Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнении газовой динамики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.К. РЕПЕТА

The method for investigation of the non-Lie symmetry of gas dynamics is suggested. The non-Lie ansätzes are used to construct exact solutions of the equations. The local symmetry of nonlinear wave equation $u_{00} = F_3(x_1)(G(u)u_1)_1$ is studied.

1. Нелиевская (нелокальная) симметрия линейных уравнений математической физики изучена довольно подробно [1–3]. Термин "нелиевская симметрия", введенный в [2], означает симметрию уравнения, которая не может быть вычислена по классическому алгоритму С. Ли. Нелокальная симметрия нелинейных уравнений математической физики мало изучена. Это связано с тем, что только в редких случаях алгоритм С. Ли дает возможность эффективно вычислять высшие симметрии.

В настоящей работе предложен метод исследования нелиевской симметрии и построения нелиевских анзацев для уравнений газовой динамики.

В лагранжевых переменных одномерное адиабатическое движение газа описывается системой уравнений (см., напр., [4] и цитированную там литературу)

$$u^1_0 - u^2_1 = 0, \quad u^2_0 - u^3_1 = 0, \quad u^3_0 - F(u^1, u^3)u^2_1 = 0. \tag{1}$$

Здесь $u^i_j = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,1}$, $F(u^1, u^3) = \frac{\partial S/\partial u^1}{\partial S/\partial u^3}$, S — энтропия, $(u^1)^{-1} \equiv \rho$ — плотность, u^2 — скорость, $u^3 \equiv p$ — давление.

Локальная и квазилокальная симметрия (1) изучена в [4].

2. Для исследования системы (1) поступим следующим образом. Во-первых, с помощью нелокальной замены

$$u^1 = w_{11}, \quad u^2 = w_{01}, \quad u^3 = w_{00} \tag{2}$$

приведем систему (1) к одному скалярному уравнению третьего порядка

$$w_{000} - F(w_{11}, w_{00})w_{011} = 0. \tag{3}$$

Во-вторых, полученное уравнение (3) преобразуем при некоторых выборах функции F к нелинейному волновому уравнению второго порядка. В-третьих, используя локальную симметрию волнового уравнения, строим нелиевские анзацы для исходной системы (1). В дальнейшем будем следовать этому алгоритму.

Для конкретной реализации нашего алгоритма рассмотрим несколько случаев.

Случай I. Пусть в (3) $F = \dot{F}_1(w_{11})$ является производной от произвольной гладкой функции F_1 относительно w_{11}. Интегрируя уравнение (3) по переменной x_0, а затем дифференцируя дважды по переменной x_1, получаем

$$w_{0011} - [F_1(w_{11})]_{11} = 0. \tag{4}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 11, С. 27–33.

Полагая $v = w_{11}$, приходим к нелинейному волновому уравнению

$$v_{00} - (\dot{F}_1(v)v_1)_1 = 0. \tag{5}$$

Случай II. Пусть в (3) $F = F_2(w_{00})$ — произвольная гладкая функция w_{00}. Дифференцируя уравнение (3) по переменной x_0 и положив $v = w_{00}$, приходим к уравнению

$$v_{11} - \left(F_2^{-1}(v)v_0\right)_0 = 0. \tag{6}$$

Случай III. Пусть $F = r\frac{w_{00}}{w_{11}}$, r — произвольное действительное число. Интегрируя (3) по переменной x_0, а затем дифференцируя дважды по x_1 получаем уравнение четвертого порядка

$$w_{0011} - (F_3^r w_{11}^r)_{11} = 0, \tag{7}$$

Замена $vF_3^{-1} = w_{11}$ приводит (7) к уравнению второго порядка

$$v_{00} - F_3(x_1)(v^r)_{11} = 0. \tag{8}$$

Итак, если уравнения (5), (6), (8) обладают нетривиальной локальной симметрией, то эта симметрия будет, вообще говоря, нелокальной для исходной системы уравнений (1). Используя локальную симметрию уравнений (5), (6), (8), построим нелиевские анзацы для уравнений (1), которые редуцируют двумерную систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Лиевская и условная симметрия уравнения (5), (6), (8) изучена в [5–7].

3. Нелиевские анзацы для системы (1), полученные по указанной схеме, имеют следующий вид.

