Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

Предложен конструктивный метод интегрирования переопределенной системы нелинейных комплексных волновых уравнений Д'Аламбера и эйконала $\Box u = F_1(u)$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = F_2(u)$. С помощью этого метода получено полное аналитическое описание множества гладких решений этой системы.

1. Введение. Проблема построения широких классов точных решений нелинейных пуанкаре-инвариантных скалярных уравнений посредством метода редукции их к обыкновенным дифференциальным уравнением сводится к следующей задаче: конструктивно описать все гладкие точные решения связки уравнений вида [1–3]

$$\Box u = F_1(u), \quad \Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta_3, \tag{1}$$

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = F_2(u), \quad u_{x_\mu} = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \tag{2}$$

где $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$; $F_1, F_2 \subset C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Связка уравнений (1), (2) возникает и в других задачах математической физики [4].

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в псевдоевклидовом пространстве $R(1,3)$ с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$, т.е.

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = u_{x_0}^2 - u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2.$$

В случае, когда $F_2 = 0$, система (1), (2) совместна тогда и только тогда, когда $F_1 = 0$ [4–5]. Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\Box u = 0, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0 \tag{3}$$

будет рассмотрена отдельно.

В случае, когда $F_2(u) \neq 0$, система уравнений (1), (2) с помощью локальной замены зависимой переменной

$$u \to u' = \int^u [F_2(\tau)]^{-1/2} d\tau \tag{4}$$

приводится к виду

$$\Box u = F(u), \tag{5}$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 11, 1471–1486.

$$u_{x_\mu}u_{x_\mu} = 1. \tag{6}$$

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (5), (6) и построены общие решения систем (3) и (5), (6) в классе гладких функций.

2. Формулировка результатов. Приведем основные результаты работы в виде следующих утверждений.

Теорема 1 [6]. *Уравнения (5), (6) совместны тогда и только тогда, когда*

$$F(u) = N(u+C)^{-1}, \tag{7}$$

где $C \in \mathbb{C}^1$ — произвольная константа, N — дискретный параметр, принимающий одно из значений 0, 1, 2, 3.

Теорема 2. *Общее решение уравнения эйконала*

$$u_{x_\mu}u_{x_\mu} = \lambda, \quad \lambda \in C^1, \tag{8}$$

задается одной из следующих неявных формул:

$$1)\quad u(x) = A_\mu(v_1, v_2, v_3)x_\mu + B(v_1, v_2, v_3), \tag{9}$$

где $v_a = v_a(x)$, $a = \overline{1,3}$, — гладкие функции, определяемые формулами

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial v_a}x_\mu + \frac{\partial B}{\partial v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3},$$

а A_μ, B — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие

$$A_\mu A_\mu = \lambda, \quad \operatorname{rank} \|\partial A_\mu/\partial v_a\|^{3}_{\mu=0}{}^{3}_{a=1} = 3;$$

$$2)\quad u(x) = A_\mu(v_1, v_2)x_\mu + B(v_1, v_2), \tag{10}$$

где $v_k = n_k(x)$, $k = 1, 2$, гладкие функции, определяемые формулами

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial v_k}x_\mu + \frac{\partial B}{\partial v_k} = 0, \quad k = 1, 2,$$

а A_μ, B — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие

$$A_\mu A_\mu = \lambda, \quad \operatorname{rank} \|\partial A_\mu/\partial v_k\|^{3}_{\mu=0}{}^{2}_{k=1} = 2;$$

$$3)\quad u(x) = A_\mu(z)x_\mu + B(z), \tag{11}$$

где $z = z(x)$ — гладкая функция, определяемая формулой

$$\frac{\partial A_\mu}{dz}x_\mu + \frac{dB}{dz} = 0,$$

A_μ, B — произвольные гладкие функции такие, что выполнено $A_\mu A_\mu = \lambda$.

Теорема 3. *Общее решение системы ДУЧП*

$$\Box u = 3(u+C)^{-1}, \quad u_{x_\mu}v_{x_\mu} = 1 \tag{12}$$

определяется формулой

$$(u+C)^2 = (x_\mu + A_\mu(\tau))(x_\mu + A_\mu(\tau)), \tag{13}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ определяется неявным образом:

$$(x_\mu + A_\mu(\tau))B_\mu(\tau) = 0, \tag{14}$$

функции $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ удовлетворяют соотношениям

$$B_\mu A_\mu = 0, \quad B_\mu B_\mu = 0 \tag{15}$$

(здесь и далее точка над функцией одного аргумента означает производную по нему).

Теорема 4. *Общее решение системы ДУЧП*

$$\Box u = 2(u+C)^{-1}, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 1 \tag{16}$$

задается одной из следующих формул:

$$1)\quad (u+C)^2 = (x_\mu + R_\mu(\tau))(x_\mu + R_\mu(\tau)) + [B_\mu(\tau)(x_\mu + R_\mu(\tau))]^2, \tag{17}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ определяется неявным образом: $x_\mu + R_\mu(\tau))\dot{B}_\mu(\tau) = 0$, а $R_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие отношениям $\dot{R}_\mu = TB_\mu$, $\dot{B}_\mu \dot{B}_\mu = 0$, $B_\mu B_\mu = -1$ при произвольной функции $T = T(\tau)$;

$$2)\quad (u+C)^2 = (x_\mu + R_\mu(\tau))(x_\mu + R_\mu(\tau)) + [d_\mu(x_\mu + R_\mu(\tau))]^2, \tag{18}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ определяется неявным образом:

$$(x_\mu + R_\mu(\tau))\dot{R}_\mu(\tau) + (x_\mu + R_\mu(\tau))d_\mu(d_\nu \dot{R}_\nu(\tau)) = 0,$$

$d_\mu = \mathrm{const}$, $d_\mu d_\mu = -1$, $R_\mu(\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие соотношению $\dot{R}_\mu \dot{R}_\mu + (d_\mu \dot{R}_\mu)^2 = 0$.

Теорема 5. *Общее решение системы ДУЧП $\Box u = (u+C)^{-1}$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 1$ задается формулой*

$$(u+C)^2 = (a_\mu x_\mu + h_1)^2 - (d_\mu x_\mu + h_2)^2, \tag{19}$$

где $h_k = h_k(\theta_\mu x_\mu) \subset C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, $k = 1, 2$, — произвольные функции, a_μ, d_μ, θ_μ — произвольные комплексные параметры, удовлетворяющие соотношениям $a_\mu a_\mu = -d_\mu d_\mu = 1$, $a_\mu d_\mu = a_\mu \theta_\mu = d_\mu \theta_\mu = \theta_\mu \theta_\mu = 0$.

