Связные подгруппы конформной группы $C(1,4)$

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Предложен метод описания максимальных подалгебр ранга r, $1 \le r \le 4$, конформной алгебры $AC(1,4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала. С помощью этого метода проведена классификация с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности всех максимальных подалгебр L ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $AC(1,4)$, удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, где V — пространство трансляций.

Введение. Уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

инвариантно относительно конформной группы $C(1,4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$ [1]. Применение методов группового анализа для построения точных решений уравнения (1) связано с задачей выделения в группе $C(1,4)$ связных подгрупп, удовлетворяющих заданным требованиям. Изучение связных подгрупп группы $C(1,4)$ сводится к изучению подалгебр соответствующей алгебры Ли $AC(1,4)$. Систематическое изучение подалгебр алгебр преобразований квантовой механики начато в основополагающей работе Патеры, Винтериитца и Цассенхауза [2], в которой предложен метод для описания относительно определенной сопряженности классов подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом и, в частности, с нетривиальным абелевым идеалом.

Этим методом проведена классификация подалгебр произвольных вещественных трех- и четырехмерных алгебр Ли [3] и таких алгебр: $AP(1,3)$ [2], $A\tilde{P}(1,3)$ [4], $A\tilde{P}(1,2)$ [5], $AE(3)$ [6], $AO(1,4)$ [7], $AO(2,3)$ [8], $AOpt(1,2)$ [8], $AOpt(1,3)$ [9], $AP(1,4)$ [10–13]. Подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ изучены с точностью до $C(1,4)$-сопряженности в работе [14].

В настоящей работе предложен новый метод для классификации подалгебр алгебры инвариантности $AC(1,4)$ уравнения (1). Он основан на том, что подалгебры алгебры $AC(1,4)$ изучаются с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности. Две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются эквивалентными, если для некоторого $g \in C(1,4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Классификацию всех подалгебр конформной алгебры проводим по рангам. Две максимальные подалгебры L_1, L_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AC(1,4)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $C(1,4)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра. В работе предложен метод, с помощью которого подалгебры данного рода можно полностью описать.

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 7–8, С. 870–884.

Указанный метод основан на разложении пространства трансляций в ортогональную сумму подпространств и на разбиении множества всех подалгебр алгебры $AC(1,4)$ на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом. В ходе решения задачи получено также описание максимальных подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$ и решена задача о конформной сопряженности подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

2. Конформная группа $C(1,4)$ и ее алгебра Ли. Пусть $R_{1,4}$ — пространство Минковского с метрикой $g_{\alpha\beta}$, где $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4$, $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{44} = 1$. Отображение $x_i = x_i(y_0, y_1, \ldots, y_4)$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, области $U \subset R_{1,4}$ в U называется конформным, если

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_\beta} = \lambda(x) g_{\alpha\beta},$$

где $\lambda(x) \neq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_4)$. Множество всех конформных преобразований пространства $R_{1,4}$ образует группу $C(1,4)$.

Пусть $O(2,5)$ — группа изометрий псевдоевклидова пространства $R_{2.5}$ с метрикой ρ_{ab}, где $\rho_{ab} = 0$ при $a \neq b$, $a, b = 1, 2, \ldots, 7$, $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \cdots = -\rho_{77} = 1$. Известно (см., например [14]), что существует гомоморфизм φ: $O(2,5) \to C(1,4)$, сопоставляющий матрице $C \in O(2,5)$ конформное преобразование φ_C пространства $R_{1,4}$. Ядро гомоморфизма φ состоит из $\pm E_7$, где E_7 — единичная матрица порядка 7. Поэтому часто отождествляют $C(1,4)$ с $O(2,5)$.

Гомоморфизм φ: $O(2,5) \to C(1,4)$ индуцирует изоморфизм f алгебры $AO(2,5)$ на алгебру $AC(1,4)$. Если отождествить алгебры $AO(2,5)$ и $AC(1,4)$, то группа $O(2,5)$-автоморфизмов алгебры $AO(2,5)$ совпадает с группой $C(1,4)$-автоморфизмов алгебры $AC(1,4)$. Выпишем изоморфизм f в явном виде. Пусть I_{ab} — матрица порядка 7, имеющая единицу на пересечении a-й строки и b-го столбца и нули на всех остальных местах $(a, b = 1, \ldots, 7)$. Базис алгебры $AO(2,5)$ образуют матрицы $\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}$, $\Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ab}$, $a < b$; $a, b = 3, \ldots, 7$, $\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}$, $i = 1, 2$; $a = 3, \ldots, 7$. Они связаны такими коммутационными соотношениями:

$$[\Omega_{ab}\Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac}, \quad a, b, c, d = 1, \ldots, 7.$$

Базис алгебры $AC(1,4)$ составляют генераторы псевдовращений $J_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4$, трансляций (сдвигов) P_α, нелинейных конформных преобразований K_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4$, и дилатации D. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям [14]

$$\begin{gathered}
[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \quad [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \\
[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}K_\gamma - g_{\alpha\gamma}K_\beta, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0, \qquad (2) \\
[D, P_\alpha] = P_\alpha, \quad [D, K_\alpha] = -K_\alpha, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}),
\end{gathered}$$

где $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, 4$.

Изоморфизм f: $AO(2,5) \to AC(1,4)$ задается таким образом:

$$\begin{gathered}
f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}) = J_{\alpha\beta}, \quad f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,7}) = P_\alpha, \\
f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,7}) = K_\alpha, \quad f(\Omega_{17}) = -D, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4.
\end{gathered}$$

В дальнейшем будем отождествлять прообраз с образом при изоморфизме f. В связи с этим получаем два набора обозначений для одного и того же базиса, а именно:

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha), \\
&\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), \quad \Omega_{17} = -D, \quad \alpha,\beta = 0,1,\ldots,7; \quad \alpha < \beta.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Пусть $Q_1,\ldots,Q_7$ — ортонормированный базис псевдоевклидова пространства $R_{2,5}$ с метрикой

$$
\rho(X,X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_5^2, \quad X = x_iQ^i.
$$

Нормализатор одномерного вполне изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7\rangle$ в алгебре $AO(2,5)$ совпадает с расширенной алгеброй Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle \oplus (AO(1,4) \oplus \langle D\rangle)$, а нормализатор двумерного изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6\rangle$ совпадает с алгеброй

$$
AOpt(1,4) = \langle M, P_1, P_2, P_3, G_1, G_2, G_3\rangle \oplus (AO(3) \oplus \langle C, S, T, Z\rangle),
$$

где

$$
\begin{aligned}
&AO(1,4) = \langle J_{\alpha\beta}\,|\,\alpha,\beta = 0,1,\ldots,4\rangle, \quad AO(3) = \langle J_{\alpha\beta}\,|\,a,b = 1,2,3\rangle, \\
&M = P_0 + P_4, \quad G_a = J_{0a} - J_{a4}, \quad a = 1,2,3, \quad C = -(J_{04} + D), \\
&Z = J_{04} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_4), \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4).
\end{aligned}
$$

Алгебра $AOpt(1,4)$ называется оптической алгеброй пространства $R_{1,4}$.

Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2). Генераторы алгебры $AOpt(1,4)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&[G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab}M, \\
&[G_a, M] = [P_a, M] = [J_{ab}, M] = 0. \quad [C, S] = 2S, \quad [C, T] = -2T, \quad [T, S] = C, \\
&[Z, M] = -2M, \quad [Z, G_a] = -G_a, \quad [Z, P_a] = -P_a, \\
&[Z, C] = [Z, S] = [Z, T] = 0, \quad [C, G_a] = G_a, \quad [C, P_a] = -P_a, \quad [C, M] = 0, \\
&[S, G_a] = 0, \quad [S, P_a] = -G_a, \quad [S, M] = 0, \quad [T, G_a] = P_a, \quad [T, P_a] = 0, \\
&[T, M] = 0, \quad a,b,c = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

3. Алгебра инвариантности уравнения эйконала. В работе [1] доказано, что максимальной алгеброй инвариантности уравнений эйконала (1) является алгебра Ли $AC(1,4)$ конформной группы $C(1,4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$. Базис алгебры $AC(1,4)$ составляют такие векторные поля:

$$
\begin{aligned}
&P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha\partial_\alpha, \\
&K_\alpha = -2(g^{\alpha\beta}x_\beta)D - (g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma)\partial_\alpha,
\end{aligned}
$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3,4$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $C(1,4)$. Вещественная функция $f(x) = f(x_0, x_1, \ldots, x_4)$, определенная на некоторой области U пространства $R_{1,4}$ и не являющаяся тождественно постоянной, называется инвариантом группы G, если $f(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in U$. Функцию $f(x)$ называют также инвариантом алгебры Ли AG группы G. Пусть $r_* = r_*(\xi)$ — общий ранг касательного отображения ξ группы G [15]. Число $r_*(AG) = r_*$ называется рангом алгебры AG. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $AC(1,4)$. Если для некоторого $g \in C(1,4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то L_1 и L_2 будем называть $C(1,4)$-эквивалентными.

Множество подалгебр алгебры $AC(1,4) = AO(2,5)$ разобьем на три класса: 1) подалгебры, не имеющие в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств; 2) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1; 3) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$, инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 2 и не имеющее в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности один. Подалгебры второго класса являются подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$. Подалгебры третьего класса являются подалгебрами оптической алгебры $AOpt(1,4)$ и не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Основная трудность — в задаче классификации подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$. Решение такой задачи опирается на следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга r алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, не содержащихся в $AP(1,4)$ [16].

1. Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1,4)$ ранга $r-1$ находим ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1,4)$. Пусть, например. $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,4)}K = K + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подалгебра.

2. Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{N}$ всех одномерных подалгебр алгебры $\mathfrak{N}$ с ненулевой проекцией на $\langle D\rangle$.

3. Если $\langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, \langle D_t + X_t\rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры $\mathfrak{N}$, то $K \oplus \langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, K \oplus \langle D_t + X_t\rangle$ — все расширения ранга r подалгебры K алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, содержащие подалгебру K.

В настоящей работе используются следующие обозначения: $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$; $\hat{\pi}_0$, $\hat{\pi}$, $\hat{\omega}$ — проектирования $A\tilde{P}(1,4)$ на $\langle J_{04}\rangle$, $\langle D\rangle$, $AO(3)$, $AO(1,4)$ соответственно; $\hat{\psi}$, $\hat{\tau}$ — проектирования $AOpt(1,4)$ на $AO(3)$ и $\langle D, S, T, Z\rangle$ соответственно.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$. Если $P_0 \in L$ или $P_0 + P_4 \in L$, то уравнение (1) не имеет вещественных решений, инвариантных относительно L. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые подалгебры $L \subset AC(1,4)$ удовлетворяют условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$.

4. Подалгебры класса 0 алгебры $AC(1,4)$. Подалгебру $F \subset AO(2,5)$ отнесем к классу 0, если она не имеет в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств. Используя описание неприводимых подалгебр алгебр $AO(2,1)$, $AO(2,3)$ и $AO(2,2)$, а также соотношения (3), доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть F — подалгебра класса 0 алгебры $AC(1,4)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если F — максимальная подалгебра ранга 1, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12}\rangle,\quad \alpha > 0,\ \alpha \neq 2; \quad 2)\ \ F_2 = \langle P_0 + K_0\rangle;$$

$$3)\ F_3 = \langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} + \beta J_{34}\rangle,\quad 0 < \alpha \leq \beta,\ \alpha, \beta \neq 2;$$

b) если F — максимальная подалгебра ранга 2, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0, J_{12}\rangle; \quad 2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0, J_{12} + \alpha J_{34}\rangle, \quad 0 < \alpha \le 1;$$
$$3)\ F_3 = \langle J_{12} + \alpha(P_0 + K_0), J_{34} + \beta(P_0 + K_0)\rangle, \quad \alpha > 0,\ \beta \ge 0,$$
$$2\alpha \ne 1 \text{ при } \beta = 0;$$

c) если F — максимальная подалгебра ранга 3, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle;$$
$$2)\ F_2 = AO(3) \oplus \langle P_0 + K_0\rangle; \quad 3)\ F_3 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}\rangle;$$
$$4)\ F_4 = \langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle, \quad \alpha > 0,\ \alpha \ne 1;$$

d) если F — максимальная подалгебра ранга 4, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24}\rangle;$$
$$2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0 - 4J_{23}, P_2 + K_2\sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03},$$
$$-P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, K_4 - P_4\rangle;$$
$$3)\ F_3 = \langle J_{12} - J_{34} + \alpha(P_0 + K_0)\rangle \oplus$$
$$\oplus \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle, \quad \alpha > 0;$$
$$4)\ F_4 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(3) \oplus \langle K_4 - P_4\rangle;$$
$$5)\ F_5 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus \langle 2J_{12} + J_{34},$$
$$J_{13} + J_{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}(K_3 - P_3)\rangle;$$
$$6)\ \langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(4);$$
$$7)\ \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4\rangle;$$
$$8)\ \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle;$$
$$9)\ \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34}\rangle.$$

5. Одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Пусть $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций алгебры Пуанкаре $AP(1,4)$. Подалгебра $L \subset AO(1,4)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(1,4)$ относится к классу 1 или имеет изотропный ранг 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства V, инвариантного относительно L, равен 1. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра алгебры $AO(1,4)$ имеет изотропный ранг 0 или 1. Аналогично определяются эти понятия и для подалгебры алгебры $AO(1,4)$.

