Редукция и решения нелинейного уравнения для векторного поля

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Substitutions reducing the non-linear system of equations for the vector potential

$$p_\nu p_\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu, x_\nu A_\nu)$$

to the ordinary differential equations are considered. The families of exact solutions of this system are constructed.

Рассматривается задача редукции многомерной нелинейной системы уравнений для вектора потенциала

$$p_\nu p_\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu) \tag{1}$$

к двумерным и одномерным системам. Здесь $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $A_\nu = A_\nu(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, F — произвольная дважды дифференцируемая функция. Операторы p_μ, имеют вид $p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$, где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В [1] найдены семейства точных решений уравнения (1)

$$A_\mu = a_\mu \varphi(bx), \quad A_\mu = b_\mu \varphi(ax), \tag{2}$$

где $a^2 = -b^2 = 1$, $ab = 0$ ($a^2 \equiv a_\mu a_\nu = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$).

Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$. В [2] построены анзацы и проведена редукция (1) по неэквивалентным трехмерным подалгебрам алгебры $AP(1,3)$. Однако в результате такой редукции получаются нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, неразрешимые в квадратурах и весьма сложные для исследования. Поэтому представляет интерес построение анзацев более общей структуры, чем (2), редуцирующих (1) к уравнениям для одной функции.

Будем рассматривать анзац

$$A_\mu = z_\mu \varphi(z, \omega), \tag{3}$$

где z и ω — некоторые функции от x, $z_\mu \equiv \frac{\partial z}{\partial x_\mu}$. Подставляя (3) в (1), получаем уравнение

$$\begin{gathered} z_\mu\{\varphi_{22}\omega_\nu\omega_\nu + \varphi_2\Box\omega + \varphi_{12}z_\nu\omega_\nu\} - \omega_\mu\varphi_2\Box z - z_\nu\omega_{\mu\nu}\varphi_2 + \\ + z_{\mu\nu}\omega_\nu\varphi_2 - z_\nu z_\nu\omega_\mu\varphi_{12} - \omega_\mu\omega_\nu z_\nu\varphi_{22} = z_\mu\varphi F(z_\nu z_\nu\varphi^2), \end{gathered} \tag{4}$$

где $\varphi_1 \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\varphi_2 \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$, ω и z должны быть независимы, $\varphi_2 \not\equiv 0$.

Доклады АН Украины, 1991, № 4, 23–25.

Выпишем условия на z и ω, при которых (4) приводится к паре уравнений в частных производных на функцию φ.

$$\begin{aligned}&\omega_\nu\omega_\nu = \tau_1(z,\omega), \quad \Box\omega = \tau_2(z,\omega), \quad z_\nu z_\nu = \tau_3(z,\omega),\\ &\Box z = \tau_4(z,\omega), \quad z_\nu\omega_\nu = \tau_5(z,\omega),\\ &z_{\mu\nu}\omega_\nu = \omega_\mu\tau_6(z,\omega) + z_\mu\tau_7(z,\omega), \quad z_\nu\omega_{\mu\nu} = \omega_\mu\tau_8(z,\omega) + z_\mu\tau_9(z,\omega).\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь τ_i — функции, удовлетворяющие условиям: $\frac{\partial}{\partial\omega}\tau_5 = \tau_6 + \tau_8$, $\frac{\partial}{\partial z}\tau_5 = \tau_7 + \tau_9$.

Отметим, что исследование совместности и решение систем типа (5) представляет собой сложную задачу. Проще задать, например, z и затем искать ω, удовлетворяющие системе (5). Рассмотрим в качестве примера анзац

$$A_\mu = x_\mu\varphi(x^2,\omega). \tag{6}$$

Если заменить $\varphi \to 2\varphi'$, то это анзац типа (3), $z = x^2$. Система (5) тогда имеет вид

$$\omega_\nu x_\nu = h(x^2,\omega), \quad \omega_\nu\omega_\nu = \tau_1(x^2,\omega), \omega_\nu x_\nu = \tau_2(x^2,\omega). \tag{7}$$

Анзацы вида (6) эквивалентны относительно замены $\omega \to \tilde{\omega}(x^2,\omega)$, что дает возможность привести (7) к виду

$$\omega_\nu\omega_\nu = \lambda \quad (\lambda = 0, \pm 1), \quad \Box\omega = \tau(x^2,\omega), \quad \omega_\nu x_\nu = h(x^2,\omega). \tag{8}$$

Если $\tau = \tau(\omega)$, то можно воспользоваться результатами работы [3], откуда $\tau = \frac{\lambda N}{\omega}$, $N = 0, 1, 2, 3$. В этом случае легко показать, что $h(\omega) \equiv \omega$.

