Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.К. РЕПЕТА

Conditional invariance is studied and the classes of exact solutions of nonlinear wave equation $u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0$ are constructed. The results are generalized for n-dimensional case.

Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства уравнения (1) методом С. Ли детально исследованы в [1]. Ниже исследуется условная инвариантность уравнения (1). Операторы условной симметрии [2–4] использованы для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Это позволило найти некоторые семейства точных решений уравнения (1).

Теорема. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{2}$$

если функции $A(x,u)$, $B(x,u)$, $C(x,u)$ и $F(u)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

Случай 1. $A \neq 0$, $D \equiv F - B^2$. Не умаляя общности можно положить $A = 1$.

$$\begin{aligned}
&(B_u D^{-1})_u = 0,\\
&F(C_1 D^{-1})_1 - (C_0 D^{-1})_0 - C^2 (C_u D^{-1})_u - C(C_0 D^{-1})_u - C(C_u D^{-1})_0 + \\
&\quad + D^{-2}\{2F(B_0 C_1 - B_1 C_0 + C[B_u C_1 - B_1 C_u]) - BCC_1 F\} = 0,\\
&D^2 C_{uu} + D\{(C\dot F)_u + 2B(B_u C_u - B_{uu} C) - 2FB_{1u} - 2BB_{0u}\} - \\
&\quad - CD_u^2 + 2BB_0 D_u + 2BB_1(B\dot F - 2B_u F) = 0,\\
&D\{B_{00} + 2(B_0 C)_u + 2(BC_{0u} - B_u C_0) + 2(C_1 F)_u - B_{11} F + \\
&\quad + B_{uu} C^2 + 2BCC_{uu}\} - D_u\{B_0 C + B_u C^2 + 2BCC_u\} + \\
&\quad + B\{B_1 C\dot F + 2B_0 B_u C + 4BB_0 C_u + 4B_1 C_u F - 2B_1^2 F\} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Случай 2. $A = 1$, $B = F^{1/2}$

$$\text{а)}\quad \dot B C + 2BC_u = 0, \quad C_0 + CC_u - BC_1 = 0; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\text{б)}\quad & BC + 2BC_u \neq 0, \quad C_0 + CC_u - BC_1 = 0,\\
&[\ddot B C^2 + 2\dot B(BC_1 + CC_u) + 2B(C_{0u} + CC_{uu} + BC_{1u})] \times \\
&\quad \times (C_0 + CC_u - BC_1) = \\
&\quad = [C_{00} + C^2 C_{uu} - B^2 C_{11} + 2CC_{0u} - 2BCC_1](\dot B C + 2BC_u).
\end{aligned} \tag{5}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 5, С. 29–34.

Случай 3. $A = 0$, $B = 1$

$$C_{uu} = 0, \quad C_{0u} = 0,$$
$$C_{00} - C^3\ddot{F} - (3CC_1 + 2C^2C_u)\dot{F} - (C_{11} + 2CC_{1u})F = 0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на использовании критерия Q-условной инвариантности дифференциальных уравнений, описаного в [2–4]. Ввиду громоздкости выкладок доказательство теоремы не приводим.

Общее решение системы (3)–(6), за исключением случая (4), нам найти не удалось. При конкретных значениях функции $F(u)$ построены частные решения этих систем, которым соответствуют операторы Q. В табл. 1 приведены явные виды операторов Q, анзацы, редуцированные уравнения.

В табл. 1 и ниже введены следующие обозначения $P_2(z) = a_1z^2 + a_2z + a_3$ — произвольный многочлен второй степени; $h(z)$ — решение уравнения $h'' = \lambda_1 h^{k+1}$; $W(z)$ — функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $W'' = 6W^2$; $\Lambda(z)$ — функция Ламе, удовлетворяющая уравнению $\Lambda = W\Lambda$; $\gamma(z)$ — эллиптическая функция, удовлетворяющая уравнению $\gamma'' = 2\gamma^3$; $\beta(u)$ — решение уравнения Риккати $\beta' + \lambda_3\beta^2 = \lambda_3 F$; $H^4(u)$ — функция которая определяется из условия

а) $\quad H^{-1} + \sqrt{\lambda}\,\operatorname{arcth}\sqrt{\lambda}H = a_0u + a_2, \quad \lambda = \dfrac{a_1}{a_0} > 0;$

б) $\quad H^{-1} + \sqrt{-\lambda}\,\operatorname{arctg}\sqrt{-\lambda}H = a_0u + a_2, \quad \lambda < 0;$

$\omega_1 = (a_0x_0 + a_1x_1)\exp\left\{-\int H(u)(a_0 + a_1H^2(u))du\right\}$; φ — новая неизвестная функция; λ_i, a_i, k — произвольные постоянные, $\lambda_3 \neq 0$, $k \neq -1$, $i = \overline{0,3}$.