Пусть L — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1,4)$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L — подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0}\rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0+1}, \ldots, P_{k_0+k_1}\rangle$, …, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \cdots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = 4$, $k_0 \ge 0$, $k_i \ge 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь V_0

— псевдоевклидово пространство типа $(1, k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i = 1, \ldots, s$. Естественно возникает задача определения подобного разложения для подалгебры L класса 1 алгебры $AO(1,4)$. Всегда можно предполагать, что такая подалгебра L оставляет инвариантным подпространство $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3 \rangle$. Пространство $V_{(1)}$ с точностью до $O(1,4)$-сопряженности является прямой ортогональной суммой L-инвариантных подпространств U и W, удовлетворяющих двум условиям [16]:

a) пространство U изотропно и является ортогональной суммой $U = U_1 + \cdots + U_s$ L-инвариантных подпространств $U_1 = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus V_1$, …, $U_s = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus V_s$, где $V_1 = \langle P_1, \ldots, P_{k_1} \rangle$, …, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s} \rangle$, $\sigma = k_1 + \cdots + k_{s-1}$; каждое из подпространств U_1 содержит только следующие L-инвариантные подпространства: 0, $\langle P_0 + P_4 \rangle$, U_i;

b) пространство W невырождено и является прямой ортогональной суммой подпространств $W_1 = \langle P_{l_0+1}, \ldots, P_{l_0+l_1} \rangle$, …, $W_t = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+l_t} \rangle$, $t \geq 0$, $l_0 = \sigma + k_s$, $\delta = l_0 + \cdots + l_{t-1}$, $\sigma + l_t = 3$; каждое из подпространств W_i неприводимо и инвариантно относительно L.

Отметим, что максимальная подалгебра класса 1 алгебры $AO(1,4)$, оставляющая $V_{(1)}$ инвариантным, совпадает с алгеброй $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle \oplus (AO(3) \oplus \langle J_{04} \rangle)$, где $G_a = J_{0a} - J_{a4}$, $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$, $a = 1, 2, 3$.

Применим эти результаты к задаче классификации максимальных подалгебр данного ранга алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. В настоящем пункте рассматривается классификация одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

Теорема 2. *С точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются следующими алгебрами:*

$$
\begin{gathered}
1)\ L_1 = \langle J_{12} \rangle; \quad 2)\ L_2 = \langle J_{12} + P_0 \rangle; \quad 3)\ L_3 = \langle J_{12} + P_0 + P_4 \rangle; \\
4)\ L_4 = \langle J_{12} + P_3 \rangle; \quad 5)\ L_5 = \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle, \quad 0 < \alpha \leq 1; \\
6)\ L_6 = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + P_0 \rangle; \quad 7)\ L_7 = \langle G_1 \rangle; \quad 8)\ L_8 = \langle G_1 + P_2 \rangle; \\
9)\ L_9 = \langle G_1 + P_0 - P_4 \rangle; \quad 10)\ L_{10} = \langle J_{12} + G_3 \rangle; \\
11)\ L_{11} = \langle J_{12} + G_3 + P_0 - P_4 \rangle; \quad 12)\ L_{12} = \langle J_{04} \rangle; \\
13)\ L_{13} = \langle J_{04} + P_1 \rangle; \quad 14)\ L_{14} = \langle J_{12} + cJ_{04} \rangle, \quad c > 0; \\
15)\ L_{15} = \langle J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle, \quad c > 0; \quad 16)\ L_{16} = \langle J_{12} + \alpha D \rangle, \quad \alpha > 0; \\
17)\ L_{17} = \langle J_{12} + J_{34} + \alpha D \rangle, \quad \alpha > 0; \\
18)\ L_{18} = \langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D \rangle, \quad c > 0,\ \alpha > 0; \quad 19)\ L_{19} = \langle J_{04} + \alpha D \rangle, \quad \alpha > 0; \\
20)\ L_{20} = \langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle, \quad c > 0,\ \alpha > 0; \quad 21)\ L_{21} = \langle G_3 + D \rangle; \\
22)\ L_{22} = \langle J_{12} + G_3 + \alpha D \rangle, \quad \alpha > 0; \quad 23)\ L_{23} = \langle J_{04} + D + M \rangle; \\
24)\ L_{24} = \langle J_{12} + \alpha(J_{04}) + D + M) \rangle, \quad \alpha > 0; \quad 25)\ L_{25} = \langle D \rangle; \\
26)\ L_{26} = \langle P_1 \rangle.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Пусть одномерная подалгебра L содержится в $AP(1,4)$ и относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой суммой неприводимых L-подпространств. С точностью до $O(1,4)$-сопряженности $V = \langle P_0 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3, P_4 \rangle$. Следовательно, $L = \langle J_{12} + \alpha_{34} + \beta P_0 \rangle$. Если $\beta \neq 0$, то автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} tD)$ отображает L на $\langle J_{24} + \alpha J_{34} + \varepsilon P_0 \rangle$, $\varepsilon = \pm 1$. Так как автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}[-1, 1, 1, 1, 1]$, отображает алгебру $\langle J_{12} + \alpha J_{34} - P_0 \rangle$

на алгебру $\langle J_{12} + \alpha_{34} + P_0 \rangle$, то в рассматриваемом случае L сопряжена либо с L_5, либо с L_6.

Пусть далее одномерная подалгебра L, являющаяся подалгеброй алгебры $AP(1,4)$, относится к классу 1 и $\hat{\pi}_0(L) = 0$. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$, то $\omega(L) = \langle J_{12} \rangle$. Поэтому $L = \langle J_{12} + X \rangle$, где $X \in \langle P_0, P_3, P_4 \rangle$. В силу теоремы Витта существует такая изометрия пространства $\langle P_0, P_3, P_4 \rangle$, которая отображает X в один из генераторов αP_0, αP_3, $\alpha(P_0 + P_4)$. Рассмотрим, например, алгебру $\langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle$, $\alpha \neq 0$. Автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} tD)$ отображает ее на алгебру $\langle J_{12} + \varepsilon P_0 \rangle$, $\varepsilon = \pm 1$. Если $\varepsilon = -1$, то автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}[-1,1,1,1,1]$, отображает алгебру $\langle J_{12} + P_0 \rangle$ на алгебру $\langle J_{12} + P_0 \rangle$. В двух других случаях показываем, что L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с алгебрами $\langle J_{12} + P_3 \rangle$ и $\langle J_{12} + P_0 + P_4 \rangle$ соответственно. Аналогично, если пространство $V_{(1)}$ допускает разложение $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$, то получаем алгебры $\langle G_1 \rangle$, $\langle G_1 + P_2 \rangle$ и $\langle G_1 + P_2 \rangle$ и $\langle G_1 + P_0 - P_4 \rangle$, а если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_3 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle$, — то алгебры $\langle J_{12} + G_3 \rangle$, $\langle J_{12} + G_3 + P_0 - P_4 \rangle$.

Пусть L является подалгеброй алгебры $AP(1,4)$ и $\hat{\pi}(L) = \langle J_{04} \rangle$. Допустим, например, что $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$. Тогда с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности $L = \langle J_{12} + cJ_{04} + X \rangle$, $X = \alpha P_3$, $c \neq 0$. Автоморфизм, соответствующий, матрице $\operatorname{diag}[1,T,1,1]$,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

отображает L на $\langle J_{12} - cJ_{04} + \alpha P_3 \rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $c > 0$. Как и выше, нетрудно убедиться, что $\alpha = 1$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда проекция L на $\langle D \rangle$ совпадает с $\langle D \rangle$. Тогда $L = \langle D + X \rangle$, где $X \in AP(1,4)$. Поэтому задача сводится к исследованию всех случаев, изложенных выше. Если $X = J_{12} + cJ_{34} + \beta P_0$, то очевидно, алгебра L сопряжена с алгеброй $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теорема доказана.

