Чи інваріантні рівняння Максвелла щодо перетворень Галілея?

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

It is shown that Maxwell equations for vacuum are invariant about the Galilei transformations $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t$, $t' = t$. The corresponding transformations of electromagnetic field turn out to be nonlocal ones unlike the Lorentz transformations. Analogous results are obtained for the Dirac and Klein–Gordon–Fock equations.

Показано, що рівняння Максвелла (РМ) для вакууму інваріантні щодо перетворень Галілея: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t$, $t' = t$. При цьому, однак, відповідні перетворення для полів $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{H}$ виявляються, на відміну від перетворень Лоренца, нелокальними. Аналогічний результат одержано для рівняння Дірака і рівняння Клейна–Гордона–Фока.

З часів Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна на сформульоване в заголовку питання існує негативна відповідь. За наш час добре відомо, що РМ

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1}$$

інваріантні щодо перетворень Лоренца і нсінваріантні щодо перетворень Галілея

$$x'_a = x_a + v_a t, \quad t' = t, \quad a = 1, 2, 3, \tag{2}$$

де v_a — довільні постійні (швидкість інерціальної системи відліку). Якщо ми неявно припускаємо, що поля $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$ при переході від однієї інерціальної системи до іншої перетворюються локальним чином, тобто перетворені поля $\boldsymbol{E}'$ та $\boldsymbol{H}'$ залежать тільки від $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{H}$, (і, звичайно, від параметрів v_a), але не залежать від похідних від $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$, то випливає негативна відповідь на обговорюване питання. Якщо припустити, що перетворення полів можуть бути нелокальними, то одержимо позитивну відповідь.

Теорема 1. *Рівняння Максвелла (1) інваріантні щодо перетворень Галілея (2) при умові, що електромагнітне поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ перетворюється згідно закону*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}) \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + O\left(v^2\right), \\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}) \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + O\left(v^2\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Доведення. Впевнимося в правильності теореми безпосередньою перевіркою. Із (2) випливає, що

$$\nabla' = \nabla, \quad \partial_{t'} = \partial_t - \boldsymbol{v} \cdot \nabla. \tag{4}$$

Підставляючи формули (3), (4) у “штриховані” рівняння системи (1) і нехтуючи членами квадратичними по v, знаходимо

$$\begin{aligned} &(\operatorname{div} \boldsymbol{E})' = \operatorname{div} \boldsymbol{E}' = \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \operatorname{div} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) - \operatorname{div} [(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}) \operatorname{rot} \boldsymbol{H}] = \\ &\quad = \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}$$

Доповіді АН УРСР, 1991, № 3, С. 22–26.

Тут використано тотожності

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\\
&\operatorname{div}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Далі

$$\begin{aligned}
&(\partial_t\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H})' = (\partial_t - \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}' - \operatorname{rot}\boldsymbol{H}' = \dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{H}} -\\
&\quad - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) - \operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]
\end{aligned}$$

(крапкою позначено диференціювання по t). Враховуючи тотожності

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) = -(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E},\\
&\operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E}
\end{aligned}\tag{6}$$

і використовуючи рівняння (1), отримуємо

$$\begin{aligned}
&(\dot{\boldsymbol{E}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H})' = \dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\times\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} +\\
&\quad + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E} =\\
&\quad = \dot{\boldsymbol{E}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times(\dot{\boldsymbol{H}} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}(\dot{\boldsymbol{H}} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0.
\end{aligned}$$

Цілком аналогічно доводиться інваріантність решти рівнянь системи (1) щодо перетворень (2), (3).

Теорема доведена.