Интегрируя редуцированные уравнения и подставляя найденную функцию φ в соответствующий анзац, получим решение уравнения (1), которые приведены в табл. 2.

Здесь $\psi(z) = \frac{\sigma(z\pm\alpha)}{\sigma(z)}\exp\{\mp z\zeta(\alpha)\}$, где α определяется из условия $W(\alpha) = 0$; σ, ζ — функция Вейерштрасса.

Замечание. Найденные решения можно размножить используя операторы лиевской инвариантности уравнения (1). Формулы размножения решений в зависимости от вида функции $F(u)$ будут следующее:

а) $F(u)$ — произвольная гладкая функция
$$u = f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_1x_1 + a_1);$$
б) $F(u) = e^u$
$$u = f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_2(\theta_1x_1 + a_1)) - 2\ln\theta_2;$$
в) $F(u) = u^k$
$$u = \theta_2^{-k}f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_2^k(\theta_1x_1 + a_1));$$
г) $F(u) = u^{-4/3}$
$$u = (1 - ax_1)^{-3}\theta_2^{-2}f\left(\theta_1x_0 + a_0, \frac{\theta_1x_1 + a_1}{\theta_2^{4/3} - a(\theta_1x_1 + a_1)}\right); \tag{7}$$
д) $F(u) = u^{-4}$
$$u = (1 - ax_0)^{-1}\theta_2^{-2}f\left(\frac{\theta_1x_0 + a_0}{\theta_2^4 - a(\theta_1x_0 + a_0)}, \theta_1x_1 + a_1\right),$$

Таблица 1

$F(u)$	Оператор	Анзац	Редуцированные уравнения
$F(u) \in C^1(R)$	$\partial_0 + (F(u))^{1/2}\partial_1$	$(F(u))^{1/2}x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$	$0 = 0$
	$\partial_0 + \beta(u)\partial_1$	$\beta(u)x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$	$\dot\varphi = a_1(F - \beta^2)$
	$\partial_0 + (F(u))^{1/2}\partial_1 + \lambda_1[(F(u))^{1/2} + \lambda_2]^{-1}\partial_u$	$\lambda_1 x_0 - \int((F(u))^{1/2} + \lambda_2)du -$ $- \varphi\left(\lambda_1 x_1 - \int(F(u) + \lambda_2(F(u))^{1/2})du\right) = 0$	$\dot\varphi = \lambda_2^{-1}$
e^u	$x_1\partial_1 + \partial_u$	$u = \ln x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot\varphi = 0$
	$\partial_0 + 2\,\mathrm{tg}\,x_0\partial_u$	$e^u = \varphi(x_1)\cos^{-2}x_0$	$\ddot\varphi = 2$
	$\partial_0 - 2\,\mathrm{cth}\,x_0\partial_u$	$e^u = \varphi(x_1)\,\mathrm{sh}^{-2}x_0$	$\ddot\varphi = 2$
	$P_2(x_1)\partial_1 + P_2'(x_1)\partial_u$	$e^u = e^{\varphi(x_0)}P_2(x_1)$	$\ddot\varphi = P_2'' e^{\varphi}$
	$\partial_0 + e^{u/2}\partial_1 + \mathrm{tg}\,\frac{x_0}{4}\partial_u$	$\sin\frac{x_0}{2}e^{u/2} - \frac{x_1}{2} = \varphi\left(\cos^2\frac{x_0}{4}e^{u/2}\right)$	$\dot\varphi = 0$
	$\partial_0 + e^{u/2}\partial_1 - \mathrm{cth}\,\frac{x_0}{4}\partial_u$	$e^{u/2}\mathrm{sh}\,\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2} = \varphi\left(e^{u/2}\mathrm{sh}^2\frac{x_0}{4}\right)$	$\dot\varphi = 0$
u^k	$\partial_0 + e^{u/2}\partial_1 - 4x_0^{-1}\partial_u$	$x_0 e^{u/2} + x_1 + \varphi\left(x_0^2 e^{u/2}\right) = 0$	$\dot\varphi = 0$
	$(k+1)x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u^{k+1} = x_1\varphi^{k+1}(x_0)$	$\ddot\varphi = 0$
	$h(x_0)\partial_0 + h'(x_0)u\partial_u$	$u^{k+1} = h^{k+1}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot\varphi = \lambda_1\varphi^{1/(k+1)}$
	$\partial_0 + u^{k/2}\partial_1 - 4u(kx_0)^{-1}\partial_u$	$x_1 + u^{k/2}x_0 + \varphi(x_0^4 u^k) = 0$	$\dot\varphi = 0$
u	$\partial_1 + x_0\partial_u$	$u = x_0 x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot\varphi = x_0^2$
	$\partial_1 + [2W(x_0)x_1 + \Lambda(x_0)]\partial_u$	$u = x_1^2 W(x_0) + \Lambda(x_0)x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot\varphi - 2W\varphi - \Lambda^2 = 0$
	$2x_1\partial_1 + [u + 3W(x_0)x_1^2]\partial_u$	$u = x_1^2 W(x_0) + x_1^{1/2}\varphi(x_0)$	$4\ddot\varphi - 15W\varphi = 0$
	$x_0^2\partial_1 + [2x_1 + a_1 x_0^5]\partial_u$	$u = x_0^{-2}x_1^2 + a_1 x_0^3 x_1 + \varphi(x_0)$	$x_0^2\ddot\varphi - 2\varphi = a_1^2 x_0^8$
	$W(x_0)\partial_0 + W'(x_0)u\partial_u$	$u = W(x_0)\varphi^{1/2}(x_1)$	$\ddot\varphi = 12\varphi^{1/2}$
	$2x_0^2 x_1\partial_1 + [ux_0^2 + 3x_1^2]\partial_u$	$u = x_0^{-2}x_1^2 + x_1^{1/2}\varphi(x_0)$	$4x_0^2\ddot\varphi - 15\varphi = 0$
$u^{-1/2}$	$\partial_0 + x_1 u^{1/2}\partial_u$	$2u^{1/2} = x_0 x_1 + \varphi(x_1)$	$2\ddot\varphi = x_1^2$
	$W(x_1)\partial_1 + 2W'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/2} = W(x_1)\varphi^{1/2}(x_0)$	$\ddot\varphi = 12\varphi^{1/2}$
	$\partial_0 + 4W(x_1)x_0 u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2} = x_0^2 W(x_1) + \varphi(x_1)$	$\ddot\varphi - 2W\varphi = 0$
	$x_1^2\partial_0 + [4x_0 + a_1 x_1^5]u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2} = x_0^2 x_1^{-2} + \frac{a_1}{2}x_0 x_1^3 + \varphi(x_1)$	$4x_1^2\ddot\varphi - 8\varphi = a_1^2 x_1$