Так как каждая одномерная подалгебра является максимальной подалгеброй ранга 1, то доказанная теорема дает полную классификацию максимальных подалгебр ранга 1 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

6. Подалгебры ранга 2 алгебры $\boldsymbol{A\tilde{P}(1,4)}$. В настоящем пункте проводим классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности, используя одномерные подалгебры алгебры $AP(1,4)$, классификация которых изложена в п. 5. Указанная задача решается в три этапа.

а) Подалгебры класса 0 алгебры $AP(1,4)$. Все максимальные подалгебры ранга 2, относящиеся к классу 0, описываются следующим предложением.

Предложение 1. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу 0, и $F \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Тогда она $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = \langle J_{12}, J_{34} \rangle$; 2) $F_2 = \langle J_{12} + P_0, J_{34} + \delta P_0 \rangle$, $\delta \geq 0$;
3) $F_3 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle$.

Доказательство. Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2, относящаяся к классу 0, и $F \cap V = 0$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых F-подпространств. Допустим, например, что $V = \langle P_0\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3, P_4\rangle$. Из условия $F \cap V = 0$ вытекает, что $F = \langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \beta P_0\rangle$. Если $\alpha = \beta = 0$, то получаем алгебру $F = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$. В случае $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ можно предполагать, что $\alpha \neq 0$. С помощью автоморфизма вида $\exp(\mathrm{ad}\, tD)$ алгебру F отображаем на алгебру $F' = \langle J_{12} + \varepsilon P_0, J_{34} + \beta' P_0\rangle$, где $\varepsilon = \pm 1$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\,[-1, 1, 1, 1, 1]$, отображает F' на $F'' = \langle J_{12} + P_0, J_{34} + \beta'' P_0\rangle$. Всегда можно считать, что $\beta^2 \geq 0$. Разложению $V = \langle P_1\rangle \oplus \langle P_2\rangle \oplus \langle P_0, P_3, P_4\rangle$ пространства V соответствует подалгебра F_3 предложения 1. Предложение доказано.

b) Подалгебры класса 1 алгебры $AP(1,4)$. Вначале проведем классификацию подалгебр алгебры $AP(1,4)$, проекция которых на $\langle J_{04}\rangle$ равна 0. Описывает такие подалгебры следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(K) = 0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда K $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $K_1 = \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3\rangle,\ \alpha > 0\ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0$;

2) $K_2 = \langle G_1, G_2 + P_2\rangle$; 3) $K_3 = \langle G_1 + P_0 - P_4, P_2\rangle$;

4) $K_4 = \langle G_1 + P_2, P_3\rangle$; 5) $K_5 = \langle G_1, P_3\rangle$; 6) $K_6 = \langle G_3, J_{12}\rangle$;

7) $K_7 = \langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}\rangle$; 8) $K_8 = \langle P_2, P_3, J_{23}\rangle$; 9) $K_9 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$;

10) $K_{10} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, G_3 + \alpha(P_0 - P_4)\rangle,\ \alpha \geq 0$;

11) $K_{11} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 12) $K_{12} = \langle J_{12}, P_3\rangle$;

13) $K_{13} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, P_3\rangle$; 14) $K_{14} = \langle J_{12} + P_3, P_4\rangle$;

15) $K_{15} = \langle J_{12} + P_0, P_3\rangle$.

Доказательство. Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, $K \cap V = 0$ и $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$ – разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 5. Тогда $K = \langle G_1, G_2, G_3\rangle \oplus AO(3)$, где $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$. Однако ранг алгебры K равен 3, что противоречит условию предложения. Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$. В этом случае $G_1, G_2 \in K$. В силу максимальности K имеем $J_{12} \in K$, а потому $K = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$, и алгебра K относится к типу 9 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$. Если проекция K на $\langle P_3\rangle$ равна 0, то с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности K обладает базисом G_1, $G_2 + P_2$ и потому относится к типу 2 предложения 2. Пусть проекция K на $\langle P_3\rangle$ отлична от нуля. Тогда K относится к типу 1 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_3\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle$. Алгебра K содержит генераторы $G_3 + \beta(P_0 - P_4)$ и $J_{12} + \delta(P_0 + P_4)$. В результате алгебра K относится к типам 6, 7, 10 предложения 2.

Случай $K \cap V = \langle P_3\rangle$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, $\hat{\pi}_0(L) = \langle J_{04}\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{04}, P_1\rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12} + cJ_{04}, P_3\rangle,\ c > 0$; 3) $L_3 = \langle J_{04}, P_{12}\rangle$;

4) $L_4 = \langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle,\ c > 0$; 5) $L_5 = \langle J_{04} + P_2, P_1\rangle$;

6) $L_6 = \langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3\rangle,\ \delta \geq 0$; 7) $L_7 = \langle J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$;

8) $L_8 = \langle G_3, J_{04} + P_1 \rangle$.

Доказательство. Согласно алгоритму, изложенному в п. 2, классификация всех максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, удовлетворяющих предложению 3, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений одномерных подалгебр F ранга 1, для которых $\hat{\pi}_0(F) = 0$, с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{04} + X \rangle$, $X \in AP(1,4)$.

1°. Алгебра $F = \langle J_{12} \rangle$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_1$ алгебры F_1 в $AP(1,4)$ совпадает с алгеброй $F_1 \oplus AP(1,2)$, где $AP(1,2) = \langle P_0, P_3, P_4, J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры $AP(1,2)$ с точностью до $P(1,2)$-сопряженности. Алгебра $AP(1,2)$ содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04} \rangle$: $\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha > 0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга 2 алгебры F_1: $\langle J_{12}, J_{04} \rangle$, $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha > 0$.

