Несимметрийный подход к построению точных решений одного нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, И.В. РЕВЕНКО, Р.З. ЖДАНОВ

The exact solutions containing an arbitrary function are obtained for the nonlinear wave equation.

Группой симметрии двухмерного нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = \left[a^2(u)u_x\right]_x + b(u) \tag{1}$$

при произвольных функциях $a(u)$, $b(u)$ является двухпараметрическая группа сдвигов

$$t' = t + C_1, \quad x' = x + C_2, \quad u' = u, \tag{2}$$

C_1, C_2 — константы.

Расширение этой группы происходит при конкретизации функций $a(u)$ и $b(u)$. Этот вопрос детально изучен в [1]. Построению широких классов точных решений уравнения (1) с использованием его условной симметрии посвящена работа [2].

Ниже без использования в явном виде симметрииных свойств, уравнения (1) построены семейства его точных решений, содержащие произвольные функции. Для этого, следуя [3, 4], мы применяем классический метод промежуточного интеграла [5, 6].

Определение. *Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) первого порядка*

$$G(u_t, y_x, u, t, x) = 0 \tag{3}$$

называется промежуточным интегралом уравнения (1), если всякое решение (3) тождественно удовлетворяет соотношению (1).

Справедлива

Теорема 1. *Уравнение (1) допускает промежуточный интеграл только в таких случаях:*

$$\begin{aligned} &1) \quad a(u) = A_1^2(u), \quad b(u) = \lambda^2 \dot{A}_1(u) A_1^{-3}(u); \\ &2) \quad a(u) = A_2^2(u), \quad b(u) = -\mu \dot{A}_2(u) A_2^{-3}(u), \end{aligned} \tag{4}$$

причем функция G задается формулами

$$\begin{aligned} &1) \quad G = \varepsilon A_1^2(u) u_x - u_t + \lambda A_1^{-1}(u); \\ &2) \quad G = \varepsilon A_2^2(u) u_x - u_t + H(\alpha t + \beta x; \nu) A_2^{-1}(u). \end{aligned} \tag{5a}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 7, 15–19.

В приведенных формулах α, β, λ, μ — произвольные действительные параметры, $\varepsilon = \pm 1$; $A_1(u)$ — произвольная гладкая функция;

$$H(\omega;\mu) = \begin{cases} \mu^{1/2}\mathrm{tg}\,(\mu^{1/2}\omega + C_1), & \mu > 0; \\ -|\mu|^{1/2}\mathrm{th}\,(|\mu|^{1/2}\omega + C_1), & \mu < 0; \\ -(\omega + C_1)^{-1}, \end{cases} \tag{5б}$$

Функция $A_2(u)$ определяется одним из следующих неявных соотношений:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2(u) = (C_2 - \alpha u)^{-1}; \tag{6а}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2(u) = (C_2 - 3\varepsilon\beta u)^{-1}; \tag{6б}$$

$$\varepsilon\alpha\beta^{-1} = \tau^2 > 0, \quad A_2^{-2}\tau^{-2} + \tau^{-3}\mathrm{arctg}\,\frac{A_2}{\tau} = C_2 - \varepsilon\beta u;$$

$$\varepsilon\alpha\beta^{-1} = -\tau^2 < 0, \quad A_2^{-2}\tau^{-2} + \frac{\tau^{-3}}{2}\ln\left|\frac{A_2 - \tau}{A_2 + \tau}\right| = C_2 + \varepsilon\beta u; \tag{6в}$$

$$C_1, C_2 \subset R^1, \quad \dot{A}_i = \frac{dA_i}{du}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что в случае $\frac{\partial G}{\partial u_t} = 0$ соотношение (3) не является промежуточным интегралом уравнения (1). Поэтому, не умаляя общности, можно переписать ДУЧП (3) в эквивалентном виде

$$u_t = F(u_x, u, t, x). \tag{7}$$

Рассмотрим переопределенную систему ДУЧП, состоящую из уравнения (1) и дифференциальных следствий первого порядка из уравнения (7)