Таким образом, ω определяется из уравнений

$$\omega_\nu\omega_\nu = \lambda \quad (\lambda = 0, \pm 1), \quad \Box\omega = \frac{\lambda N}{\omega} \quad (N = 0, 1, 2, 3), \quad \omega_\mu x_\mu = \omega. \tag{9}$$

Общее решение первых двух уравнений для $\lambda \neq 0$ приведено в [3]. Приведем несколько примеров решений системы (9).

$$\begin{aligned}&\omega = by + k(ay + dy), \quad \lambda = -1,\ N = 0;\\ &\omega = ((ay)^2 - (dy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = 1,\ N = 1;\\ &\omega = ((by)^2 + (cy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = -1,\ N = 1;\\ &\omega = ((ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2 - (dy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = 1,\ N = 3;\\ &\omega = ay + dy, \quad \lambda = 0,\ N = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $a^2 = -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1$, $ab = bc = cd = ac = ad = bd = 0$, $y_\nu = x_\nu + l_\nu$; $k, l_\nu = \mathrm{const}$.

Анзац (6), где w удовлетворяет системе (9), редуцирует уравнение (1) к паре уравнений для φ

$$\lambda\varphi_{22} + 2\omega\varphi_{12} + \frac{N}{\omega}\varphi_2 = \varphi F(x^2\varphi^2), \tag{11}$$

$$\omega\varphi_{22} + 2x^2\varphi_{12} + 3\varphi_2 = 0. \tag{12}$$

Требование совместности редуцированной системы накладывает условия и на функцию F. Анзацы вида (3) оказываются применимыми только для некоторых классов нелинейных уравнений.

Общее решение (12) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{x^2}\Phi\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right), \tag{13}$$

тогда из (11) получаем $\left(\Phi = \Phi(\tau),\ \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{d\tau}\right)$

$$(\lambda - \tau^2)\ddot{\Phi} + \frac{\lambda N - 3\tau^2}{\tau}\dot{\Phi} = x^2\Phi F\left(\frac{\Phi}{x^2}\right). \tag{14}$$

Уравнение (14) будет уравнением только на Φ, если $F(\theta) = B\theta$, $B = \mathrm{const}$. Тогда (14) приобретает вид

$$(\lambda - \tau^2)\ddot{\Phi} + \frac{1}{\tau}(\lambda N - 3\tau^2)\dot{\Phi} = B\Phi^3. \tag{15}$$

Если $\lambda = 0$, то заменой $\Phi = yR(y)$, $\tau = y^{1/2}$ (15) приводится к уравнению Эмдена–Фаулера

$$\ddot{R} + \frac{2}{y}\dot{R} + BR^3 = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение для векторного потенциала A_μ

$$p_\nu p_\nu A_\mu - \bar{p}_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu, x_\nu A_\nu). \tag{16}$$

Анзац (6), (13) приводит (16) к следующему уравнению для Φ:

$$(\lambda - \tau^2)\ddot{\Phi} + \frac{\lambda N - 3\tau^2}{\tau}\dot{\Phi} = x^2\Phi F\left(\frac{\Phi^2}{x^2}, \Phi\right). \tag{17}$$

Если $F(\theta_1, \theta_2) = \theta_1\psi(\theta_2)$, то (17) имеет вид

$$(\lambda - \tau^2)\ddot{\Phi} + \frac{1}{\tau}(\lambda N - 3\tau^2)\dot{\Phi} = \Phi^3\psi(\Phi). \tag{18}$$

Если $\psi = \frac{B}{\theta_2^2}$, $B = \mathrm{const}$, то (18) — линейное уравнение. Таким образом, при

$$F = \frac{BA_\mu A_\mu}{(x_\mu A_\mu)^2}, \tag{19}$$

посредством анзаца (6), (13) мы редуцируем нелинейное уравнение к линейному.

При $\lambda = 0$ получаем семейство точных решений системы (16), (19):

$$A_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}\left[C_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)^{\beta_1} + C_2\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)^{\beta_2}\right].$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, β_1, β_2 — корни уравнения $\beta(\beta+2) - B = 0$.

При $\lambda = 1$, $N = 0$

$$A_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}\frac{u\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)}{\sqrt{\omega^2 - x^2}}.$$

Функция $u = u(\tau)$ определяется в зависимости от знака $B+1$ (она является решением уравнения $(\tau^2-1)\ddot{u} + \tau\dot{u} - (B+1)u = 0$ [4])

1) $B+1 = \alpha^2 > 0$,

$$u = \begin{cases} C_1 \exp(\alpha \operatorname{arch}|\tau|) + C_2 \exp(-\alpha \operatorname{arch}|\tau|), & |\tau| > 1, \\ C_2 \cos(\alpha \arccos\tau) + C_2 \cos(\alpha \arcsin\tau), & |\tau| < 1; \end{cases}$$

2) $B+1 = -\alpha^2 < 0$,

$$u = \begin{cases} C_1 \cos(\alpha \operatorname{arch}|\tau|) + C_2 \sin(\alpha \operatorname{arch}|\tau|), & |\tau| > 1, \\ C_1 \exp(\alpha \arccos\tau) + C_2 \exp(-\alpha \arccos\tau), & |\tau| < 1; \end{cases}$$

3) $B = -1$,

$$u = C_1 \ln\left|\tau + \sqrt{|\tau^2 - 1|}\right| + C_2;$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные, ω определяются из уравнений (9) для соответствующих λ, N.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

2. Егорченко И.А., Симметрийные свойства нелинейных уравнений для комплексного векторного поля, Препринт № 89.48, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 39 с.

3. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт № 90.31, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 67 с.

4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.