Теорема 6. *Общее решение системы ДУЧП $\Box u = 0$, $u_{x\mu} u_{x\mu} = 1$ задается формулой*

$$u = A_\mu(\tau) x_\mu + R_1(\tau), \tag{20}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ определяется неявным образом: $B_\mu(\tau) x_\mu + R_2(\tau) = 0$, а функции $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ связаны соотношениями $A_\mu A_\mu = 1$, $\dot{A}_\mu B_\mu = 0$, $B_\mu B_\mu = 0$.

Теорема 7. *Общее решение системы ДУЧП (3) задается одной из формул*

$$1)\quad u(x) = A_\mu(\tau_1, \tau_2) x_\mu + B(\tau_1, \tau_2), \tag{21a}$$

где функции $\tau_k = \tau_k(x)$, $k = 1, 2$, *определяются неявным образом:*

$$\frac{\partial A_\mu(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k} x_\mu + \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k} = 0, \quad k = 1, 2,$$

а $A_\mu(\tau_1, \tau_2)$, $B(\tau_1, \tau_2)$ — *произвольные функции, связанные соотношениями*

$$A_\mu A_\mu = 0, \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial \tau_k} \frac{\partial A_\mu}{\partial \tau_n} = 0, \quad k, n = 1, 2;$$

$$2) \ \ G(u, A_\mu(u)x_\mu,\ B_\mu(u)x_\mu) = 0, \tag{21б}$$

где $G \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — *произвольная функция,* $A_\mu(u)$, $B_\mu(u)$ — *произвольные гладкие функции, связанные соотношениями* $A_\mu A_\mu = B_\mu B_\mu = A_\mu B_\mu = 0$.

Таким образом, теоремы 3–7 содержат полное аналитическое описание решений системы ДУЧП (1), (2) во всех случаях, когда эта система совместна.

Подробное доказательство теоремы 1 проведено в работе [6], а доказательства остальных теорем приводятся в следующем пункте.

3. Доказательство теорем 2–7. Приведем подробные доказательства теорем 2, 3, а в остальных случаях ограничимся изложением схемы доказательства. В основе нашего подхода к интегрированию ДУЧП вида (1), (2) и (8) лежит обобщение метода нелокальных преобразований [7, 8] на случай многомерных нелинейных дифференциальных уравнений, предложенное в [6].

Определение 1. *Преобразование зависимых и независимых переменных*

$$x'_\mu = f_\mu(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad u' = f(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad r \geq 1, \tag{22}$$

где f_μ, f — r *раз непрерывно дифференцируемые функции, символом* $\underset{s}{u}$ *обозначен набор производных от функции* $u = u(x)$ s*-го порядка, называется нелокальным преобразованием порядка* r.

Основная идея развиваемого метода нелокальных преобразований состоит в том, чтобы для заданного нелинейного ДУЧП указать в явном виде нелокальное преобразование (22), приводящее его к линейному уравнению. Если для преобразованного уравнения удается построить общее или частное решение, то, обращая преобразование (22), получаем решение исходного нелинейного ДУЧП.

Особая роль в теории ДУЧП первого порядка принадлежит контактным преобразованиям — нелокальным преобразованиям вида

$$x'_\mu = f_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \quad u' = f(x, u, \underset{1}{u}), \quad u'_{x_\mu} = g_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \tag{23}$$

которые сохраняют условия касания первого порядка, т.е.

$$du - \sum_{\mu=0}^{3} u_{x_\mu} dx_\mu = 0 \implies du' - \sum_{\mu=0}^{3} u'_{x_\mu} dx'_\mu = 0.$$

Этот факт связан с тем, что всякие два скалярных ДУЧП первого порядка могут быть переведены друг в друга подходящим контактным преобразованием [9].

Доказательство теоремы 2. Из (8) следует, что величины u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3} функционально зависимы, откуда заключаем, что

$$\det\left\|\frac{\partial u_{x_\mu}}{\partial x_\nu}\right\|_{\mu,\nu=0}^{3} = \det\|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^{3} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы $U = \|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^{3}$ принимает одно из значений 1, 2, 3. Каждый из этих случаев необходимо рассмотреть отдельно.

Случай 1; $\operatorname{rank} U = 3$. При таком условии существует ненулевой минор матрицы U третьего порядка. Производя, если это необходимо, замены переменных $x_0 \to ix_a$, $x_a \to ix_0$, либо $x_a \to x_b$, $x_b \to x_a$, $1 \le a \le 3$, $1 \le b \le 3$, при которых уравнение (8) остается инвариантным, можем считать, что

$$\det\|u_{x_a x_b}\|_{a,b=1}^{3} \ne 0. \tag{24}$$

Произведем в (8) следующее нелокальное преобразование:

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0, \quad y_a = u_{x_a}, \quad H(y) = \sum_{a=1}^{3} x_a u_{x_a} - u, \\ &Hy_0 = -u_{x_0}, \quad Hy_a = x_a, \quad a = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что (25) — это контактное преобразование, которое является обобщением классического преобразования Эйлера для двух независимых переменных [7, 8]. Кроме того, это преобразование является взаимно-однозначным в силу (24).

В новых переменных y_μ, $H(y)$ уравнение (8) принимает вид

$$H_{y_0} = -\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2},$$

т.е. замена (25) приводит ДУЧП (8) при условии (25) к линейному уравнению, общее решение которого задается следующей формулой:

$$H = -y_0\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2} - B(y_1, y_2, y_3), \tag{26}$$

где $B \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подставляя (26) в (25), приходим к такому выражению для $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{a=1}^{3} x_a y_a - H = x_0\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2} + \sum_{a=1}^{3} x_a y_a + B(y_1, y_2, y_3), \tag{27}$$

причем функции $y_a = y_a(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_a = H_{y_a} = -x_0 y_a\left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} y_b^2\right)^{-1/2} - B_{y_a}, \quad a = \overline{1,3}. \tag{28}$$

Обозначая в (28)

$$y_a(x) = v_a(x), \quad A_0(v_1, v_2, v_3) = \left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} v_b^2\right)^{1/2},$$
$$A_0(v_1, v_2, v_3) = -v_a, \quad a = \overline{1,3},$$

получаем формулы (9).