Продолжение табл. 1

$F(u)$	Оператор	Анзац	Редуцированные уравнения
$u^{-2/3}$	$x_0x_1^2\partial_0+[u^{1/2}x_1^2+3x_0^2]u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2}x_1^2=x_0^{1/2}(x_0^{3/2}+\varphi(x_1))$	$4x_1^2\ddot{\varphi}-15\varphi=0$
	$x_1\partial_0+3u^{2/3}\partial_u$	$u^{1/3}=x_0x_1^{-1}+\varphi(x_1)$	$x_1^2\ddot{\varphi}-2\varphi=0$
	$\partial_0+\gamma(x_1)u^{2/3}\partial_u$	$u^{1/3}=x_0\gamma(x_1)+\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi}-2\gamma^2\varphi=0$
	$\gamma(x_1)\partial_1-3\gamma'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/3}=\gamma^{-1}(x_1)\varphi^{1/3}(x_0)$	$\ddot{\varphi}=a\varphi^{1/3}$
u^{-1}	$\partial_1+u\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\partial_u$	$u=\varphi(x_0)\cos^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\ddot{\varphi}=\frac{1}{2}$
	$\partial_1-u\operatorname{cth}\frac{x_1}{2}\partial_u$	$u=\varphi(x_0)\operatorname{sh}^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\ddot{\varphi}=-\frac{1}{2}$
	$P_2(x_0)\partial_0+P_2'(x_0)u\partial_u$	$u=P_2(x_0)e^{\varphi(x_1)}$	$\ddot{\varphi}=2a_1e^{\varphi}$
u^2	$x_0\partial_1+\partial_u$	$u=x_0^{-1}x_1+\varphi(x_0)$	$x_0^2\ddot{\varphi}-2\varphi=0$
	$\partial_1+\gamma(x_0)\partial_u$	$u=\gamma(x_0)x_1+\varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi}-2\gamma^2\varphi=0$
	$\partial_0+u\partial_1+x_0\partial_u$	$ux_0-x_1-\frac{x_0^3}{3}=\varphi(2u-x_0^2)$	$\dot{\varphi}=0$
$e^u+\lambda^2$	$(x_1\pm\lambda x_0)\partial_1+\partial_u$	$e^u=(x_1\pm\lambda x_0)e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot{\varphi}=0$
	$(x_1\pm\lambda x_0)\partial_1+2\partial_u$	$e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot{\varphi}=2e^{\varphi}$
$u^{-4/5}$	$2W(x_1)\partial_1-5W'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/5}=\varphi^{1/5}(x_0)W^{-1/2}(x_1)$	$\ddot{\varphi}=a_1\varphi^{1/5}$
u^4	$-2W(x_0)\partial_0+W'(x_0)u\partial_u$	$u^5=W^{-5/2}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi}=a_1\varphi^{1/5}$
$u^{-4/3}$	$\partial_0+u^{-2/3}\partial_1-3x_1^{-1}u^{1/3}\partial_u$	$x_0+x_1u^{2/3}+\varphi(x_1u^{1/3})=0$	$0=0$
u^{-4}	$\partial_0+u^{-2}\partial_1+x_0^{-1}u\partial_u$	$x_0+x_1u^2+\varphi(ux_0^{-1})u^2=0$	$0=0$
$H^4(u)$	$(a_0x_0+a_1x_1)[H(u)\partial_0+H^3(u)\partial_1]+\partial_u$	$x_0-\omega_1\int H(u)\exp\left\{\int H(u)(a_0+a_1H^2(u))du\right\}du=\varphi(\omega_1)$	$0=0$