Случай I. Пусть $F = u^1$. Решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 + ax_0, \quad u^2 = a\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0), \\ &u^3 = a^2\varphi^1(\omega) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^2(x_0), \end{aligned} \tag{9}$$

a — произвольный действительный параметр;

$$\begin{aligned} &u^1 = \ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1}, \quad u^2 = \dot{\varphi}^1(\omega) - \omega\ddot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0), \\ &u^3 = 2\varphi^1(\omega) - 2\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \ddot{\varphi}^1(\omega)\omega^2 + x_1\dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_1^2\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{3}x_1^3\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ &u^3 = \frac{1}{12}x_1^4\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_1^{1/2}\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{2}{3}x_1^{3/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ &u^3 = \frac{4}{15}x_1^{5/2}\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_0x_1 + \varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \dot{\varphi}^1(x_0)x_1 + \varphi^2(x_0), \\ &u^3 = \frac{1}{2}x_1^2\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_1^2 x_0^{-2} + x_1^{1/2}\varphi^1(x_0), \quad u^2 = -\frac{2}{3}x_1^3 x_0^{-3} + \frac{2}{3}x_1^{3/2}\dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \frac{1}{2}x_1^4 x_0^{-4} + \frac{4}{15}\ddot\varphi^1(x_0) + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0);
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \dot\varphi^1(\omega) + 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2, \quad u^2 = 2x_0\dot\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0) + 8x_0x_1,\\
&u^3 = 4x_0^2\dot\varphi^1(\omega) + 2\varphi^1(\omega) + 4x_1^2 + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0);
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = 9\left(x_0\dot\varphi^1(\omega) + x_0^4\right), \quad \omega = x_1 + x_0^3,\\
&u^2 = 9\left(\varphi^1(\omega) + 3x_0^3\dot\varphi^1(\omega) + 4x_0^3x_1 + \varphi^2(x_0)\right),\\
&u^3 = 9\left(9x_0^5\dot\varphi^1(\omega) + 12x_0^2\varphi^1(\omega) + 6x_0^2x_1^2 + x_1\dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)\right);
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_0^2\dot\varphi^1(\omega) + \left(x_1x_0^{-1} + 6x_0^4\right), \quad \omega = x_0x_1 + x_0^6,\\
&u^2 = \varphi^1(\omega) + \dot\varphi^1(\omega)\left(x_0x_1 + 6x_0^6\right) - \frac{2}{3}x_1^3x_0^3 + 288x_1x_0^7 + 18x_1^2x_0^2 + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \dot\varphi^1(\omega)\left(x_1 + 6x_0^5\right)^2 + 30x_0^4\varphi^1(\omega) + \frac{1}{2}x_1^4x_0^{-4} +\\
&\qquad + 12x_1^3x_0 + 1008x_0^6x_1^2 + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Анзацы (9)–(17) редуцируют систему (1) к следующим системам ОДУ:

$$
\begin{cases}
a^3\dot\varphi^1 + \lambda_1\omega - \dot\varphi^1\varphi^1 a + \lambda_2 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \lambda_1,\\
\dot\varphi^3 - a\lambda_1x_0 = \lambda_2;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dddot\varphi^1(\ddot\varphi^1 + \omega^2) + \lambda_2\omega^{-1} + \lambda_1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \lambda_1x_0^{-2},\\
\dot\varphi^3 = \lambda_2x_0^{-1};
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot\varphi^1 = 6(\varphi^1)^2 + \lambda,\\
\ddot\varphi^2 = 0,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dddot\varphi^1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 - \dot\varphi^1\varphi^1 = 0,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dddot\varphi^1 = 2x_0,\\
\ddot\varphi^2 = x_0\dot\varphi^1 + \varphi^1,\\
\dot\varphi^3 = \dot\varphi^1\varphi^1;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
4x_0^3\,\dddot\varphi^1 - 15x_0\dot\varphi^1 + 30\varphi^1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \dot\varphi^1\varphi^1,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot\varphi^1(\ddot\varphi^1 - 2) + 16\omega + \lambda = 0,\\
\ddot\varphi^2 + 32x_0^2 = 0,\\
\dot\varphi^3 + 2\lambda x_0 = 0;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
3(\dot\varphi^1)^2 - 8\varphi^1 - 4\omega^2 = 0,\\
\ddot\varphi^2 - 60x_0^4 = 0,\\
\dot\varphi^3 - 84x_0^7 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(\dot\varphi^1)^2 - 60\varphi^1 - 1800\omega^2 - 2\lambda = 0,\\
\ddot\varphi^2 = 24552x_0^{10},\\
\dot\varphi^3 = 24768x_0^{15} + 4\lambda x_0^3.
\end{cases}
$$