Случай 2; $\operatorname{rank} U = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$\det \|u_{x_a x_b}\|_{a,b=1}^2 \neq 0. \tag{29}$$

и, кроме того, существует функция $S \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$ такая, что $S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}) = 0$ и выражения $S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} - \lambda$, рассматриваемые как функции от переменных u_{x_μ}, функционально-назависимы.

С учетом сказанного, уравнение (8) при условии (29) представляется в виде

$$u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} u_{x_a}^2\right)^{1/2}, \quad S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}) = 0$$

или

$$u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{k=1}^{3} u_{x_k}^2 + W^2\right)^{1/2}, \quad u_{x_3} = W(u_{x_1}, u_{x_2}). \tag{30}$$

Совершим в (30) следующее контактное преобразование:

$$\begin{gathered} x_0 = y_0, \quad x_k = H_{y_k}, \quad x_3 = y_3, \quad u = \sum_{k=1}^{2} y_k H_{y_k} - H, \\ u_{x_0} = -H_{y_0}, \quad u_{x_k} = y_k, \quad u_{x_3} = -H_{y_3}, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{31}$$

откуда

$$H_{y_0} = -\left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2(y_1, y_2)\right)^{1/2}, \quad H_{y_3} = -W(y_1, y_2).$$

Интегрируя эту систему ДУЧП, имеем

$$H = -y_0\left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{1/2} - y_3 W - B(y_1, y_2), \tag{32}$$

где $B \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя полученный результат в формулы (31), получаем следующее выражение для функции $u(x)$:

$$u = x_1 y_1 + x_2 y_2 - H = x_0\left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{1/2} + x_3 W + B(y_1, y_2), \tag{33}$$

причем функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_k = -x_0(y_k + W W_{y_k})\left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{-1/2} - x_3 W_{y_k} - B_{y_k}, \quad k = 1, 2. \tag{34}$$

Обозначая в (33), (34)

$$y_k(x) = v_k(x), \quad k = 1, 2, \quad A_0(v_1, v_2) = \left(\lambda + v_1^2 + v_2^2 + W^2(v_1, v_2)\right)^{1/2},$$
$$A_k(v_1, v_2) = -v_k, \quad k = 1, 2, \quad A_3(v_1, v_2) = -W(v_1, v_2),$$

приходим к формулам (10).

Случай 3; $\operatorname{rank} U = 1$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что а) $u_{x_0x_0} \neq 0$; б) $\exists W_a = W_a(u_{x_0} \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$: $u_{x_a} = W_a(u_{x_0})$, $a = \overline{1,3}$.

С учетом этого факта уравнение эйконала (8) представляется в виде

$$u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(u_{x_0})\right)^{1/2}, \quad u_{x_a} = W_a(u_{x_0}), \quad a = \overline{1,3}. \tag{35}$$

Совершим в (35) следующее контактное преобразование

$$\begin{aligned} &y_0 = u_{x_0}, \quad y_a = x_a, \\ &H = x_0 u_{x_0} - u, \quad H_{y_0} = x_0, \quad H_{y_a} = -u_{x_a}, \quad a = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{36}$$

которое является взаимно-однозначным при условии $u_{x_0x_0} \neq 0$. В новых переменных y_μ, $H(y)$ переопределенная система ДУЧП (35) принимает вид

$$H_{y_a} = -W_a(y_0), \quad a = \overline{1,3}, \quad \sum_{a=1}^{3} W_a^2(y_0) = y_0^2 - \lambda,$$

откуда

$$H = -\sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) y_a - B(y_0), \tag{37}$$

где $B(y_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставив формулу (37) в (36), получим следующее выражение для функции $u = u(x)$:

$$u = x_0 y_0 - H = x_0 \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(y_0)\right)^{1/2} + \sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) x_a + B(y_0), \tag{38}$$

причем функция $y_0 = y_0(x)$ определяется из соотношения

$$x_0 \sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) \dot{W}_a(y_0) \left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} W_b^2(y_0)\right)^{-1/2} + \sum_{a=1}^{3} \dot{W}_a(y_0) x_a + \dot{B}(y_0) = 0, \tag{39}$$

и выполнено равенство $y_0^2 - \sum\limits_{a=1}^{3} W_a^2(y_0) = \lambda$.

Вводя в (38), (39) обозначения

$$y_0(x) = z(x), \quad A_0(z) = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(z)\right)^{1/2}, \quad A_a(z) = -W_a(z), \quad a = \overline{1,3},$$

приходим к формулам (11).

Кроме того, нам необходимо рассмотреть вырожденный случай, когда матрица $U = \|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^3$ нулевая, т.е. $u_{x_\mu x_\nu} = 0$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$. Отсюда следует

$$u(x) = c_\mu x_\mu + c_4, \tag{40}$$

причем комплексные константы c_μ, c_4 удовлетворяют соотношению

$$c_\mu c_\mu = \lambda. \tag{41}$$

Легко видеть, что формулы (40), (41) получаются из (11), если положить $A_\mu = c_\mu$, $B = c_4$.

Таким образом, общее решение нелинейного ДУЧП задается одной из формул (9)–(11). Теорема доказана.

Доказанная теорема иллюстрирует основные этапы применения метода нелокальных преобразований, последовательная реализация которого позволила получить полное аналитическое описание множества гладких решений нелинейного уравнения эйконала (8). Отметим, что это множество разбивается на три непересекающихся класса, каждый из которых характеризуется дискретным параметром $r = \operatorname{rank} U$. Причем это разбиение является пуанкаре-инвариантным, т.е. различные классы не переводятся друг в друга преобразованиями из группы Пуанкаре $P(1,3)$.

Доказательство теоремы 3. Идея доказательства состоит в следующем: совершив контактное преобразование вида (23), линеаризовать и проинтегрировать второе уравнение системы (12), а затем подставить полученный результат в первое уравнение, записанное в новых переменных. Полученные системы ДУЧП с меньшим количеством независимых переменных интегрируются в общем виде.

Множество решений системы (12) также разбивается на три непересекающихся класса в зависимости от значения величины $r = \operatorname{rank} \|u_{x_\mu} x_\nu\|^3_{\mu,\nu=0}$. Мы рассмотрим каждый из случаев $r = 1, 2, 3$ отдельно.