2°. Алгебра $F_2 = \langle J_{12} + P_3 \rangle$. Очевидно, $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_2 = F_2 \oplus \langle P_0, P_3, P_4, J_{04} \rangle$. Алгебра $\langle P_0, P_3, P_4, J_{04} \rangle$ содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04} \rangle$: $\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha \geq 0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга 2: $\langle J_{12} + P_3, J_{04} \rangle$, $\langle J_{12} + P_3, J_{04} + \alpha P_3 \rangle$. Последняя подалгебра сопряжена с алгеброй $\langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3 \rangle$, $\delta \geq 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

c) Максимальные подалгебры ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 6a) и 6b), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) F_1–F_3 предложения 1; 2) K_1–K_{15} предложения 2;
3) L_1–L_8 предложения 3; 4) $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
5) $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 6) $\langle J_{12}, G_3 + D \rangle$; 7) $\langle J_{12}, D \rangle$;
8) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, D \rangle,\ 0 \leq \alpha \leq 1$; 9) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{12} + \beta D \rangle,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta \geq 0$;
10) $\langle G_3, D \rangle$; 11) $\langle G_3, J_{04} + D + M \rangle$; 12) $\langle G_3, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
13) $\langle G_3, J_{12} + \beta D \rangle,\ \beta > 0$; 14) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ a > 0$;
15) $\langle J_{12} + M, J_{04} + D \rangle$; 16) $\langle J_{12} + \alpha M, J_{04} + D + M \rangle,\ \alpha \geq 0$;
17) $\langle G_1 + P_2, J_{04} - D \rangle$; 18) $\langle G_1 + P_0 - P_4, J_{04} - 2D \rangle$; 19) $\langle J_{04}, D \rangle$;
20) $\langle J_{04}, J_{12} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 21) $\langle J_{12} + cJ_{04}, D \rangle,\ c > 0$;
22) $\langle J_{12} + cJ_{04}, J_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ \alpha > 0$; 23) $\langle P_3, D \rangle$;
24) $\langle P_3, J_{12} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 25) $\langle P_3, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
26) $\langle P_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ \alpha > 0$; 27) $\langle P_3, G_1 + D \rangle$;
28) $\langle P_3, J_{04} + D + M \rangle$; 29) $\langle P_3, J_{12} + c(J_{04} + D + M) \rangle$;
30) $\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2D) \rangle,\ c > 0$.

Теорема доказывается с использованием алгоритма, изложенного в п. 3.

7. Подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ проводим по схеме, изложенной в п. 3. Вначале находим максимальные подалгебры ранга 3, относящиеся к классу 0.

а) Подалгебры класса 0 алгебры $AP(1,4)$. Описывает все максимальные подалгебры класса 0 следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $AP(1,4)$ и $F \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда F $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = \langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 2) $F_2 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$;

3) $F_3 = \langle J_{12} + P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 4) $F_4 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;

5) $F_5 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$;

Предложение 4 доказывается аналогично предложению 1.

b) Подалгебры класса 1 алгебры $AP(1,4)$. Докажем следующее предложение.

Предложение 5. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(K) = 0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда K $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1 = \langle G_1, G_2, J_{12}, P_3\rangle$; 2) $K_2 = \langle G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;

3) $K_3 = \langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 4) $K_4 = \langle G_3 + 2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;

5) $K_5 = \langle G_1, G_2 + P_2, P_3\rangle$; 6) $K_6 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;

7) $K_7 = \langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3\rangle$, $\lambda > 0$; 8) $K_8 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$.

Доказательство. Пусть $K \cap V = 0$ и $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$ — разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 3. Тогда $G_1, G_2 \in K$ и в силу максимальности K имеем $J_{12} \in K$. Следовательно, $K_1 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle \subset K$ и потому $K = K_1 \oplus K'$. С учетом $K \cap V = 0$ отсюда получаем, что $K' = 0$. Однако, ранг алгебры K_1 равен 2, что противоречит условию. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$, то получаем $K = \langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_2\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_3\rangle$, то $K = \langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3\rangle$.

Случаи $K \cap V = \langle P_3\rangle$, $K \cap V = \langle P_1, P_2\rangle$ рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(L) = \langle J_{04}\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$;

3) $L_3 = \langle J_{04} + P_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{04} + P_2, G_1, P_3\rangle$;

5) $L_5 = \langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04} + P_3\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$.

Предложение 6 доказывается аналогично предложению 3.

c) Максимальные подалгебры ранга 3 алгебры $AP(1,4)$. Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 7a) и 7b), а также классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, изложенную в п. 6, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) F_1–F_5 предложения 4; 2) K_1–K_8 предложения 5;

3) L_1–L_6 предложения 6; 4) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$;
5) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$;
7) $\langle G_1+P_3, G_2+\alpha P_2+\beta P_3, J_{04}-2D\rangle,\ \alpha>0\ \vee\ \alpha=0,\ \beta>0$;
8) $\langle G_1, G_2+P_2, J_{04}-D\rangle$; 9) $\langle G_1+P_0-P_4, P_2, J_{04}-2D\rangle$;
10) $\langle G_1+P_2, P_3, J_{04}-D\rangle$; 11) $\langle G_1, P_3, D\rangle$; 12) $\langle G_1, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;
13) $\langle G_1, P_3, J_{04}+D+M\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle G_3, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;
16) $\langle G_3, J_{12}, J_{04}+D+M\rangle$; 17) $\langle G_3+P_0-P_4, J_{12}, J_{04}-2D\rangle$;
18) $\langle P_2, P_3, J_{23}, D\rangle$; 19) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$;
20) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04}+D+M\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, J_{12}, D\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, J_{12}, D\rangle$;
22) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha\neq 0$; 23) $\langle G_1, G_2, J_{04}+D+M\rangle$;
24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{33}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$;
26) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+D+M\rangle$; 27) $\langle J_{12}, P_3, D\rangle$;
28) $\langle J_{12}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$; 29) $\langle J_{12}, P_3, J_{04}+D+M\rangle$;
30) $\langle J_{12}+M, P_3, J_{04}+D\rangle$; 31) $\langle J_{12}+\alpha M, P_3, J_{04}+D+M\rangle,\ \alpha>0$;
32) $\langle J_{04}, P_1, D\rangle$; 33) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3, D\rangle,\ c>0$;
34) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle,\ c>0,\ \alpha>0$; 35) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$;
36) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, D\rangle,\ c>0$; 37) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ c>0,\ \alpha\neq 0$.

Доказательство. Если $L\subset AP(1,4)$, то справедливость теоремы вытекает из предложений 4–6. Проведем классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, проекция которых на $\langle D\rangle$ совпадает с $\langle D\rangle$. Согласно алгоритму, изложенному в п. 3, для каждой максимальной подалгебры ранга 2 алгебры $AP(1,4)$ необходимо найти все ее неэквивалентные расширения ранга 3 в алгебре $A\tilde{P}(1,4)$. Все вычисления приведены в таблице. Теорема доказана.

