Об условной симметрии обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

Lie symmetry of the generalized Korteweg-de Vries equation is studied under $k \neq 1$ as well as conditional symmetry under $\forall\ k \neq 0$. The obtained operators of conditional symmetry are used to find ansätze reducing the equation to ordinary differential equations and to construct exact solutions.

Обобщим уравнение Кортевега-де Фриза (КДФ)

$$u_0 + uu_1 + u_{111} = 0$$

следующим образом:

$$u_0 + f(u)u_1^k + u_{111} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x)$, (x_0, x_1), $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \partial_\mu u$, $\mu = 0, 1$, $u_{111} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}$, $k = \text{const}$.

Групповые свойства уравнения (1) при $k = 1$ хорошо известны (см., напр., [1]). В сообщении исследована лиевская симметрия уравнения (1) при $k \neq 1$, а также условная симметрия уравнения (1) при произвольном k. Полученные операторы условной инвариантности используются для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), а также для построения точных решений.

Лиевская симметрия.

Теорема 1. *Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности (МАИ) уравнения (1) при $k \neq 1$ состоят из следующих операторов:*

$$\begin{array}{ll}
\forall\ k \neq 1,\ \forall\ f(u): & \langle P_0 = \partial_0, P_1 = \partial_1 \rangle; \\
k = 3,\ \forall\ f(u): & \langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = u^{-2}: & \langle P_0, P_1, D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u \rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = e^u: & \langle P_0, P_1, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + (k-3)\partial_u \rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = \lambda = \text{const}: & \langle P_0, P_1, \partial_u, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \dfrac{k-3}{k-1}u\partial_u \rangle; \\
k = 3,\ f(u) = u^{-2}: & \langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \\
& \quad D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u \rangle.
\end{array}$$

Доказательство этой теоремы проводится методом Ли [2].

Условная инвариантность.

Теорема 2. *Уравнение (1) $k = 1$ Q-условно инвариантно относительно оператора Галилея*

$$Q = x_0\partial_1 + \Phi(x_1, u)\partial_u, \tag{2}$$

Доклады Академии наук УССР, 1991, № 12, С. 15–18.

если

$$f(u)=\lambda_1\sqrt{u}+\lambda_2,\quad \Phi(u)=\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{u};\quad f(u)=\lambda_1\ln u,\quad \Phi(u)=\frac{u}{\lambda_1};$$

$$f(u)=\lambda_1\arcsin u+\lambda_2,\quad \Phi(u)=\frac{\sqrt{1-u^2}}{\lambda_1};\quad f(u)=\lambda_1\operatorname{Arsh}u+\lambda_2,$$

$$\Phi(u)=\frac{\sqrt{1+u^2}}{\lambda_1};\quad f(u)=\lambda_1 u,\quad \Phi(u)=\frac{1}{\lambda_1},$$

где λ_1, λ_2 *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Уравнение (1) при $k=1$ условно инвариантно относительно оператора (2), если

$$\overset{3}{\widetilde{Q}}[u_0+f(u)u_1+u_{111}\Big|_{\substack{u_0+f(u)u_1+u_{111}=0\\ Qu=0}}\equiv 0, \tag{3}$$

где $\overset{3}{\widetilde{Q}}$ — третье продолжение оператора Q, $Q_u=x_0u_1-\Phi$. Расщепив (3) до различным степеням x_0, получим систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned}
&f\Phi_1+\Phi_{111}0,\\
&-\Phi+3\Phi\Phi_{u11}+3\Phi_1\Phi_{u1}+f'\Phi^2=0,\\
&3\Phi^2\Phi_{uu1}+3\Phi\Phi_u\Phi_{u1}+3\Phi\Phi_1\Phi_{uu}=0,\\
&\Phi^3\Phi_{uuu}+3\Phi^2\Phi_u\Phi_{uu}=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

Исследование системы (4) показало, что можно считать $\Phi=\Phi(u)$. Тогда система (4) принимает вид

$$f'\Phi=1,\quad (\Phi^3\Phi'')'=0. \tag{5}$$

Решение системы (5) задается формулами

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \Phi(u)=\lambda_1\sqrt{u}+\lambda_2;\quad f(u)=\frac{2\sqrt{u}}{\lambda_1};\\
&\text{б)}\quad \Phi(u)=(c_1u^2+c_2)^{1/2};\quad f(u)=\int(c_1u^2+c_2)^{-1/2}du+c_3,
\end{aligned}\tag{6}$$

где λ_1, λ_2, c_i, $i=\overline{1,3}$ — произвольные постоянные.