Случай 1; $r = 3$. Не умаляя общности, можно считать, что выполнено (24). Совершим в (12) преобразование (25), для чего необходимо продолжить его до производных второго порядка (см., например, [8]). После несложных, но довольно громоздких, преобразований получаем

$$\begin{gathered}
H_{11} = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{12} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{23} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{31} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{22} \\ u_{13} & u_{23} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{22} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{23} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{13} & u_{23} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{33} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{01} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{02} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{03} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{00} = -\det \|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} \Delta^{-1}, \quad \Delta = \det \|u_{ab}\|^3_{a,b=1}.
\end{gathered} \tag{42}$$

В приведенных формулах использованы обозначения $H_{\mu\nu} = H_{y_\mu y_\nu}$, $u_{\mu\nu} = u_{x_\mu x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$. Следует подчеркнуть, что при условии (24) замена переменных (25), (42) является взаимно-однозначной.

Совершая при необходимости замену переменных $u \to u + C$, можно добиться, чтобы в (12) $C = 0$.

Переходя в (12) к переменным y_μ, $H(y)$ согласно формулам (25), (42), имеем

$$\begin{aligned}
&\det \|H_{y_\mu y_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} + M_2(H) + 3[T(H)]^{-1} \det \|H_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} = 0,\\
&H_{y_0} = -\left(1 + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{43}$$

где $T(H) = y_a H_{y_a} - H$, символом $M_2(H)$ обозначена сумма главных миноров матрицы $\|H_{y_\mu y_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$ второго порядка.

Подставляя общее решение второго уравнения системы (43), задаваемое формулой (26) при $\lambda = 1$, в первое уравнение и умножая полученный результат на $[T(H)]$, замечаем, что полученное выражение переписывается в виде полинома второй степени попеременной y_0, т.е.

$$\begin{aligned}
&a_1 y_0^2 + a_2 y_0 + a_3 = 0, \quad a_1 = \Delta_3 B + y_a y_b B_{y_a y_b} + 3T(B),\\
&a_2 = M_2(B) + (\Delta_3 B) B_{y_a y_b} y_a y_b - y_a y_b B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} - 3[T(B)]^2,\\
&a_3 = (1 + y_a y_a) \det \|B_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} + [T(B)]^3.
\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь и далее под повторяющимися индексами, обозначенными буквами a, b, c, подразумевается суммирование от 1 до 3; k, l, n — от 1 до 2.

Так как величины a_1, a_2, a_3 не зависят от переменной y_0, то из (44) немедленно следует, что $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, система двух нелинейных ДУЧП (12) при условии $\operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\| = 3$ приведена к системе трех нелинейных ДУЧП с тремя независимыми переменными

$$\begin{aligned}
&1)\quad \Delta_3 B + y_a y_b B_{y_a y_b} = -3T(B);\\
&2)\quad M_2(B) + y_a y_b B_{y_a y_b} \cdot \Delta_3 B - y_a y_b B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} = 3T^2(B);\\
&3)\quad \det \|B_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} = -T^3(B)(1 + y_a y_a)^{-1}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Система (45) существенно упрощается, если сделать в ней замену переменных

$$z_a = y_a (1 + y_b y_b)^{-1/2}, \quad p(z_1, z_2, z_3) = (1 + y_a y_a)^{-1/2} B(y_1, y_2, y_3). \tag{46}$$

Совершив в (45) замену (46), после довольно громоздких преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}
&\Delta_3 p - z_a z_b p_{z_a z_b} = 0, \quad M_2(p) - (\Delta_3 p) z_a z_b p_{z_a z_b} + z_a z_b p_{z_a z_c} p_{z_b z_c} = 0,\\
&\det \|p_{z_a z_b}\|^3_{a,b=1} = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

где, как и ранее, $\Delta_3 p = p_{z_a z_a}$, $M_2(p)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $P = \|p_{z_a z_b}\|^3_{a,b=1}$.

Из третьего уравнения системы (47) следует, что матрица P является вырожденной. Поэтому ее ранг равен либо 1, либо 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Случай 1.1; $\operatorname{rank} P = 1$. Из этого условия согласно теореме о неявной функции следует существование таких функций $R_1, R_2 \subset C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, для которых

$$p_{z_k} = R_k(p_{z_3}), \quad k = 1, 2. \tag{48}$$

Подставляя (48) во второе уравнение системы (47), видим, что оно удовлетворяется тождественно при произвольных R_1, R_2. Первое же уравнение принимает вид

$$\left[1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - (z_k\dot{R}_k + z_3)^2\right] p_{z_3z_3} = 0,$$

откуда либо

$$p_{z_3z_3} = 0, \tag{49}$$

либо

$$1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - (z_k\dot{R}_k + z_3)^2 = 0, \tag{50}$$

где $R_k = dR_k/dp_{z_3}$, $k = 1, 2$.

Пусть справедливо равенство (49), тогда, дифференцируя (48) по z_3, имеем $p_{z_3z_1} = p_{z_3z_2} = 0$.

Дифференцируя (48) по z_1, z_2, окончательно заключаем, что $p_{z_az_b} = 0$, $a, b = \overline{1,3}$, откуда

$$p = c_az_a + c_0, \quad c_\mu \in \mathbb{C}^1. \tag{51}$$

Пусть теперь $p_{z_3z_3} \neq 0$, тогда выполнено равенство (50). Для того чтобы проинтегрировать систему нелинейных ДУЧП первого порядка (48), (50), совершим контактное преобразование

$$t_k = z_k, \quad t_3 = p_{z_3}, \quad G(t_1, t_2, t_3) = z_3p_{z_3} - p,$$
$$G_{t_k} = -p_{z_k}, \quad G_{t_3} = z_3, \quad k = 1, 2.$$

В результате имеем

$$G_{t_k} = -R_k(t_3), \quad k = 1, 2, \quad 1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - (t_k\dot{R}_k + G_{t_3})^2 = 0. \tag{52}$$

Интегрируя первые два уравнения системы (52), получаем

$$G = -R_k(t_3)t_k + Q(t_3), \tag{53}$$

где $Q \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подставляя (53) в третье уравнение системы (52), получаем

$$1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - (t_k\dot{R}_k - \dot{R}_kt_k + \dot{Q})^2 = 1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - \dot{Q}^2 = 0. \tag{54}$$

Следовательно, формула (53) при условии (54) задает общее решение системы ДУЧП (52). Возвращаясь к исходным переменным z_a, $p(z)$, имеем общее решение системы (48), (50)

$$p = R_k(t_3)z_k + t_3z_3 - Q(t_3), \quad 1 + \dot{R}_k\dot{R}_k - \dot{Q}^2 = 0, \tag{55}$$