Порівнюючи перетворення (2), (3) з інфінітезимальними перетвореннями Лоренца

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + O\left(v^2\right), \quad t' = t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + O\left(v^2\right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + O\left(v^2\right), \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + O\left(v^2\right), \tag{8}$$

одразу видно, що простота геометричних перетворень (2) тягне за собою складний (нелокальний) характер перетворень для полів (3). Для того щоб вияснити смисл одержаного результату, запишемо РМ (1) у еквівалентному вигляді [1]

$$\begin{aligned}
&i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad \mathcal{H} = i\hat{\sigma}_2(\boldsymbol{S}\cdot\nabla),\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}\tag{9}$$

де

$$\psi = \text{стовпчик}\,(E_1\ E_2\ E_3\ H_1\ H_2\ H_3), \quad \hat{\sigma}_2 = i\begin{pmatrix}\hat{0} & -I_3\\ I_3 & \hat{0}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

I_3, $\hat{0}$ — одинична та нульова матриці розмірності 3×3,

$$S_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Неважко впевнитися, що система (9) інваріантна щодо наступних алгебр Пуанкаре:

$$
\begin{gathered}
P^{\mathrm{I}}_{\mu} = P_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad (x_0 \equiv t), \\
J^{\mathrm{I}}_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + i\varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} S_c & \hat{0} \\ \hat{0} & S_c \end{pmatrix}, \quad J^{\mathrm{I}}_{0a} = x_0 P_a - x_a P_0 + \hat{\sigma}_2 S_a
\end{gathered} \tag{12}
$$

і

$$
\begin{gathered}
P^{\mathrm{II}}_{0} = -i\mathcal{H} = \hat{\sigma}_2 (\boldsymbol{S} \cdot \nabla), \quad P^{II}_{a} = P^{\mathrm{I}}_{a}, \quad J^{\mathrm{II}}_{ab} = J^{\mathrm{I}}_{ab}, \\
J^{\mathrm{II}}_{0a} = tP_a - \frac{i}{2}(\mathcal{H}x_a + x_a\mathcal{H}) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_2 S_a.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Оператори J^{I}_{0a} породжують добре відомі перетворення Лоренца. В той же час оператори J^{II}_{0a}, будучи неліївськими, очевидно, приводять до цілком інших перетворень. Щоб знайти ці перетворення можна скористатися формулами, запропонованими в [2–4], згідно з якими

$$
t' = \exp(t\boldsymbol{v} \cdot \nabla) t \exp(-\boldsymbol{v} \cdot \nabla) = t, \quad \boldsymbol{x}' = \exp(t\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{x} \exp(-\boldsymbol{v} \cdot \nabla) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \tag{14}
$$

$$
\psi'(x') = \exp\{t\boldsymbol{v} \cdot \nabla\} \exp\{-t\boldsymbol{v} \cdot \nabla + \hat{\sigma}_2(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla)\}\psi(x), \tag{15}
$$

де функція $\psi(x)$ визначена в (10).

Інфінітезимальні перетворення (3), як легко впевнитися, випливають з (15) в першому порядку по v. Кінцеві геометричні перетворення (14) збігаються з галілеївськими перетвореннями (2). Зауважимо, що зображення алгебри Пуанкаре, задані формулами (12), (13), взагалі кажучи, нееквівалентні, але на множині розв'язків рівнянь Максвелла (9) вони збігаються, оскільки

$$
J^{\mathrm{I}}_{0a}\psi = J^{\mathrm{II}}_{0a}\psi, \quad (J^{\mathrm{I}}_{0a})^2\psi = (J^{\mathrm{II}}_{0a})^2\psi, \quad \ldots, \tag{16}
$$

де ψ — довільний розв'язок РМ. Це говорить про те, що перетворення Лоренца і (14), (15) на розв'язках РМ еквівалентні. Інваріантність РМ щодо перетворень Галілея стала можливою за рахунок нелокальності перетворень електромагнітного поля. Ідею дуальності просторово-часової симетрії релятивістських рівнянь вперше розглянуто в роботах [5, 6].

Важливим застосуванням перетворень (14), (15) є можливість коректного впровадження наближеної галілеївської інваріантності (з єдиним абсолютним часом) РМ. Очевидно, що перетворення (2), (3) можна розглядати як наближені галілеївські перетворення РМ. Формула (15) дозволяє вирахувати явний вигляд перетворень Галілея для електромагнітного поля в будь-якому порядку по v. Наприклад, друге наближення має вигляд

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} - \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}v^2 t\right) \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\left[v^2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}) + \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v})^2 \Delta \boldsymbol{E}\right] + O\left(v^3\right), \\
\boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}v^2 t\right) \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left[v^2 \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H}) + \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} - 2\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v})^2 \Delta \boldsymbol{H}\right] + O\left(v^3\right),
\end{aligned} \tag{17}
$$

