Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Non-group symmetry of some nonlinear wave equations is investigated. These symmetries are used to construct formulas of generating solutions of equations in question.

К настоящему времени детально исследована симметрия линейных и нелинейных волновых уравнений относительно непрерывных групповых (лиевских) преобразований (см. [1–3] и цитированную там литературу). Однако указанные выше преобразования далеко не исчерпывают всевозможные преобразования инвариантности дифференциальных уравнений. Так, например, преобразования C-, P-, T-инвариантности линейных волновых уравнений квантовой механики, найденные в [3], не являются непрерывными. В [4] отмечено, что волновое уравнение

$$\Box u + \lambda (x_\nu x^\nu)^{-1} u = 0 \tag{1}$$

инвариантно относительно преобразований инверсии

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}, \quad u \to u' = u x_\nu x^\nu; \quad \mu, \nu = \overline{0,3}, \tag{2}$$

не образующих группу. В формулах (1), (2) и везде ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Преобразования (2), как и лиевские, дают возможность размножать решения уравнения (1). Это свойство очень важно для нелинейных уравнений, для которых не имеет место принцип линейной суперпозиции. Следует отметить, что негрупповая и дискретная симметрия нелинейных дифференциальных уравнений мало изучена.

В данной работе исследованы негрупповые и дискретные симметрии уравнений Монжа–Ампера, эйконала, Борна–Инфельда, Лиувилля, Гамильтона–Якоби, нелинейных уравнений теплопроводности, акустики, д'Аламбера и Шредингера. Найденные преобразования использованы для размножений решений данных уравнений.

Рассмотрим сначала одномерное уравнение Монжа–Ампера

$$u_{00} u_{11} - u_{01}^2 = 0, \tag{3}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\mu}$; $\mu, \nu = 0, 1$.

Теорема 1. *Уравнение (3) инвариантно относительно дробно-линейных преобразований вида*

$$\begin{aligned} x_0 \to x'_0 &= \frac{\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 u + \beta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}, \\ x_1 \to x'+_1 &= \frac{\gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 u + \gamma_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}, \end{aligned} \tag{4}$$

Доклады Академии наук УССР, 1991, № 9, С. 45–49.

$$u \to u' = \frac{\delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 u + \delta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}$$

где $\alpha = (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$, $\beta = (\beta_0, \boldsymbol{\beta})$, $\gamma = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$, $\delta = (\delta_0, \boldsymbol{\delta})$ — *произвольные постоянные линейно независимые векторы.*

Доказательство теоремы сводится к проверке соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\right)^2 = \lambda \left[\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_0')^2}\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_1')^2} - \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x_0' \partial x_1'}\right)^2\right],$$

где $\lambda = \lambda(x_0', x_1', u', \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — некоторая функция.

Очевидно, что преобразования (4) содержат в качестве подмножества лиевские преобразования [5]. Кроме того, они содержат преобразования $R(x_0, x_1, u)$

$$\begin{aligned}
&R_0: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_1: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_2: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_3: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_4: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_5: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_6: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_7: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = -u;
\end{aligned} \tag{5}$$

преобразования годографа $H(x_0, x_1, u)$

$$\begin{aligned}
&H_0: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&H_1: \quad x_0 \to x_0' = x_1, \quad x_1 \to x_1' = x_0, \quad u \to u' = u;\\
&H_2: \quad x_0 \to x_0' = u, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = x_0;\\
&H_3: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = u, \quad u \to u' = x_1;\\
&H_4: \quad x_0 \to x_0' = u, \quad x_1 \to x_1' = x_0, \quad u \to u' = x_1;\\
&H_5: \quad x_0 \to x_0' = x_1, \quad x_1 \to x_1' = u, \quad u \to u' = x_0;
\end{aligned} \tag{6}$$

преобразования инверсии

$$\begin{aligned}
&J_0: \quad x_0 \to x_0' = \frac{1}{x_0}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{x_1}{x_0}, \quad u \to u' = \frac{u}{x_0};\\
&J_1: \quad x_0 \to x_0' = \frac{x_0}{x_1}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{1}{x_1}, \quad u \to u' = \frac{u}{x_1};\\
&J_2: \quad x_0 \to x_0' = \frac{x_0}{u}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{x_1}{u}, \quad u \to u' = \frac{1}{u}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Не сложно убедиться в том, что преобразования (5) и (6) образуют дискретные группы, а преобразования (7) группу не образуют.

Все результаты, полученные выше, обобщаются на случай многомерного уравнения Монжа–Ампера

$$\det \|u_{\mu\nu}\| = 0, \tag{8}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in R_{1+n}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$; $\mu, \nu = \overline{0, n}$.

Теорема 2. *Уравнение (8) инвариантно относительно преобразований вида*

$$x_A \to x'_A = \frac{\beta_{AB} x_B}{\alpha_C x_C}, \tag{9}$$

где $A = \overline{0, n+1}$; $B, C = \overline{0, n+2}$; $x_{n+1} \equiv u$, $x_{n+2} \equiv 1$, $\beta_A = \{\beta_{A0}, \beta_{A1}, \ldots, \beta_{An+2}\}$, $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}\}$ *— произвольные постоянные векторы образующие базис в пространстве* R_{n+3}.