где $t_3 = t_3(z)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$\dot{R}_k(t_3)z_k + z_3 - \dot{Q}(t_3) = 0. \tag{56}$$

Для того чтобы формулы (55), (56) приобрели явно $O(3)$-инвариантный вид, переопределим параметрическую функцию следующим образом: $t_3(z) = \tilde{R}_3(\tau(z))$ и введем обозначения

$$\tilde{R}_k(\tau) = R_k(\tilde{R}_3(\tau)), \quad k = 1, 2, \quad \tilde{Q}(\tau) = -Q(\tilde{R}_3(\tau)).$$

С учетом этого формулы (55), (56) перепишутся в виде

$$p(z) = \tilde{R}_a(\tau)z_a + \tilde{Q}(\tau), \quad \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a - \dot{\tilde{Q}}^2 = 0, \tag{57}$$

где $\tau = \tau(z)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)z_a + \dot{\tilde{Q}}_a(\tau) = 0. \tag{58}$$

Таким образом, общее решение системы ДУЧП (47) задается одной из формул (51) либо ((57), (58)). Совершая в этих формулах замену переменных (45), получаем общие решения системы нелинейных ДУЧП (44)

$$B(y_1, y_2, y_3) = C_a y_a + C_0(1 + y_a y_a)^{1/2}, \tag{59}$$

$$B(y_1, y_2, y_3) = \tilde{R}_a(\tau)y_a + \tilde{Q}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2}, \quad \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a - \dot{\tilde{Q}}^2 = 0, \tag{60}$$

где $\tau = \tau(y)$ — гладкая функция, определяемая неявной формулой

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)y_a + \dot{\tilde{Q}}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2} = 0. \tag{61}$$

Очевидно, решение (59) содержится в классе (60), (61). Подставляя формулу (60) в (26) при $\lambda = 1$, имеем

$$H(y) = -(1 + y_a y_a)^{1/2}(y_0 + \tilde{Q}(\tau)) - y_a\tilde{R}_a(\tau),$$

где функция $\tau = \tau(y_1, y_2, y_3)$ определяется соотношением (61).

Наконец, переписывая полученное выражение в исходных переменных $x, u(x)$ (см. формулы (25)), приходим к следующему классу решений системы ДУЧП (12) при $c = 0$:

$$u(x) = x_a y_a - H = (x_a + \tilde{R}_a(\tau))y_a + (1 + y_a y_a)^{1/2}(x_0 + \tilde{Q}(\tau)), \tag{62}$$

где $y_a = y_a(x)$ определяется из равенств

$$x_a = H_{y_a} = -\tilde{R}_a(\tau) - y_a(1 + y_b y_b)^{-1/2}(x_0 + \tilde{Q}(\tau)), \quad a = \overline{1,3},$$

откуда

$$y_a = -(x_a + \tilde{R}_a)\left[(x_0 + \tilde{Q})^2 - (x_b + \tilde{R}_b)(x_b + \tilde{R}_b)\right]^{1/2}.$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (62), получаем

$$u(x) = \left[(x_0 + \tilde{Q}(\tau))^2 - (x_a + \tilde{R}_a(\tau))(x_a + \tilde{R}_a(\tau))\right]^{1/2},$$

где $\tau = \tau(x)$ функция, определяемая из уравнения

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)y_a + \dot{\tilde{Q}}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2} \equiv (x_0 + \tilde{Q}(\tau))\dot{\tilde{Q}}(\tau) - (x_a + \tilde{R}_a(\tau))\dot{\tilde{R}}_a(\tau) = 0,$$

а $\tilde{Q}$, $\tilde{R}_a$ — произвольные гладкие функции, связанные равенством $\dot{\tilde{Q}}^2 - \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a = 0$. Вводя в полученных соотношениях обозначения $A_0 = \tilde{Q}$, $A_a = \tilde{R}_a$, получаем формулы (13)–(15) при $B_\mu \equiv A_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$.

Случай 1.2; $\operatorname{rank} P = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно полагать, что

$$\det \begin{Vmatrix} P_{z_1z_1} & P_{z_1z_2} \\ P_{z_2z_1} & P_{z_2z_2} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, существует такая функция $R \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$, для которой $P_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2})$. С учетом этого соотношения система ДУЧП (47) переписывается следующим образом:

$$\begin{gathered} p_{z_kz_k} + (R_k - (z_k + z_3R_k))(R_n - (z_n + z_3R_n))p_{z_kz_n} = 0, \\ (1 - z_kz_k - z_3^2)(1 + R_kR_k) + (z_3 - z_kR_k)^2 = 0, \quad p_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2}). \end{gathered} \tag{63}$$

Здесь обозначено $R_k = \partial R/\partial p_{z_k}$, $k = 1, 2$. Совершим в (63) следующее контактное преобразование:

$$\begin{gathered} t_k = p_{z_k}, \quad t_3 = z_3, \quad G(t_1, t_2, t_3) = z_kp_{z_k} - p, \quad G_{t_k} = z_k, \quad k = 1, 2, \\ G_{t_3} = -p_{z_3}, \quad G_{t_1t_1} = \delta^{-1}p_{z_2z_2}, \quad G_{t_1t_2} = -\delta^{-1}p_{z_1z_2}, \quad G_{t_2t_2} = \delta^{-1}p_{z_1z_1}, \\ G_{t_3t_3} = -\delta^{-1}\det\|p_{z_az_b}\|_{a,b=1}^3, \quad G_{t_1t_3} = \delta^{-1}(p_{z_1z_2}p_{z_2z_3} - p_{z_2z_2}p_{z_1z_3}), \\ G_{t_2t_3} = \delta^{-1}(p_{z_1z_3}p_{z_2z_1} - p_{z_1z_1}p_{z_2z_3}), \end{gathered}$$

где $\delta = p_{z_1z_1}p_{z_2z_3} - p_{z_1z_2}^2 \neq 0$.