Перетворення Лоренца з точністю до v^2 задаються формулами

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) + O\left(v^3\right), \\
&t' = t + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}v^2 t + O\left(v^3\right), \\
&\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\left[v^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\right] + O\left(v^3\right), \\
&\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left[v^2\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})\right] + O\left(v^3\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Порівнюючи формули (2), (17) з (18), бачимо, що перетворення (17) відрізняються від лоренцівських перетворень для електромагнітного поля (18) лише членами, в які входять похідні від $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$. Геометричні перетворення $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'$, $t\to t'$ (18) суттєво відрізняються від перетворень Галілея (2) навіть в першому порядку по v. Час t у формулі (18) змінюється при переході рухомої системи відліку.

Сформулюємо аналогічний результат для рівняння Дірака та рівняння Клейна–Гордона–Фока.

Запишемо рівняння Дірака у вигляді

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad \mathcal{H} = -i\gamma_0\gamma_a\partial_a + \gamma_0 m, \tag{19}$$

де γ_μ — матриці Дірака 4×4, $\psi=\psi(x)$ — 4-х компонентна комплексна функція (стовпчик), m — довільна постійна. Рівняння (19) інваріантне щодо операторів [6]

$$J_{0a}^{\mathrm{II}} = t\partial_a - \frac{i}{2}(\mathcal{H}x_a + x_a\mathcal{H}), \tag{20}$$

що породжують перетворення [2–4]

$$\begin{aligned}
&t' = t, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \\
&\psi'(x') = \exp\{t\boldsymbol{v}\cdot\nabla\}\exp\left\{-t\boldsymbol{v}\cdot\nabla + \frac{i}{2}(\mathcal{H}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\mathcal{H})\right\}\psi(x) = \\
&\qquad = \exp\left\{\left(\frac{v}{2}\operatorname{cth}\frac{v}{2} - 1\right)t\boldsymbol{v}\cdot\nabla + \frac{i}{2}(\mathcal{H}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\mathcal{H} + v^2 t\mathcal{H})\right\}\psi,
\end{aligned} \tag{21}$$

де $v = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}$.

Розглянемо рівняння Клейна–Гордона–Фока

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{22}$$

і запишемо його в еквівалентному вигляді [6]

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathcal{H}\Phi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\left[\left(E^2 + \varkappa^2\right)\sigma_1 + \left(E^2 - \varkappa^2\right)i\sigma_2\right], \tag{23}$$

де $E = m^2 - \Delta$, $\Phi = \Phi(x)$ — 2-х компонентна функція

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \frac{i}{\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \Phi_2 = \varphi, \tag{24}$$

$\varkappa \neq 0$ — довільна постійна, σ_1, σ_2 — матриці Паулі 2×2. Рівняння (23) інваріантне щодо оператора вигляду (20), який призводить до перетворень (21).

Відзначимо, що на відміну від рівняння Дірака оператори (20) для рівняння (23) нелокальні навіть на множині його розв'язків, де вони мають вигляд

$$J_{0a} = i\partial_a + x_a\partial_t + \frac{i}{2\varkappa}(\sigma_1 + i\sigma_2)\partial_a.$$

Оператори (25) породжують перетворення Лоренца для t і $\boldsymbol{x}$, а функція Φ перетворюється як

$$\Phi'(x') = \frac{1}{2}\left[(\sigma_0+\sigma_3)\operatorname{ch}\theta + \sigma_0 - \sigma_3 - \frac{i}{\varkappa}(\sigma_1 + i\sigma_2)\operatorname{sh}\theta\frac{\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla}{\theta}\right]\Phi,$$

де σ_0 — одинична матриця 2×2, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ — довільні постійні, $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On nonlocal transformations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1985, **44**, № 1, 40–42.
3. Штелень В.М., Нелиевская симметрия й нелокальные преобразования, Препринт № 87.6, Киев, 1987, 28 с.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелиненных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Fushchych W.I., On additional invariance of Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–511.
6. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Клейна–Гордона–Фока, *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.