8. Подалгебры ранга 4 алгебры $\boldsymbol{A\tilde{P}(1,4)}$. Классификацию максимальных подалгебр ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ проводим по схеме, изложенной в п. 3. В результате получим следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L\cap V\subset\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AO(1,4)$; 2) $AO'(1,3)\oplus\langle P_3\rangle$, где $AO'(1,3)=\langle J_{\alpha\beta}\,|\,\alpha,\beta=0,1,2,4)$;
3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$;
5) $\langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{01}, J_{03}, J_{13}, P_4, D\rangle$; 7) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$;
8) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, D\rangle$;
10) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, D\rangle$; 11) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$;
12) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 13) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$;
14) $\langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$;
16) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3, D\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$;
18) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04}+D+M\rangle$;
19) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$; 20) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04}+D+M\rangle$;
21) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle,\ \alpha\neq 0$;

№ п/п	Максимальные подалгебры ранга 2 алгебры $AP(1,4)$	Нормализатор подалгебры в $A\tilde{P}(1,4)$	Одномерные подалгебры нормализатора с нулевой проекцией на $\langle D\rangle$
1	$F_1 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$	$F_1 \oplus \langle P_0, D\rangle$	$\langle D\rangle$
2	$F_3 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$	$F_2 \oplus \langle P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{12} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$
3	$K_1 = \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3\rangle$	$K_1 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - 2D\rangle$
4	$K_2 = \langle G_1, G_2 + P_2\rangle$	$K_2 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
5	$K_3 = \langle G_1 + P_0 - P_4, P_2\rangle$	$K_3 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - 2D\rangle$
6	$K_4 = \langle G_1 + P_2, P_3\rangle$	$K_4 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
7	$K_5 = \langle G_1, P_3\rangle$	$K_5 \oplus \langle P_2, P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
8	$K_6 = \langle G_3, J_{12}\rangle$	$K_6 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
9	$K_7 = \langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}\rangle$	$K_7 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
10	$K_8 = \langle P_2, P_3, J_{23}\rangle$	$K_8 \oplus \langle P_0, P_1, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
11	$K_9 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$	$K_9 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
12	$K_{11} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$	$K_{11} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
13	$K_{12} = \langle J_{12}, P_3\rangle$	$K_{12} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
14	$K_{13} = \langle J_{12} + M, P_3\rangle$	$K_{13} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04} + D\rangle$	$\langle J_{04} + D\rangle$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
15	$L_1 = \langle J_{04}, P_1\rangle$	$L_1 \oplus \langle P_2, P_3, D\rangle$	$\langle D\rangle$
16	$L_2 = \langle J_{12} + cJ_{04}, D\rangle$	$L_2 \oplus \langle J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$
17	$L_3 = \langle J_{04}, J_{12}\rangle$	$L_3 \oplus \langle P_3, D\rangle$	$\langle D\rangle$
18	$L_4 = \langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle$	$L_4 \oplus \langle J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} - \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$

22) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$;
23) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle,\ \alpha > 0$;
24) $\langle G_3 + P_0 - P_4, P_1, P_2, J_{12}, J_{04} - 2D\rangle$;
25) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2 + P_2, P_3, J_{04} - D\rangle$;
27) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4, D\rangle$; 28) $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3, J_{04} - D\rangle,\ \lambda > 0$;
29) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$.

9. Конформная сопряженность подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. В пп. 5–8 проведена классификация максимальных подалгебр ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до группы G_1 $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизмов. Все эти автоморфизмы оставляют инвариантным вполне изотропное подпространство $\bar{V}_{(1)} = \langle Q_1 + Q_7\rangle$. Полученное множество подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ обозначим через $\mathfrak{U}$. Две подалгебры $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ могут быть сопряжены с помощью некоторого $C(1,4)$-автоморфизма, не входящего в G_1. Следовательно, на втором этапе выделяется задача классификации подалгебр из множества $\mathfrak{U}$ с точностью до $C(1,4)$-сопряженности. Отметим, что если $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ $C(1,4)$-сопряжены, то подалгебры $\hat{\omega}(L_1)$ и $\hat{\omega}(L_2)$ относятся одновременно либо к классу 0, либо к классу 1. Рассмотрим вначале случай, когда $\hat{\omega}(L_1)$ и $\hat{\omega}(L_2)$ относятся к классу 0. Обозначим через C_1 и C_2 матрицы $\operatorname{diag}[1,1,1,1,1,1,-1]$ и $\operatorname{diag}[1,1,1,1,1,-1,1]$ соответственно. Пусть φ_i — $C(1,4)$-автоморфизм алгебры $AC(1,4)$, определяемый матрицей C_i, $i = 1,2$. Полное решение задачи о сопряженности подалгебр $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ будет опираться на следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть $L \in \mathfrak{U}$ — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $\hat{\omega}(L)$ относится к классу 0. Если W — L-инвариантное вполне изотропное подпространство V, то существует такой $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм f алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, что $f(L) = L$ и $f(W) = \langle Q_1 + \varepsilon Q_7\rangle$, где $\varepsilon = \pm 1$.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда $L \cap V = 0$. Случай $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ рассматривается аналогично. Так как $\hat{\omega}(L)$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $AO(1,4)$, то она либо полупроста, либо $O(1,4)$-сопряжена с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$. Если $\hat{\omega}(L)$ полупроста, то она имеет только расщепляемые расширения в алгебре $AP(1,4)$, а потому L сопряжена либо с алгеброй $AO(1,k)$, $2 \le k \le 4$, либо с алгеброй $AO(1,k) \oplus \langle D\rangle$. В случае $k = 4$ $W \subset \langle Q_1, Q_7\rangle$, а потому $W = \langle Q_1 + \varepsilon Q_7\rangle$. Пусть $k = 3$, тогда $W \subset \langle Q_1, Q_6, Q_7\rangle$. Образующий вектор Q пространства W запишем в виде $Q = \alpha(Q_1 + Q_7) + \beta(Q_1 - Q_7) + \gamma Q_6$. Так как Q — изотропный вектор, то $\gamma^2 - 4\alpha\beta = 0$. Подействовав на вектор Q автоморфизмом, определяемым элементом $\exp(\operatorname{ad} tP_6)$, получим

$$\exp(-tP_6) Q \exp(tP_6) = (\alpha + \gamma t + \beta t^2)(Q_1 - Q_7) + (\gamma + 2\beta t) Q_6.$$

Если $\beta = 0$, то $\gamma = 0$, а потому $W = \langle Q_1 + Q_7\rangle$. Допустим, что $\beta \neq 0$. Положим $\gamma + 2\beta = 0$, тогда $\alpha + \gamma t + \beta t^2 = 0$. Следовательно, $W = \langle Q_1 - Q_7\rangle$. Случай $k = 2$ рассматривается аналогично.

Алгебра $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$ аннулирует в пространстве V только нулевое подпространство. Следовательно, она имеет только расщепляемые расширения в алгебре $AP(1,4)$ и потому L сопряжена либо с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$, либо с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34} + \alpha D\rangle$. Таким образом, этот случай аналогичен случаю $L = AO(1,4)$. Предложение доказано.