В новых переменных t_a, $G(t)$ система ДУЧП (63) принимает вид

$$\begin{aligned} &1)\quad \left[1 + R_{t_2}^2 - (G_{t_2} + t_3R_{t_2})^2\right]G_{t_1t_1} - 2[R_{t_1t_2} - (G_{t_1} + t_3R_{t_1}) \times \\ &\qquad \times (G_{t_2} + t_3R_{t_2})G_{t_1t_2} + \left[1 + R_{t_1}^2 - (G_{t_1} + t_3R_{t_1})^2\right]G_{t_2t_2} = 0; \\ &2)\quad (1 - t_3^2 - G_{t_k}G_{t_k})(1 + R_{t_k}R_{t_k}) + (t_3 - R_{t_k}G_{t_k})^2 = 0; \\ &3)\quad G_{t_3} = R(t_1, t_2). \end{aligned} \tag{64}$$

Интегрируя последнее уравнение из (64), получаем

$$G = -t_3R(t_1, t_2) + iQ(t_1, t_2), \tag{65}$$

где $Q \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя выражение (65) в первые два уравнения из (64) и расщепляя полученные соотношения по переменной t_3, приходим к системе двумерных ДУЧП для определения функции $R(t_1, t_2)$, $Q(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} &1)\quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k})(1 + R_{t_n}R_{t_n}) - (R_{t_k}Q_{t_k})^2 = 0, \\ &2)\quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k} + R_{t_k}R_{t_k})\Delta_2Q - (R_{t_k}R_{t_n} + Q_{t_k}Q_{t_n})Q_{t_kt_n} = 0, \\ &3)\quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k} + R_{t_k}R_{t_k})\Delta_2R - (R_{t_k}R_{t_n} + Q_{t_k}Q_{t_n})R_{t_kt_n} = 0, \end{aligned} \tag{66}$$

где $\Delta_2 = \partial_{t_1}^2 + \partial_{t_2}^2$.

Подставляя общее решение системы (66) в формулы (65), (46), (26) (при $\lambda = 1$) и переписывая полученный результат в явно $P(1,3)$-инвариантном виде, приходим к формулам (13)–(15) при $C = 0$ (опускаем соответствующие выкладки ввиду ограниченности объема статьи).

Таким образом, произвольное решение системы ДУЧП (12) при условии rank $\|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^3 = 3$ принадлежит классу функций (13)–(15). Как установлено в [6] при исследовании совместности системы ДУЧП (1), (2), система (12) не имеет решений в случае, когда $\operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} < 3$ Тем самым теорема 3 доказана.

Идея доказательства теорем 4–7 аналогична использованной выше. Именно: вначале, используя контактное преобразование вида (23), линеаризуем и интегрируем уравнение эйконала (общее решение которого дается одной из формул (26), (32), (37) при соответствующем выборе параметра λ), а затем, комбинируя локальные и нелокальные преобразования зависимых и независимых переменных, приводим системы ДУЧП для определения функций $B(y_1, y_2, y_3)$, $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$, $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$, которые получаются в результате подстановки формул (26), (32), (37) в соответствующие нелинейные волновые уравнения, к интегрируемым ДУЧП.

Далее мы ограничимся тем, что приведем схемы доказательств теорем 4–7.

Согласно [6] система нелинейных ДУЧП (16) совместна только в том случае, когда $\operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\| = 2$. Поэтому применяем к этой системе контактное преобразование (31), продолжая его до производных второго порядка

$$
\begin{aligned}
&H_{11} = u_{22}\delta^{-1}, \quad H_{12} = -u_{12}\delta^{-1}, \quad H_{22} = u_{11}\delta^{-1},\\
&H_{01} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{12} \\ u_{02} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{23} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{12} & u_{23} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{13} = -\begin{vmatrix} u_{13} & u_{12} \\ u_{23} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{02} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{01} \\ u_{12} & u_{02} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{00} = -\begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{01} & u_{11} & u_{12} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{03} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{33} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad \delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} \neq 0.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Здесь $H_{\mu\nu} \equiv \partial^2 H/\partial y_\mu \partial y_\nu$, $u_{\mu\nu} \equiv \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $\mu, \nu = \overline{0, 3}$.

Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных y, $H(y)$, имеет вид (32) при $\lambda = 1$. Подставляя (32) в первое уравнение из (16) и расщепляя его по переменным y_0, y_3, получаем систему нелинейных ДУЧП для определения $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$:

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_2\omega + y_k y_n \omega_{y_k y_n})(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) - (T(\omega)y_k + \omega_{y_k}) \times\\
&\quad \times (T(\omega)y_n + \omega_{y_n})\omega_{y_k y_n} = -2T(\omega)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)),\\
&\det\|\omega_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = T^2(\omega)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega))(1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1},\\
&(\Delta_2 B + y_k y_n B_{y_k y_n})(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) - (T(\omega)y_k + \omega_{y_k}) \times\\
&\quad \times (T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n} = -2T(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)),\\
&\det\|B_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = T^2(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega))(1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1},\\
&(\Delta_2 B)(\Delta_2\omega) - B_{y_k y_n}\omega_{y_k y_n} = 2T(\omega)T(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) \times\\
&\quad \times (1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Здесь использованы обозначения $T(f) = y_k f_{y_k} - f$, $\Delta_2 f = f_{y_1 y_1} + f_{y_2 y_2}$.

Интегрируя уравнения (68) и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), приходим к выражениям (17), (18).

Далее, согласно [6] система нелинейных ДУЧП (5), (6) при $F(u) = (u + C)^{-1}$ имеет решения, удовлетворяющие одному из двух условий:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\| = 2;\\ &\text{б)}\quad \operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\| = 1. \end{aligned} \tag{69}$$

В случае а) применяем к этой системе контактное преобразование (31), (67). Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных y, $H(y)$ имеет вид (32) при $\lambda = 1$. Подставляя (32) в уравнение $\Box u = (u - C)^{-1}$, записанное в переменных y, $H(y)$, и расщепляя его по переменным y_0, y_3, получаем систему нелинейных ДУЧП для функций $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} &1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega) = 0, \quad \det\|\omega_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = 0,\\ &(1 + y_k y_k + \omega^2)\det\|B_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} =\\ &\quad = T(B)[(T(\omega)y_k + \omega_{y_k}(T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n}],\\ &(1 + y_k y_k + \omega^2)(\Delta_2 B \Delta_2 \omega - \omega_{y_k y_n} B_{y_k y_n}) =\\ &\quad = T(\omega)[(T(\omega)y_k + \omega_{y_k})(T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n}]. \end{aligned} \tag{70}$$

Интегрируя эти уравнения и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), получаем (19).