Таблица 2

$F(u)$	Решение уравнения
$F(u)\in C^1(R)$	$\int F(u)du-\lambda_2^2u+\lambda_1(\lambda_2x_0-x_1)=0$, $\beta(u)=x_0^{-1}x_1$, $F^{1/2}(u)x_0-x_1+\varphi(u)=0$
e^u	$e^u=e^{x_0}x_1$, $e^u=(x_1^2+a_1)\cos^{-2}x_0$, $e^u=(x_1^2+a_1)\,\mathrm{sh}^{-2}x_0$
u^k	$u^{k+1}=x_0^{k+1}x_1$
u	$u=x_0x_1+\frac{x_0^4}{12}+a_1$, $u=W(x_0)x_1^2$, $u=x_0^{-2}x_1^2+x_1^{1/2}(a_1x_0^{5/2}+a_2x_0^{-3/2})$,
	$u=x_0^{-2}x_1^2+3a_1x_1x_0^3+\frac{a_1^2}{6}x_0^8+a_2x_0^{-1}+a_3x_0^2$, $u=W(x_0)x_1^2+\psi(x_0)$
$u^{-1/2}$	$u^{1/2}=W(x_1)x_0^2$, $2u^{1/2}=x_0x_1+\frac{x_1^4}{24}+a_1$, $u^{1/2}=W(x_1)x_0^2+\psi(x_1)$,
	$u^{1/2}=x_0^{1/2}x_1^{-2}(x_0^{3/2}+a_1x_1^{5/2}+a_2x_1^{-3/2})$,
	$u^{1/2}=x_0^2x_1^{-2}+3a_1x_0x_1^3+\frac{a_1^2}{6}x_1^8+a_2x_1^{-1}+a_3x_1^2$
$u^{-2/3}$	$u^{1/3}=x_0x_1^{-1}+x_1^2$, $u^{1/3}=x_0\gamma(x_1)$
u^{-1}	$u=(x_0^2+a_1)\cos^{-2}x_1$, $u=e^{x_1}x_0$, $u=(-x_0^2+a_1)\,\mathrm{sh}^{-2}x_1$
u^2	$u=x_0^{-1}x_1+x_0^2$, $u=\gamma(x_0)x_1$, $u=x_1^{1/3}$
$e^u+\lambda^2$	$e^u=e^{x_0}(x_1\pm\lambda x_0)$, $2e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2\cos^{-2}x_0$, $2e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2\mathrm{sh}^{-2}x_0$
$u^{-4/5}$	$u=[W(x_1)]^{-5/2}x_0$
u^4	$u^5=[W(x_0)]^{-5/2}x_1$
$u^{-4/3}$	$x_0+x_1u^{2/3}+\varphi(x_1u^{1/3})=0$
u^{-4}	$x_0+x_1u^2+\varphi(x_0^{-1}u)u^2=0$
$H^4(u)$	$x_0-\omega_1\int H(u)\exp\left\{\int H(u)(a_0+a_1H^2(u))du\right\}du=\varphi(\omega_1)$

где a, a_0, a_1, θ_1, θ_1 — произвольные групповые параметры, $\theta_1\neq 0$, $\theta_2\neq 0$, $f(x_0,x_1)$ — известное решение уравнения (1).