Вычисляя интеграл в формулах (6) в зависимости от постоянных c_1, c_2, получим утверждение теоремы.

Если рассматривать оператор галилеевского типа

$$Q=x_0^m\partial_1+\Phi(x_1,u)\partial_u,\quad m=\mathrm{const}, \tag{7}$$

то справедлива более общая

Теорема 3. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (7) если*

$$1)\quad f(u) = \lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}, \quad \Phi(u) = \left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} \sqrt{u};$$

$$2)\quad f(u) = (\lambda_1 \ln u) u^{1-k}, \quad \Phi(u) = (k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}} u;$$

$$3)\quad f(u) = (\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \quad \Phi(u) = (k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}} \sqrt{1-u^2};$$

$$4)\quad f(u) = (\lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2)(1+u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \quad \Phi(u) = (k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}} \sqrt{1+u^2};$$

$$5)\quad f(u) = \lambda_1 u, \quad \Phi(u) = (k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}},$$

где $m = \frac{1}{k}$, $k \neq 0$, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

6) При $k = 3$ уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q = (3\lambda x_0)^{\frac{1}{3}} \partial_1 + \Phi(u)\partial_u, \quad \lambda = \text{const},$$

если $f(u) = F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F(u)$ определяется выражением $F' = \frac{\lambda}{\Phi} - (\Phi\Phi')''$, $\Phi(u)$ — произвольная функция.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Операторы условной инвариантности из теоремы 3 используем для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к ОДУ. Эти результаты сведены в таблицу.

	$f(u)$	Анзацы	Редуцированные ОДУ
1	$\lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}$	$u = \left[\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} + \varphi(x_0)\right]^2$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0} = 0$
2	$(\lambda_1 \ln u) u^{1-k}$	$u = e^{\varphi(x_0) + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1}$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}} = 0$
3	$(\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}}$	$u = \sin\left[\varphi(x_0) + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right]$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0} -$ $- \frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}} = 0$
4	$(\lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2)(1+u^2)^{\frac{1-k}{2}}$	$u = \operatorname{sh}\left[\varphi(x_0) + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right]$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0} +$ $+ \frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}} = 0$
5	$\lambda_1 u$	$u = \varphi(x_0) + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} = 0$
6	$F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F' = \frac{\lambda}{\Phi} - (\Phi\Phi')''$	$\psi(u) = \frac{x_1 + \varphi(x_0)}{(3\lambda x_0)^{\frac{1}{3}}}$, где $\psi'(u) = \frac{1}{\Phi(u)}$	$\dot\varphi = c_1 (3\lambda x_0)^{-\frac{2}{3}}$ $c_1 = \text{const}$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденую функцию φ в соответствующий анзац, получим точное решение уравнения (1) с соответствующей нелинейностью f

$$1)\quad u = \left[\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^2;$$

$$2)\quad u = \exp\left[-\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \ k \neq 2,$$

$$u = \exp\left[-(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} x_0^{-\frac{1}{2}} \ln x_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \quad k = 2;$$

3) $$u = \sin\left[\tfrac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \quad k \neq 2,$$

$$u = \sin\left[(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{2}} x_1\right], \quad k = 2;$$

4) $$u = \operatorname{sh}\left[-\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \quad k \neq 2,$$

$$u = \operatorname{sh}\left[-(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{2}} x_1\right], \quad k = 2;$$

5) $$u = \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + x_1 (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}};$$

6) $$\psi(u) = x_1 (3\lambda x_0)^{-\frac{1}{3}} + c,$$

где λ, c — произвольные постоянные.

1. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решена нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989.