В случае б) к системе (5), (6) при $F(u) = (u + C)^{-1}$ следует применить контактное преобразование (36), продолжив его до производных второго порядка

$$H_{00} = u_{00}^{-1}, \quad H_{0a} = -u_{0a}u_{00}^{-1}, \quad H_{ab} = (u_{0a}u_{0b} - u_{00}u_{ab})u_{00}^{-1}, \tag{71}$$

где $H_{\mu\nu} \equiv \partial^2 H/\partial y_\mu \partial y_\nu$, $u_{\mu\nu} \equiv \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $a, b = \overline{1,3}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных $y, H(y)$, задается формулой (38) при $\lambda = 1$. Из требования, чтобы (38) удовлетворяло и первому уравнению исследуемой системы, вытекают такие уравнения для функций $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$:

$$\begin{aligned} &\ddot\omega_a = (1 - \dot\omega_b\dot\omega_b)(y_0\dot\omega_a - \omega_a), \quad a = \overline{1,3},\\ &\ddot B = (1 - \dot\omega_b\dot\omega_b)(y_0\dot B - B), \quad \omega_a\omega_a = y_0^2 - 1. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений и возвращаясь к исходным переменным x, $u(x)$, устанавливаем, что полученное выражение является частным случаем формулы (19).

При $F(u) = 0$ система ДУЧП (5), (6) также имеет два непересекающихся класса решений, удовлетворяющих одному из условий (69). В случае а) ее общее решение задается формулой (32) при $\lambda = 1$, где $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$ удовлетворяют системе двумерных нелинейных ДУЧП

$$\begin{aligned} &1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + (y_k\omega_{y_k} - \omega)^2 = 0,\\ &[y_k(y_n\omega_{y_n} - \omega) + \omega_{y_k}][y_l(y_n\omega_{y_n} - \omega) + \omega_{y_l}]B_{y_k y_l} = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (71), подставляя полученный результат в (32) при $\lambda = 1$ и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), получаем выражение (20).

В случае б) общее решение исследуемой системы ДУЧП задается формулой (38) при $\lambda = 1$, где функции $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$ удовлетворяют соотношениям вида

$$\dot{\omega}_a\dot{\omega}_a = 1, \quad \omega_a\omega_a = y_0^2 - 1. \tag{72}$$

Переписав (38) при $\lambda = 1$ в исходных переменных по формулам (36), после несложных преобразований получаем выражение (20) при $B_\mu \equiv \dot{A}_\mu$, $R_2 = \dot{R}_1$.

Нам осталось рассмотреть систему ДУЧП (3). Общее решение этой системы в зависимости от значения дискретного параметра $r = \operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\|$ задается:

а) формулой (26) при $\lambda = 0$, если $r = 3$ и функция $B(y_1, y_2, y_3)$, удовлетворяет переопределенной системе нелинейных ДУЧП

$$B_{y_a y_b} y_a y_b = 0, \quad B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} y_a y_b = 0, \quad a, b = \overline{1,3};$$

б) формулой (32) при $\lambda = 0$, если $r = 2$ и функции $B(y_1, y_2)$, $\omega(y_1, y_2)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\omega_{y_a} y_a - \omega = 0,\\
&\Delta_2\omega[\omega^2 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} y_n y_n - 2\omega\omega_{y_k} y_k] + y_k y_n \omega_{y_k y_n} +\\
&\quad + 2\omega\omega_{y_k}\omega_{y_n}\omega_{y_k y_n} - \omega_{y_k y_n}\omega_{y_k}\omega_{y_n}(y_l y_l) = 0,\\
&\Delta_2 B[\omega^2 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} y_n y_n - 2\omega\omega_{y_k} y_k] + B_{y_k y_n} y_k y_n +\\
&\quad + 2\omega B_{y_k y_n} y_k \omega_{y_n} - B_{y_k y_n}\omega_{y_k}\omega_{y_n}(y_l y_l) = 0, \quad k, n, l = 1, 2.
\end{aligned}$$

в) формулой (37) при $\lambda = 0$, если $r = 1$ и функции $B(y_0)$, $\omega_a(y_0)$ удовлетворяют системе уравнений

$$1 - \dot{\omega}_a\dot{\omega}_a = 0, \quad y_0^2 - \omega_a\omega_a = 0.$$

Интегрируя записанные уравнения, подставляя полученные результаты в формулы (26), (32), (38) при $\lambda = 0$ и возвращаясь к исходным переменным x, $u(x)$ согласно формулам (25), (31), (36), приходим к выражениям (21а), (21б).

4. Явные решения системы ДУЧП (1), (2). В случае, когда $u = u(x)$ — это действительная функция от четырех действительных переменных x_μ, система (1), (2) с помощью замены переменных (4) приводится к виду

$$\Box u = F(u), \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \lambda, \tag{73}$$

где $\lambda = -1, 0, 1$. При этом согласно [6] система (73) совместна, если и только если

$$F(u) = N\lambda(u + C)^{-1}, \tag{74}$$

где $N = 0, 1, 2, 3$, $C \in \mathbb{R}^1$.

Используя полученные выше результаты, построим многопараметрические классы точных решений системы (73), (74) в классе действительно-значных функций $u(x)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad F(u) = 3(u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\quad (u+C)^2 = (x_\mu + C_\mu)(x_\mu + C_\mu);\\
&2)\quad F(u) = 2(u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\quad (u+C)^2 = (x_0 + C_0)^2 - (x_1 + C_1)^2 - (x_2 + C_2)^2;\\
&3)\quad F(u) = (u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\quad (u+C)^2 = (x_0 + C_0)^2 - (x_1 + C_1)^2;\\
&4)\quad F(u) = 0, \quad \lambda = 1,\\
&\quad u = x_0 + C_0,
\end{aligned}
$$

где $C_\mu \in \mathbb{R}^1$, $\mu = \overline{0,3}$.

Перечисленные выше решения получаются из формул (12)–(20), если считать в них функции $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_\mu(\tau)$ постоянными. Все они могут быть получены с помощью симметрийной редукции пуанкаре-инвариантной системы ДУЧП (73), (74) к обыкновенным дифференциальным уравнениям [10]. Ниже мы приведем решения системы (73), (74) при $\lambda = -1$, которые в принципе не могут быть получены в рамках классического подхода Ли.