Здесь и ниже λ, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

Случай II. Пусть $F = (u^1)^k$. Решение системы ищем с помощью анзацев

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_1^\alpha\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{\alpha+1}x_1^{\alpha+1}\dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}x_1^{\alpha+2}\ddot\varphi^1(x_0) + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Подставляя (18) в (1), получаем редуцированные системы ОДУ

$$\alpha = \frac{1}{k+1},\ k \neq -1: \quad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^k \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2}{k},\ k \neq -1;\ -2: \quad \begin{cases} k^2\, \dddot{\varphi}^1 - 2(k+1)(k+2)(\varphi^1)^k \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0. \end{cases}$$

Для конкретных значений степени k укажем еще некоторые анзацы и соответствующие им редуцированные системы ОДУ

$k = 2$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_0^{-1} x_1 + \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -\frac{1}{2} x_1^2 x_0^{-2} + \dot{\varphi}^1(x_0) x_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= \frac{1}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}^1(x_0) x_1^2 + \\ &\quad + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} x_0^3\, \dddot{\varphi}^1 - 2x_0 \dot{\varphi}^1 + 4\varphi^1 = 0, \\ x_0^2 \ddot{\varphi}^2 - 2x_0 \dot{\varphi}^1 \varphi^1 + (\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^2 \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -2$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= -\ln x_1 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^{-1} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= -\ln x_1 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-3/2} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -1$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= \ln x_1 \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= x_1(\ln x_1 - 1) \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-2} \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0. \end{cases}$$

Случай III. Пусть $F = (u^3)^{-1}$. Анзацы получаются из (9)–(17) круговой заменой: $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_0$, $u^1 \to u^3$, $u^3 \to u^1$. Соответствующие системы редуцированных уравнений имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 \varphi^1 - a^2 \dot{\varphi}^1 - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = \lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - \omega^2) - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 x_1 = \lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\varphi}^1 - 6(\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = x_1^2, \\ \dot{\varphi}^2 = x_1 \varphi^1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 \ddot{\varphi}^1 - 15\varphi^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - 2) - 8\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 8x_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\dot{\varphi}^1 \ddot{\varphi}^1 - 4\dot{\varphi}^1 - 4\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 12x_1^5 - 3\lambda x_1^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot\varphi^1\ddot\varphi^1-30\dot\varphi^1-1800\omega+\lambda=0,\\ \dot\varphi^2=-1368x_1^{11}-\lambda x_1^5.\end{cases}$$

Все приведенные анзацы можно представить в общем виде

$$\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{\varphi}+b\dot{\boldsymbol{\varphi}}+C\ddot{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{D},$$

где $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,u^3)^T$, $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)^T$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ — соответственно первая и вторая производные от $\boldsymbol{\varphi}$ по своему аргументу, A, B, C, D — некоторые переменные матрицы размерности 3×3.

4. Большинство из полученных редуцированных ОДУ можно проинтегрировать в явном виде. Приведем некоторые точные решения, системы (1).

Случай I. $F=u^1$

$$\begin{aligned}
&u^1=x_1^2x_0^{-2},\\
&u^2=-\frac{2}{3}x_1^2x_0^{-3}+\lambda x_0+\lambda_1,\\
&u^3=\frac{1}{12}x_1^4x_0^{-4}+\lambda x_1+\lambda_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u^1=x_1^{1/2}(\lambda_1x_0^2+\lambda_2x_0+\lambda_3),\\
&u^3=\frac{2}{3}x_1^{3/2}(2\lambda_1x_0+\lambda_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{5}x_0^5+\frac{1}{3}(\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_3)x_0^3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2x_0^4+\lambda_2\lambda_3x_0^2+(\lambda_3^2+\lambda_5)x_0+\lambda_6\right),\\
&u^3=\frac{8}{15}x_1^{5/2}\lambda_1+\frac{x_1}{2}(\lambda_1^2x_0^4+x_0^2(\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_3)+\lambda_1\lambda_2x_0^3+\\
&\qquad+2\lambda_2\lambda_3x_0+\lambda_3^2+\lambda_5+\lambda_4).
\end{aligned}$$

Случай II. $F=(u^1)^2$

$$\begin{aligned}
&u^1=x_1x_0^{-1}+\lambda_1x_0^2+\lambda_2x_0^2\ln x_0,\\
&u^2=-\frac{1}{2}x_1^2x_0^{-2}+x_1(2\lambda_1x_0+\lambda_2x_0(2\ln x_0+1))+\\
&\qquad+\lambda_3x_0+\lambda+\frac{1}{4}x_0^4\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\left(\ln x_0-\frac{1}{4}\right)\right)^2+\frac{\lambda_2^2}{16}\right),\\
&u^3=\frac{1}{3}x_1^3x_0^{-3}+\frac{1}{2}x_1^2(2\lambda_1+\lambda_2(2\ln x_0+3))+\\
&\qquad+x_0^6(\lambda_1+\lambda_2\ln x_0)^3+x_1(x_0^3(\lambda_1+\lambda_2\ln x_0)^2+\lambda_5).
\end{aligned}$$