Пусть теперь f — $C(1,4)$-автоморфизм, отображающий алгебру $L_1 \in \mathfrak{U}$ на алгебру $L_2 \in \mathfrak{U}$. Подпространство $f^{-1}(V_{(1)})$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. В силу предложения 7 существует $P(1,4)$-автоморфизм ψ, отображающий $\langle Q_1 - Q_7\rangle$ на $f^{-1}(V_{(1)})$, причем $\psi(L_1) = L_1$. Автоморфизм $f\psi$ отображает L_1 на L_2, а $\langle Q_1 - Q_7\rangle$ на $V_{(1)}$. Таким образом, можно предполагать, что $f(L_1) = L_2$ и $f(\langle Q_1 - Q_7\rangle) = V_{(1)}$. Автоморфизм $f\varphi_1$ отображает $V_{(1)}$ на $V_{(1)}$ и потому $f\varphi_1 = f_1$, где f_1 — некоторый $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм. Отсюда $f = f_1\varphi_1$. Последнее соотношение дает возможность проверить, будут ли сопряжены алгебры $L_1 \in \mathfrak{U}$ и $L_2 \in \mathfrak{U}$ с помощью некоторого $C(1,4)$-автоморфизма, не входящего в G_1. С этой целью действуем на алгебру L_1 автоморфизмом φ_1 и получаем алгебру $\varphi(L_1)$. Если L_1 и L_2 сопряжены, то выполняется условие $\varphi_1(L_1) \subset A\tilde{P}(1,4)$. При выполнении этого условия остается проверить алгебры $\varphi_1(L_1)$ и L_2 на сопряженность относительно группы $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизмов, а эта задача решена в предыдущих пунктах.

Пусть далее $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ $C(1,4)$-сопряжены и $\hat{\omega}(L_1)$, $\hat{\omega}(L_2)$ относятся к классу 1. Вполне изотропное подпространство $V_{(2)} = \langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6\rangle$ инвариантно относительно каждой из подалгебр L_1, L_2. Цепочка подпространств $0 \subset V_{(1)} \subset V_{(2)}$ является композиционным рядом каждого из L_i-модулей $V_{(2)}$, $i = 1, 2$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 8. *Пусть $L \in \mathfrak{U}$ — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $\hat{\omega}(L)$ относится к классу 1. Если W — максимальное вполне изотропное подпространство V, инвариантное относительно L, и K — композиционный ряд L-модуля W, то существует такой $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм f алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, что $f(L) = L$, $f(W) = \langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7, Q_2 + \varepsilon_2 Q_6\rangle$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$, а композиционный ряд $f(K)$ модуля $f(W)$ имеет один из следующих видов: a) $0 \subset \langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7\rangle \subset f(W)$; b) $0 \subset \langle Q_2 + \varepsilon_2 Q_6\rangle \subset f(W)$.*

Предложение 8 доказывается аналогично предложению 7.

Покажем, как практически применить данное предложение к задаче сопряженности двух подалгебр $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ относительно группы $C(1,4)$-автоморфизмов. Допустим, что L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены и f — автоморфизм, отображающий L_1 на L_2. Подпространство $f^{-1}(V_{(2)})$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. В силу предложения 8 существует $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм ψ, отображающий $\langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7, Q_2 + \varepsilon_2 Q_6\rangle$ на $f^{-1}(V_{(2)})$, и $\psi(L_1) = L_1$. Кроме того, автоморфизм ψ отображает композиционный ряд K одного из видов a), b) предложения 8 на композиционный ряд модуля $V_{(2)}$. Будем считать, что K имеет такой вид: $0 \subset \langle Q_2 + Q_6\rangle \subset \langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6\rangle$. Обозначим через θ автоморфизм, определяемый матрицей $\mathrm{diag}\,[T, 1, 1, 1, T]$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Автоморфизм θ отображает K, на композиционный ряд $0 \subset V_{(1)} \subset V_{(2)}$. Нетрудно убедиться, что $f = f_1$, где f_1 — некоторый $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Отсюда вытекает, что если L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены, то $\theta(L_1) \subset A\tilde{P}(1,4)$ и подалгебры $\theta(L_1)$ и L_2 $\tilde{P}(1,4)$-сопряжены. Автоморфизм θ обладает такими свойствами:

$$\theta(G_a) = P_a, \quad \theta(P_a) = -G_a, \quad \theta(J_{04}) = -D, \quad \theta(D) = -J_{04}, \quad \theta(M) = M.$$

Из изложенного выше вытекает, что дальнейшее упрощение подалгебр из множества $\mathfrak{U}$ достигается за счет автоморфизмов вида $f\theta$, $f\psi\theta$, $f\varphi$, где $\varphi \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$, f — $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм. В результате получаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 1 алгебры $AP(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_1\rangle$; 2) $\langle J_{12}\rangle$; 3) $\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle,\ 0<c\le 1$; 4) $\langle J_{04}\rangle$;
5) $\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle,\ c>0$; 6) $\langle J_{12}+P_0\rangle$; 7) $\langle J_{12}+P_3\rangle$; 8) $\langle J_{12}+M\rangle$;
9) $\langle J_{12}+J_{34}+P_0\rangle$; 10) $\langle J_{12}+cJ_{34}+P_0\rangle,\ 0<c<1$; 11) $\langle J_{04}+P_1\rangle$;
12) $\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle,\ c>0$; 13) $\langle G_3+P_1\rangle$; 14) $\langle G_3+2T\rangle$;
15) $\langle G_3-J_{12}+2T\rangle$; 16) $\langle J_{12}+cJ_{34}+\alpha D\rangle,\ 0<c\le 1,\ \alpha>0$;
17) $\langle J_{04}+\alpha D\rangle,\ 0<\alpha\le 1$; 18) $\langle J_{12}+cJ_{04}+\alpha D\rangle,\ 0<c\le\alpha$;
19) $\langle J_{04}-D+2T\rangle$; 20) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T)\rangle$.

Теорема 7. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, удовлетворяющая условию $L\cap V\subset\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_2,P_3,J_{23}\rangle$; 2) $\langle J_{12},P_3\rangle$; 3) $\langle J_{04},P_1\rangle$; 4) $\langle J_{12}+cJ_{04},P_3\rangle,\ c>0$;
5) $\langle G_3,P_1\rangle$; 6) $\langle J_{12},J_{34}\rangle$; 7) $\langle J_{04},J_{12}\rangle$; 8) $\langle G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle,\ c>0$;
9) $\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$; 11) $\langle J_{12}+P_0,P_3\rangle$; 12) $\langle J_{14}+P_3,P_2\rangle$;
13) $\langle J_{12}+M,P_3\rangle$; 14) $\langle J_{04}+P_2,P_1\rangle$; 15) $\langle G_3+P_2,P_1\rangle$;
16) $\langle G_3+2T,P_1\rangle$; 17) $\langle J_{12}+P_0,J_{34}+\delta_0P_0\rangle,\ \delta\ge 0$;
18) $\langle J_{04}+P_3,J_{12}+\delta P_3\rangle,\ \delta\ge 0$; 19) $\langle J_{04},J_{12}+P_3\rangle$;
20) $\langle J_{12}+M,G_3+\delta T\rangle,\ \delta=0;\ 2$; 21) $\langle J_{12},G_3+2T\rangle$;
22) $\langle G_1+P_3,G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle,\ \mu>0,\ \delta\ge 0$; 23) $\langle G_3,J_{04}+P_1\rangle$;
24) $\langle J_{12}+J_{34},D\rangle$; 25) $\langle J_{12}+cJ_{34},D\rangle,\ 0<c<1$; 26) $\langle J_{04},D\rangle$;
27) $\langle J_{12}+cJ_{04},D\rangle,\ c>0$; 28) $\langle J_{04}+\alpha D,P_1\rangle,\ \alpha>0$;
29) $\langle J_{12}+cJ_{04}+\beta D,P_3\rangle,\ c>0,\ \beta>0$;
30) $\langle J_{12}+\alpha D,J_{34}+\beta D\rangle,\ \alpha>0,\ \beta\ge 0$;
31) $\langle J_{04}+\alpha D,J_{12}+\beta D\rangle,\ \alpha>0,\ \beta\ge 0$; 32) $\langle J_{04},J_{12}+\alpha D\rangle$;
33) $\langle P_1,J_{04}-D+2T\rangle$; 34) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T),P_3\rangle,\ c>0$;
35) $\langle J_{04}+D+M,J_{12}+\alpha M\rangle,\ \alpha\ge 0$; 36) $\langle J_{04}+D,J_{12}+M\rangle$;
37) $\langle J_{04}-2D,G_3+2T\rangle$; 38) $\langle J_{04}-D,G_3+P_1\rangle$;
39) $\langle J_{12}+c(J_{04}-2D),G_3+2T\rangle,\ c>0$.