Результаты, приведенные выше, обобщены на случай произвольного количества независимых переменных $x=(x_0,\boldsymbol{x})\in R_{1,n}$ в уравнении (1), т.е. для уравнения

$$u_{00}-\nabla[F(u)\nabla u]=0. \tag{8}$$

Операторы вида

$$Q=\partial_1+C(x_0,x_1,u)\partial_u,\quad Q=\partial_0+(F(u))^{1/2}\partial_1+C(x_0,x_1,u)\partial_u \tag{9}$$

приведенные в табл. 1, обобщаются следующим образом:

$$Q_a=\partial_a+\alpha_aC(x_0,\boldsymbol{\alpha x},u)\partial_u,\quad Q_a=\alpha_a[\partial_0+C(x_0,\boldsymbol{\alpha x},u)\partial_u]+(F(u))^{1/2}\partial_a,$$

где $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ — произвольный постоянный единичный вектор; $a=\overline{1,n}$. В анзацах, соответствующих операторам (9), нужно заменить x_1 на $\boldsymbol{\alpha x}$. Редуцированные уравнения при этом не изменяются.

Анзацы, полученные при помощи операторов $Q=\partial_0+C(x_0,x_1,u)\partial_u$ для многомерного уравнения (8) имеют вид

$$\int F(u)du=f(x_0)\varphi(\boldsymbol{x})+g(x_0,\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

где $f(x_0)$ и $g(x_0,\boldsymbol{x})$ — заданные функции, $\varphi(\boldsymbol{x})$ — новая неизвестная функция. Подставляя (10) в (8), имеем

$$\Delta\varphi=\frac{1}{f}\left[-\Delta g+F^{-1}(\ddot f\varphi+g_{00})-\dot FF^{-3}(\dot f\varphi+g_0)^2\right]. \tag{11}$$

Если правая часть уравнения (11) является функцией только от φ и $\boldsymbol{x}$, то уравнение принимает вид

$$\Delta\varphi = G(\boldsymbol{x}, \varphi) \tag{12}$$

и становится редуцированным для уравнения (8). В частности, при

а) $F(u) = u^k$, $k \neq -1$, $f(x_0) = h^{k+1}(x_0)$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = 0$, редуцированное уравнение будет нелинейным уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi^{1/(k+1)}; \tag{13}$$

б) $F(u) = u^{-1}$, $f(x_0) = 1$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = \ln v(x_0)$, $v(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{v} = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$. В этом случае (12) — уравнение Лиувилля

$$\Delta\varphi = \lambda \exp\varphi; \tag{14}$$

в) $F(u) = \exp u$, $f(x_0) = \exp w(x_0)$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = 0$, $w(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{w} = \lambda \exp w$, редуцированное уравнение — линейное уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda. \tag{15}$$

Интересно отметить, что анзац

$$u^{1/3} = u^1(\boldsymbol{x}) + u^2(\boldsymbol{x})x_0, \tag{16}$$

где $u^1(\boldsymbol{x})$ и $u^2(\boldsymbol{x})$ — новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} = \nabla\left(u^{-2/3}\nabla u\right) \tag{17}$$

к системе двух уравнений

$$\Delta u^1 = 2u^1(u^2)^2, \quad \Delta u^2 = 2(u^2)^3, \tag{18}$$

а анзац

$$u^{1/2} = u^1(\boldsymbol{x}) + u^2(\boldsymbol{x})x_0 + u^3(\boldsymbol{x})\frac{x_0^2}{2!}, \tag{19}$$

$u^1(\boldsymbol{x})$, $u^2(\boldsymbol{x})$, $u^3(\boldsymbol{x})$ — новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} = \nabla\left(u^{-1/2}\nabla u\right) \tag{20}$$

к системе трех уравнений

$$\Delta u^1 = u^1u^3 + (u^2)^2, \quad \Delta u^2 = 3u^2u^3, \quad \Delta u^3 = 3(u^3)^2. \tag{21}$$

Анзацы (16) и (19) осуществляют редукцию (уменьшение) уравнений (17) и (20) по независимым переменным и антиредукцию (увеличение числа функций) по зависимым функциям. Очевидно, что такие анзацы не могут быть получены при помощи операторов лиевской или условной симметрии.

1. Ames W.F. Lohner R.I. Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.

2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.* 1987, **39**, № 1, 116–123.

3. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–6.

4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.