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \left[a^2(u)u_x\right]_x - b(u) = 0, \quad u_{tt} - F_{u_x}u_{tx} - F_uF_t = 0, \\ &u_{tx} - F_{u_x}u_{xx} - F_uu_x - F_x = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Согласно [2, 3], необходимым условием того, чтобы выражение (7) было промежуточным интегралом, является равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}. Вычисляя этот определитель, имеем $F_{ux}^2 = a^2(u)$, откуда $F = \varepsilon a(u)u_x + f(u,t,x)$, $\varepsilon = \pm 1$. Подстановка полученного результата в систему (8) приводит ее к виду

$$\begin{aligned} &u_{tt} - (a^2u_x)_x - b = 0, \\ &u_{tt} - \varepsilon a u_{tx} - (\varepsilon a u_x + f)(\varepsilon\dot{a}u_x + f_u) - f_t = 0, \\ &u_{tx} - \varepsilon a u_{xx} - u_x(\varepsilon\dot{a}u_x + f_u) - f_x = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\dot{a} = \frac{da}{du}$.

Умножая первое уравнение системы (9) на 1, второе — на -1, третье — на εa и складывая полученные выражения, имеем

$$-b + u_x(\varepsilon\dot{a}f + 2\varepsilon a f_u) + ff_u + f_t + \varepsilon a f_x = 0. \tag{10}$$

Наконец, расщепляя равенство (10) по степеням u_x, приходим к необходимым и достаточным условиям того, что (7) является промежуточным интегралом уравнения (1).

$$\dot{a}f + 2af_u = 0, \quad ff_u + f_t + \varepsilon a f_x - b = 0. \tag{11}$$

Анализ системы ДУЧП (11) показывает, что ее общее решение при $f_t = f_x = 0$ задается формулами

$$a(u) = A_1^2(u), \quad b(u) = \lambda^2 \dot{A}_1(u) A_1^{-3}(u), \quad f(u) = \lambda A_1^{-1}(u);$$

а при $f^t + f_x^2 \neq 0$ —

$$a(u) = A_2^2(u), \quad b(u) = -\mu \dot{A}_2(u) A_2^{-3}(u), \quad f(u,t,x) = H(\alpha t + \beta x; \mu) A_2^{-1}(u),$$

где $A_1(u)$ — произвольная гладкая функция, а функции $H(\omega;\mu)$, $A_2(u)$ определены в (5б), (6). Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы было установлено тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon a(u) \frac{\partial}{\partial x}\right) G = u_{tt} - [a^2(u) u_x]_x - b(u),$$

где функции $a(u)$, $b(u)$, G задаются формулами (4), (5). Следовательно, задача построения частных решений нелинейного уравнения (1) сводится к интегрированию одного из ДУЧП первого порядка

$$\begin{aligned} &1) \quad u_t - \varepsilon A_1^2(u) u_x - \lambda A_1^{-1}(u) = 0, \\ &2) \quad u_t - \varepsilon A_2^2(u) u_x - H(\alpha t + \beta x; \mu) A_2^{-1}(u) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Но всякое квазилинейное скалярное ДУЧП первого порядка инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы Ли [4]. Из этого вытекает, что уравнение (1) имеет подмножества решений, инвариантные относительно более широкой группы, чем все множество решений в целом. Иначе говоря, нелинейное ДУЧП (1) при указанных функциях $a(u)$, $b(u)$ обладает нетривиальной условной симметрией [2, 5].

Общее решение ДУЧП первого порядка вида (12) представляется в виде

$$\rho\omega_1 = \varphi(\omega_2), \tag{13}$$

где ρ — дискретный параметр, равный либо 0, либо 1; $\varphi \in C^2(R^1, R^2)$ — произвольная функция; $\omega_1(u,t,x)$, $\omega_2(u,t,x)$ — первые интегралы соответствующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа.

Для уравнения 1) из (12) система Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-\varepsilon A_1^2(u)} = \frac{du}{\lambda A_1^{-1}(u)}. \tag{14}$$

При $\lambda = 0$ одним из первых интегралов этой системы является функция $\omega_1 = u$. Еще один первый интеграл получается в результате интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения с раздельными переменными $dt = -\varepsilon A_1^{-2}(\omega_1) dx$, откуда $\omega_2 = t A_1^2(u) + \varepsilon x$. Подобным же образом интегрируются уравнения (14) при $\lambda \neq 0$

$$\omega_1 = \lambda_t - R(u), \quad \omega^2 = \varepsilon \lambda x + \int_0^{R(u)} A_1^2(\tilde{R}(\tau)) d\tau,$$

где $R(u) = \int_0^u A_1(\tau) d\tau$, $\tilde{R}(\tau)$ — функция, обратная к $R(\tau)$.