Ради краткости результаты, относящиеся к другим уравнениям, приведены в табл. 1, где λ, m — произвольные постоянные, HR — группа, состоящая из преобразований R, H и их суперпозиций, $F_i(x_0, u)$ — произвольные гладкие функции, $i = \overline{1, 7}$.

Таблица 1

Уравнение	Преобразование инвариантности
$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$x'_A = x_A (x_B x^B)^{-1}$
$u_0 + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0$	$x'_0 = \dfrac{\sqrt{2} x_0}{\sigma}$, $\boldsymbol{x}' = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sigma}$, $u' = \dfrac{\sqrt{2} u}{m\sigma}$, $\sigma = \dfrac{x_0 u}{m} - \boldsymbol{x}^2$
$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$, $n \neq 1$	$x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}$,$u' = u (x_\nu x^\nu)^{\frac{n-1}{2}}$
$u_{00} - u_{11} = \lambda \exp u$	$x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}$, $u' = u + 2 \ln x_\nu x^\nu$, $\mu, \nu = 0, 1$
$u_{00} = x_0^{-2} \Delta u + \lambda u^{-3}$	$x'_0 = x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$, $u' = u x_0^{-1}$
$u^4 u_{00} = \Delta u + \lambda u$	$x'_0 = x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$, $u' = u x_0^{-1}$
$u_{00} = \nabla (u^{-4} \nabla u) + \lambda u^{-3}$	$x'_0 = x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$, $u' = u x_0^{-1}$
$u_{00} = u^{\frac{4}{2-n}} \Delta u$, $n \neq 2$	$x'_0 = x_0$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u' = u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$iu_0 + \frac{\Delta u}{2M(u)} = 0$, $M = m\vert u\vert^{\frac{4}{n-2}}$	$x'_0 = x_0$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u' = u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$u_0 = \nabla \left(u^{-\frac{4}{n+2}} \nabla u \right)$	$x'_0 = x_0$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u' = u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$1 + u_\nu u^\nu = 0$	$R(x_0, \boldsymbol{x}, u)$, $H(x_0, u)$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_0 + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0$	$R(x_0, \boldsymbol{x}, u)$, $H(x_0, u)$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$R(x_0, \boldsymbol{x}, u)$, $H(\boldsymbol{x}, u)$, $HR(\boldsymbol{x}, u)$
$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0$	$R(x_0, \boldsymbol{x}, u)$, $H(\boldsymbol{x}, u)$, $HR(\boldsymbol{x}, u)$
$u_\nu u^\nu = F_1(x_0, u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_0 + F_2(x_0, u) \Delta u = F_3(x_0, u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$iu_0 + F_4(x_0, u) \Delta u = F_5(x_0, u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_{00} + F_6(x_0, u) \Delta u = F_7(x_0, u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$

В справедливости результатов, приведенных в табл. 1, можно убедиться непосредственной проверкой. Например, при $x_A \to x'_A = x_A (x_B x^B)^{-1}$

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \sigma^{-1} \left[1 - \frac{\partial u'}{\partial x'_\nu} \frac{\partial u'}{\partial (x^\nu)'} \right],$$

где $\sigma = x'_A (x^A)' - 2u' \left(x'_\nu \frac{\partial u'}{\partial x_\nu} - u' \right)$.

Преобразования инвариантности, полученные выше, мы применили для размножения решений соответствующих уравнений. Все эти результаты сведены в табл. 2, где $f(x)$ — известное, а $u = u(x)$ — новое решения указанных уравнений. Кроме формул, приведенных в табл. 2, справедливы формулы размножения решений при помощи преобразований из групп R, H, HR. Например,

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, -x_1, x_2, x_3),$$
$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, x_1, x_3),$$
$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, -x_1, x_3).$$

Таблица 2

Уравнение	Формула размножения решений
$\det \|u_{\mu\nu}\| = 0$	$\dfrac{\beta_{n+1B}x_B}{\alpha_C x_C} = f\left(\dfrac{\beta_{\mu B}x_B}{\alpha_C x_C}\right)$
$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$\dfrac{u}{x_\nu x^\nu - u^2} = f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu - u^2}\right)$
$u_0 + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0$	$\dfrac{\sqrt{2}u}{m\sigma} = f\left(\dfrac{\sqrt{2}x_0}{\sigma}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)$, $\sigma = \dfrac{x_0 u}{m} - \boldsymbol{x}^2$
$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$, $n \neq 1$	$u = (x_\nu x^\nu)^{\frac{1-n}{2}} f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu}\right)$
$u_{00} - u_{11} = \lambda \exp u$	$u = f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu}\right) - 2\ln x_\nu x^\nu$
$u^4 u_{00} = \Delta u + \lambda u$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$
$u_{00} = \nabla(u^{-4}\nabla u) + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$
$u_{00} = u^{\frac{4}{2-n}}\Delta u$, $n \neq 2$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$iu_0 + \frac{\Delta u}{2M(u)} = 0$, $M = m\|u\|^{\frac{4}{n-2}}$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$u_0 = \nabla\left(u^{\frac{4}{n+2}}\nabla u\right)$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{-\frac{n+2}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$u_{00} = x_0^{-2}\Delta u + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$

1. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987, 214 p.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.