Теорема 8. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle J_{04},P_1,P_2,J_{12}\rangle$; 2) $\langle J_{04},J_{12},P_3\rangle$; 3) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$;
4) $\langle J_{04}+P_3,P_1,P_2,J_{12}\rangle$; 5) $\langle J_{04}+\alpha D,P_1,P_2,J_{12}\rangle,\ \alpha\ne 0$;
6) $\langle J_{04},D,P_1\rangle$; 7) $\langle J_{12}+cJ_{04},DP_3\rangle,\ c>0$; 8) $\langle J_{04},J_{12},D\rangle$;
9) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}+\alpha D\rangle$; 10) $\langle J_{04}+D+M,J_{12}+\alpha M,P_3\rangle,\ \alpha\ge 0$;
11) $\langle J_{04}+D,J_{12}+M,P_3\rangle$; 12) $\langle P_1,P_2,P_4,J_{12},J_{14},J_{24}\rangle$;
13) $\langle J_{12},P_3,P_4,J_{34}\rangle$; 14) $\langle G_3,J_{04},P_1\rangle$; 15) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},P_4\rangle$;
16) $\langle G_3,J_{04},J_{12}\rangle$; 17) $\langle G_1,G_2,J_{12},J_{04}\rangle$; 18) $\langle J_{03},J_{04},J_{34},J_{12}\rangle$;

19) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 20) $\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$;
21) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 22) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle,\ \alpha>0$;
23) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$;
25) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
27) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 28) $\langle G_3+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
29) $\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle$; 30) $\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 31) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}+P_3\rangle$;
32) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0$; 33) $\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$;
34) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 35) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$; 36) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1\rangle$;
37) $\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$; 38) $AO(4)$.

Теорема 9. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$; 2) $\langle J_{04}, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
4) $AO'(1,3)\oplus\langle P_3\rangle$, где $AO'(1,3)=\langle J_{\alpha\beta}\,|\,\alpha,\beta=0,1,2,4\rangle$; 5) $AO(1,4)$;
6) $\langle J_{12}, D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 7) $\langle D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
8) $\langle J_{04}, D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 9) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
10) $\langle J_{04}, J_{12}, D, P_3\rangle$; 11) $\langle G_3+\alpha D, J_{04}+\beta D, P_1, P_2, J_{12}\rangle,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0$;
12) $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3\rangle$; 13) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_2, D\rangle$; 14) $AO(4)\oplus\langle D\rangle$;
15) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$; 16) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$; 17) $AO'(1,3)\oplus\langle D\rangle$;
18) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
19) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 20) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
21) $\langle J_{04}-D, G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$.

10. Подалгебры оптической алгебры $AOpt(1,4)$. Целью настоящего пункта является описание подалгебр алгебры $AOpt(1,4)$, не имеющих в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности 1. Подалгебры алгебры $AOpt(1,4)$, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1, сопряжены с подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$ и их классификация по рангам изложена в пп. 5–9.

Пусть L — подалгебра алгебры $AOpt(1,4)$. Если $\hat{\tau}(L)\subset\langle C,T,Z\rangle$, то L $C(1,4)$-сопряжена с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ [14]. Учитывая это, доказываем следующие теоремы.

Теорема 10. *Одномерные подалгебры алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженные с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, исчерпываются с точностью до $C(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $\langle S+T\rangle$; 2) $\langle S+T\pm M\rangle$; 3) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)\rangle,\ \alpha>0$;
4) $\langle S+T+\alpha Z\rangle,\ \alpha>0$; 5) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)\pm M\rangle$;
6) $\langle J_{12}+S+T+G_1+P_2\rangle$; 7) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)+\beta Z\rangle,\ \alpha>0,\ \beta>0$.

Теорема 11. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с* *одной из следующих алгебр:*

1) $\langle S+T+J_{12}, G_1+P_2\rangle$; 2) $\langle J_{12}, S+T\rangle$; 3) $\langle S+T+J_{12}+M, G_1+P_2\rangle$;
4) $\langle S+T, Z\rangle$; 5) $\langle S+T+\alpha J_{12}, Z\rangle$, $\alpha>0$;
6) $\langle S+T+J_{12}+\lambda Z, G_1+P_2\rangle$, $\lambda>0$; 7) $\langle J_{12}+\alpha Z, S+T+\beta Z\rangle$, $\alpha>0$;
8) $\langle J_{12}, S+T+\alpha Z\rangle$, $\alpha>0$; 9) $\langle J_{12}+M, S+T+\gamma M\rangle$;
10) $\langle J_{12}, S+T+M\rangle$.

Теорема 12. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 или 4 алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из таких алгебр:*

1) $AO(3)\oplus\langle S+T+\gamma M\rangle$, $\gamma<0$; 2) $\langle S+T, J_{12}, Z\rangle$;
3) $AO(3)\oplus\langle S+T+\alpha Z\rangle$; 4) $\langle S+T+J_{12}, Z, H_1+P_2\rangle$;
5) $\langle S+T+2J_{12}+\gamma M, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\gamma<0$;
6) $\langle \alpha Z+S+T+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\alpha\in R$;
7) $\langle Z, S+T+2J_{12}, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$;
8) $AO(3)\oplus\langle S+T, Z\rangle$.

1. Fushchych W.I., Shfelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
3. Patera J., Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 7, 1449–1456.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
5. Patera J., WinternUz P., Sharp R.T., Zassenhaus H., Subgroups of the similitudre Group of three-dimensional Minkowski space, *Gan. J. Phys.*, 1976, **54**, № 9, 950–961.
6. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–93.
7. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
8. Patera J., Sharp R.T., Winternltz P., Zassenhaus H., Continuous groups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
9. Burdet G., Patera J., Perrin H., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
10. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
11. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
12. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, Тр. Междунар. семинара “Теоретико-групповые методы в физике” (Звенигород, 1979), М., Наука, 1980, Т. 1, 61–66.
13. Fushchych W.I., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 2893–2899.
14. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.

15. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

16. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.