Подстановка полученных результатов в формулу (13) дает два класса точных решений нелинейного ДУЧП

$$u_{tt} = \left[A_1^4(u)u_x\right]_x + \lambda^2 \dot{A}_1(u)A_1^{-3}(u),$$
$$\rho u = \varphi(\varepsilon x + tA_1^2(u)), \quad \rho\left(\varepsilon\lambda x + \int_0^{R(u)} A_1^2(\tilde{R}(\tau))d\tau\right) = \varphi(\lambda t - R(u)), \tag{15}$$

где $\rho = 0, 1$; φ — произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция.

Интегрируя ДУЧП 2) из (12), получаем классы точных решений нелинейного ДУЧП

$$u_{tt} = \left[A_2^4 u_x\right]_x - \mu \dot{A}_2(u)A_2^{-3}(u).$$

1) $A_2(u)$ задается формулой (6а),
$\mu = 0$

$$\rho A_2(u) = (\beta x + C_1)\varphi(\beta\varepsilon t - A_2^{-2}(\beta x + C_1)),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \operatorname{ch}(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1)\varphi(2\varepsilon|\mu|^{1/2}\beta t + A_2^{-2}(u)\operatorname{sh} 2(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \cos(\mu^{1/2}\beta x + C_1)\varphi(2\varepsilon\mu^{1/2}\beta + A_2^{-2}(u)\sin 2(\mu^{1/2}\beta x + C_1);$$

2) $A_2(u)$ задается формулой (6б)
$\mu = 0$

$$\rho A_2 = (\alpha t + C_1)^{-1}\varphi(\alpha\varepsilon x - A_2^2(\alpha t + C_1)),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \operatorname{ch}^{-1}(\alpha|\mu|^{1/2}t + C_1)\varphi(2\varepsilon|\mu|^{1/2}\alpha x + A_2^2 \operatorname{sh} 2(|\mu|^{1/2}\alpha t x + C_1)),$$

$\mu > 0$

$$\rho A_2(u) = \cos^{-1}(\mu^{1/2}\alpha t + C_1)\varphi(2\varepsilon\mu^{1/2}\alpha x + A_2^2 \sin 2(\mu^{1/2}\alpha t x + C_1));$$

3) $A_2(u)$ задается одной из формул (6в)
$\mu = 0$

$$\rho(\alpha t + \beta x + C_1)A_2(u) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)\varphi(t - (\alpha t + \beta x + C_1)(\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1});$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u)\operatorname{ch}(|\mu|^{1/2}(\alpha t + \beta x) + C_1) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha) \times$$
$$\times \varphi([\varepsilon\beta A_2^2(u)\operatorname{sh} 2|\mu|^{1/2}\alpha t + \alpha \operatorname{sh} 2(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1)](\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1});$$

$\mu > 0$

$$\rho A_2(u)\cos(\mu^{1/2}(\alpha t + \beta x) + C_1) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha) \times$$
$$\times \varphi([\varepsilon\beta A_2^2(u)\sin 2\mu^{1/2}\alpha t + \alpha \sin 2(\mu^{1/2}\beta x + C_1)](\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1}).$$

В приведенных формулах $\varphi \in C^2(R^1, R^1)$ — произвольная функция; α, β, C_1 — произвольные действительные параметры, причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\rho = 0, 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Ввиду того, что построенные нами точные решении содержат произвольную функцию, они могут использоваться при анализе довольно широкого класса краевых задач для нелинейного ДУЧП (1). Например, решение задачи Коши

$$u_{tt} = \left[a^2(u)u_x\right]_x, \quad u(0,x) = U_0(x), \quad u_t(0,x) = U_1(x),$$

где $U_0(x)$, $U_1(x)$ — произвольные действительные функции, связанные соотношением $U_1(x) = \pm a(U_0(x))\dot{U}_0(x)$, задается неявной формулой $u = U_0(x \pm ta(u))$.

1. Ames W.F., Loher R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *J. Non-Linear Mechanics*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 4, 8–12.
3. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Forsyth A.R., Theory of differential equations, Cambridge, Univ. Press, 1906, Vol. 6, 596 p.
6. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, Наука, 1984, 270 с.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.