Случай III. $F=(u^3)^{-1}$

$$\begin{aligned}
&u^1=\frac{1}{2}x_0^4x_1^{-4}+\lambda_1x_1^{1/2}+\lambda_2x_1^{-7/2}+\frac{x_0}{2}(\lambda_1^2x_1^5+2\lambda_1\lambda_2x_1+\lambda_2^2x_1^{-3})+\varphi^3(x_1),\\
&u^2=-\frac{2}{3}x_0^3x_1^{-3}+\frac{1}{3}x_0^{3/2}\left(5\lambda_1x_1^{3/2}-3\lambda_2x_1^{-5/2}\right)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{6}x_1^6-\frac{1}{2}\lambda_2^2x_1^{-2}+\lambda_1\lambda_2x_1^2\right)+\lambda_3,\\
&u^3=x_0^2x_1^{-2}+x_0^{1/2}\left(\lambda_1x_1^{5/2}+\lambda_2x_1^{-3/2}\right);
\end{aligned}$$

$$u^1 = \frac{1}{2}x_0^2 x_1^2 + x_0\left(\frac{x_1^5}{12} + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1\right) + \varphi^3(x_1),$$
$$u^2 = \frac{1}{2}x_0^2 + x_0\left(\frac{1}{3}x_1^3 + \lambda_1\right) + \frac{1}{72}x_1^6 + \frac{1}{3}\lambda_1 x_1^3 + \frac{1}{2}\lambda_2 x_1^2 + \lambda_3,$$
$$u^3 = x_0 x_1 + \frac{1}{12}x_1^4 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2.$$

5. Изучим групповые свойства нелинейного волнового уравнения

$$u_{00} - F_3(x_1)(G(u)u_1)_1 = 0 \tag{19}$$

для $F_3 \neq \mathrm{const}$, $G \neq \mathrm{const}$. Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. *Ядро основных групп уравнения (19) соответствует одномерной алгебре инфинитезимальных операторов с базисом* $X_1 = \partial_0$.

Теорема 2. *Уравнение (19) допускает расширение ядра основных групп только при таких специализациях функций* F_3 *и* G:

1) G — *произвольная*

а) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1,\quad X_2 = (2-n)x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1,\quad X_3 = nx_0\partial_0 - 2\partial_1;$

2) $G = e^{\lambda u}$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1,\quad X_4 = \lambda x_0\partial_0 + 2x_1\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1,\quad X_3,\quad X_4;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_4;$

г) $F_3 = x_1^3$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_4,\quad X_5 = \lambda x_1^2\partial_1 + x_1\partial_u;$

3) $G = u^k$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1,\quad X_6 = nx_0\partial_0 - 2u\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1,\quad X_3,\quad X_6;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_6;$

г) $F_3 = x_1^{\frac{3k+4}{k+1}}$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_6,\quad X_7 = (k+1)x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u;$

4) $G = u^{-4}$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1,\quad X_6,\quad X_8 = x_0^2\partial_0 + x_0 u\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1,\quad X_3,\quad X_6,\quad X_8;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_6,\quad X_8;$

г) $F_3 = x_1^{8/3}$ $\quad X_1,\quad X_2,\quad X_6,\quad X_7,\quad X_8;$

5) $G = u^{-1}$, $F_3 = e^{nx_1}$

$$X_1,\quad X_3,\quad X_9 = x_0\partial_0 + 2u\partial_u,\quad X_{10} = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + nx_1 u\partial_u.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны с помощью метода Ли [8].

Полученные результаты могут быть использованы для построения точных решений системы уравнений (1).

1. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистского уравнения движения, *Теорет. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
2. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
4. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Основные типы инвариантных уравнений одномерной газовой динамики, Препринт N 49, ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, М., 1988, 26 с.
5. Ames W.F., Lohner R.I., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, in Non-linear phenomena in mathematical sciences, Editor V. Lakshmikanthan, N.Y., Academic Press, 1982, 1–6.
6. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 5, 29–34.
7. Фущич В.И., Репета В.К., Точные решения некоторых уравнений газовой динамики и нелинейной акустики, *Докл. АН УССР*, 1991, № 8, 35–42.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.