Заметим, что уравнения (73) при $\lambda = -1$ получаются из (5), (6) с помощью замены $u \to iu$. С учетом этого факта общее решение системы

$$
\Box u = -3u^{-1}, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = -1 \tag{75}
$$

в классе комплекснозначных функций принимает вид

$$
\begin{aligned}
&u^2 = -(x_\mu + A_\mu(\tau))(x_\mu + A_\mu(\tau)),\\
&(x_\mu + A_\mu(\tau))B_\mu(\tau) = 0, \quad B_\mu \dot{A}_\mu = B_\mu B_\mu = 0.
\end{aligned} \tag{76}
$$

Положим в (76) $A_0 = \tau$, $A_1 = C \sin\frac{\tau}{C}$, $A_2 = C\cos\frac{\tau}{C}$, $A_3 = 0$, $C \in \mathbb{R}^1$, $B_\mu = A_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$. При этом формулы (76) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&x_0 + \tau - x_1 \cos\frac{\tau}{C} + x_2 \sin\frac{\tau}{C} = 0,\\
&u^2 = \left(x_1 + C\sin\frac{\tau}{C}\right)^2 + \left(x_2 + C\cos\frac{\tau}{C}\right)^2 + x_3^2 - (x_0+\tau)^2.
\end{aligned}
$$

После несложных алгебраических преобразований находим явный вид функции

$$
\tau(x,u) = \pm\left\{\pm 2C\left(u^2 - x_3^2\right)^{1/2} + x_a x_a - u^2 - C^2\right\}^{1/2},
$$

откуда заключаем, что функция $u(x)$ определяется формулой

$$
x_1 \cos\frac{\tau}{C} - x^2 \sin\frac{\tau}{C} = x_0 + \tau.
$$

Подобным же образом получается еще один класс точных решений системы (75)

$$
\begin{aligned}
&x_0 \operatorname{sh}\frac{\tau}{C} - x_1 \operatorname{ch}\frac{\tau}{C} = C \pm \sqrt{u^2 - x_3^2},\\
&\tau = -x^2 \pm \left\{x_0^2 - x_1^2 + \left(C \pm \sqrt{u^2 - x_3^2}\right)^2\right\}^{1/2};
\end{aligned}
$$

5) $F(u) = -2u^{-1}, \quad \lambda = -1,$

$$C \pm u = x_0 \operatorname{sh} \frac{\tau}{C} - x_1 \operatorname{ch} \frac{\tau}{C},$$

$$\tau = -x^2 \pm \sqrt{x_0^2 - x_1^2 + (C \pm u)^2};$$

$$C \pm u = x_1 \sin \frac{\tau}{C} + x_2 \cos \frac{\tau}{C},$$

$$\tau = -x_0 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - (-C \pm u)^2};$$

$$x_0 \operatorname{sh} \tau - x_3 \operatorname{ch} \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm u \pm \sqrt{-u^2 - x_\mu x_\mu} \right),$$

$$\tau = \pm \arcsin \frac{\sqrt{-u^2 - x_\mu x_\mu} - u}{\sqrt{2(x_1^2 + x_2^2)}} - \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

В приведенных формулах $C \in \mathbb{R}^1$, $C \neq 0$.

5. Заключение. В случае, когда количество независимых переменных в системе (1), (2) равно трем, ее общее решение построено Коллинзом [11]. Однако использованный им геометрический метод, как отмечал сам автор, не обобщается на случай четырех независимых переменных. Полученные им решения содержатся в приведенных выше классах решений системы (1), (2) при $A_3 = B_3 = R_3 = 0$.

В 1914 г. Гарри Бейтмен в [12] построил следующий класс точных решений четырехмерной системы (3): $u(x) = C_\mu(\tau)x_\mu + C(\tau)$, где $\tau = \tau(x)$ — функция, определяемая формулой $\dot{C}_\mu(\tau)x_\mu + \dot{C}(\tau) = 0$, а $C_\mu(\tau)$, $C(\tau)$ — произвольные гладкие функции, связанные соотношениями $C_\mu C_\mu = 0$, $\dot{C}_\mu \dot{C}_\mu = 0$ Эти формулы, очевидно, получаются из (21а), если положить $\partial C_\mu / \partial \tau_2 = 0$, $\mu = \overline{0,3}$.

Общее решение трехмерной системы (3) при $u = u(x_0, x_1, x_2)$ в 1932–1933 гг. построили В.И. Смирнов и С.Л. Соболев [13–15]:

$$A_0(u)x_0 - A_1(u)x_1 - A_2(u)x_2 + B(u) = 0,$$

где A_0, A_1, A_2, B — произвольные гладкие функции, связанные соотношением $A_0^2(u) - A_1^2(u) - A_2^2(u) = 0$

Эти формулы, очевидно, получаются из (21 б) при $B_\mu = 0$, $\mu = \overline{0,3}$, $A_3 = 0$. В 1944 г. Н. П. Еругин [16] обобщил формулу Смирнова–Соболева на четырехмерный случай.

Из приведенных результатов вытекает такой общий качественный вывод. Все решения линейных и нелинейных скалярных пуанкаре-инвариантных волновых уравнений следует характеризовать рангом матрицы $\|u_{x_\mu x_\nu}\|$ и значениями параметра λ, входящего в уравнение эйконала (8). Параметр λ может принимать одно из трех значений: -1, 0, 1. Важно подчеркнуть, что эти числа дают пуанкаре-инвариантную характеристику множества решений волновых уравнений.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Lioville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 9, 3645–3658.

2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Inst. for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.

3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.

4. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
5. Cieciura G., Grundland A., A certain class of solutions of the nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 12, 3460–3469.
6. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.
7. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, New York, Acad. Press, V. 1, 1965, 511 p.; V. 2, 1972, 301 p.
8. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт N 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 53 с.
9. Lie S., Vorlesungen über continuerliche Gruppen, Leipzig, Teubner, 1893, 805 p.
10. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
11. Collins C.B., Complex potential equations I. A technique for solution, *Proc. Cambr. Phyl. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.
12. Bateman H., The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion of the basis of Maxwell's equations, Cambridge, Univ. Press, 1915, 180 p.
13. Смирнов В.И., Соболев С.Л., Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний, *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1932, **20**, 37 с.
14. Смирнов В.И., Соболев С.Л., О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии, *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1933, **29**, 43–51.
15. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Тр. физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова*, 1934, **5**, 259–264.
16. Еругин Н.П., О функционально-инвариантных решения, *Доклады АН СССР*, 1944, **20**, № 9, 385–386.