [B_\mu(\tau)(x^\mu + A^\mu(\tau))]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + A_\mu(\tau))\dot{B}^\mu(\tau) = 0$*;* $A_\mu(\tau)$*,* $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям* $B_\mu B^\mu = -1$*,* $\dot{B}_\mu \dot{B}^\mu = 0$*,* $\dot{A}_\mu = R(\tau)\dot{B}_\mu$ *при произвольной функции* $R(\tau) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$*;*

б) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + \theta_\mu)(x^\mu + \theta^\mu) = [B_\mu(\tau)(x^\mu + \theta^\mu)]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + \theta_\mu)\dot{B}^\mu(\tau) = 0$*;* θ_μ *— произвольные комплексные константы,* $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие* $B_\mu B^\mu = -1$*,* $\dot{B}_\mu \dot{B}^\mu = 0$*;*

c) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)) = [d_\mu(x^\mu + A^\mu(\tau))]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой*

$$(x_\mu + A_\mu(\tau))\dot{A}^\mu(\tau) + (x_\mu + A_\mu(\tau))d^\mu d_\nu \dot{A}^\nu(\tau) = 0;$$

$A_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношению* $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + (d_\mu \dot{A}^\mu)^2 = 0$*;*

4) $N = 3$

$$f^2(u(x)) = (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)),$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + A_\mu(\tau))B^\mu(\tau) = 0$*;* $A_\mu(\tau)$*,* $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям* $\dot{A}_\mu B^\mu = 0$*,* $B_\mu B^\mu = 0$.

Отметим, что в трехмерном случае $x \in R(1,2)$ общее решение системы (3), (4) было построено Коллинзом [7]. Однако используемый геометрический метод, как отмечал сам автор, не обобщается на случай четырех независимых переменных. Полученные им решения ее держатся в приведенных выше классах решений при $N = 0, 1, 2$.

Таким образом, теоремы 1–3 дают полное решение задачи исследования совместности и построения общего решения системы нелинейных волновых уравнений (3), (4).

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1981.
2. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместимость и решения нелинейные уравнений д'Аламбера и Гамильтона, Препринт N 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.
3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.
5. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Труды физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова*, Л., Изд-во АН СССР, 1934, **5**, 259–264.
6. Бейтмен Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, М., Физматгиз, 1958, 179 с.
7. Collins C.B., Complex potential equations I. A technique for solutions, *Proc. Camb. Ph. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.