Редукция и точные решения уравнения эйконала

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

С использованием подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала, построены анзацы, редуцирующие данное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены широкие классы точных решений уравнения эйконала.

Релятивистским аналогом классического уравнения Гамильтона является уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \qquad (*)$$

Установлено [1], что максимальной алгеброй инвариантности уравнения $(*)$ является алгебра $AC(1,4)$, являющаяся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. Симметрийная редукция уравнения $(*)$ по подалгебрам алгебры $AP(1,4)$ исследовалась в [2]. Некоторые точные решения этого уравнения с использованием одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,2)$ определены в [3, 4].

В настоящей статье находятся вещественные решения уравнения эйконала с помощью анзацев, редуцирующих уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Большинство из полученных таким образом дифференциальных уравнений удается проинтегрировать и тем самым построить решения исходного уравнения. Для построения анзацев используются подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. Исследуется также зависимость между уравнением эйконала и уравнением Гамильтона–Якоби

$$u_t + \frac{1}{2m}(\nabla u) = 0, \qquad (**)$$

где $u = u(t,\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, m — постоянная (масса частицы).

1. Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала является конформная алгебра $AC(1,4)$, обладающая базисом

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu}x_\nu\partial_\beta - g^{\beta\nu}x_\nu\partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha\partial_\alpha,$$
$$K_\alpha = -2(g^{\alpha\beta}x_\beta)D - (g^{\beta\nu}x_\beta x_\nu)\partial_\alpha,$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha,\beta,\nu = 0,1,\ldots,4)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,4) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \oplus AO(1,4)$,

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 4, С. 461–474.

где $AO(1,4) = \langle J_{\mu\nu} \mid \mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4\rangle$, расширенную алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = AP(1,4) \oplus \langle D\rangle$, а также оптическую алгебру $AOpt(3)$, обладающую базисом

$$S_1 + T_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_4 + K_0 - K_4), \quad Z_1 = -J_{04} - D, \quad C_1 = J_{04} - D,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_4), \quad M_1 = P_0 - P_4, \quad P_a, \quad H_a = J_{0a} + J_{a4}, \quad J_{ab}\ (a, b = 1, 2, 3).$$

Алгебра $AP(1,4)$ содержит расширенную алгебру Галилея $A\tilde{G}(3)$, порожденную генераторами

$$P_a, \quad J_{ab}, \quad G_a = J_{0a} - J_{a4}, \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4), \quad M = P_0 + P_4 \ \ (a, b = 1, 2, 3).$$

В данной статье подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ используются для редукции и поиска точных решений уравнения $(*)$. Если L — одна из таких подалгебр, $\omega'(x,u)$, $\omega(x,u)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение $(*)$ к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$. Каждому решению $\varphi = \varphi(\omega)$ редуцированного уравнения соответствует L-инвариантное решение $u = u(x)$ исходного уравнения $(*)$. Для классификации всех таких решений следует описать с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. При этом две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются $C(1,4)$-эквивалентными, если с точностью до $C(1,4)$-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами.

Так как мы ищем только вещественные решения уравнения $(*)$, то необходимо исключить из рассмотрения те подалгебры алгебры $AC(1,4)$, которые с точностью до эквивалентности содержат $P_0 + P_2$ или P_0. Действительно, пусть L — подалгебра алгебры $AC(1,4)$, содержащая $P_0 + P_2$. Если решение $u - u(x) = 0$ уравнения эйконала инвариантно относительно L, то $u = u(x_0 - x_2, x_1, x_3)$. Но тогда

$$(\nabla u)^2 = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,$$

откуда

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1,$$

и мы приходим к противоречию. Аналогично рассматривается случай $P_0 \in L$.

Используя классификацию с точностью до $C(1,4)$-сопряженности подалгебр конформной алгебры $AC(1,4)$ [4], получаем с учетом изложенного выше требуемый перечень $C(1,4)$-неэквивалентных подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$.

Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$:

1) $L_1 = \langle J_{01} - D, J_{02} - J_{21} + P_4, P_3\rangle$; 2) $L_2 = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$;

3) $L_3 = \langle J_{01}, P_2, P_3\rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02}, P_3\rangle$;

5) $L_5 = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{03}\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{01}, D, P_3\rangle$;

7) $L_7 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D\rangle$; 8) $L_8 = \langle J_{01} - J_{12} + P_0 - P_2, J_{02} - 2D, P_3\rangle$;

9) $L_9 = \langle J_{01} + P_4, P_2, P_3\rangle$; 10) $L_{10} = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02} + P_4, P_3\rangle$;

11) $L_{11} = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{03} + P_4\rangle$;

12) $L_{12} = \langle J_{01} - J_{13} + P_4, J_{02} - J_{23} + \alpha P_2 + \beta P_4, J_{03} - D\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$;

13) $L_{13} = \langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$; 14) $L_{14} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$;
15) $L_{15} = \langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 16) $L_{16} = \langle J_{14}, P_2, P_3\rangle$;
17) $L_{17} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, P_3\rangle$; 18) $L_{18} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}\rangle$;
19) $L_{19} = \langle J_{04} - J_{41}, P_2, P_3\rangle$; 20) $L_{20} = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{04} - J_{43} - J_{12}\rangle$;
21) $L_{21} = \langle J_{04} - J_{41}, J_{02} - J_{21} - P_2, P_3\rangle$; 22) $L_{22} = \langle J_{03}, J_{14}, D\rangle$;
23) $L_{23} = \langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 24) $L_{24} = \langle J_{02} + \alpha D, J_{01} - J_{12}, J_{04} - J_{42}\rangle$, $\alpha \neq 0$;
25) $L_{25} = \langle J_{03} + \alpha D, J_{12} + \beta D, J_{04} - J_{43}\rangle$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$;
26) $L_{26} = \langle J_{04}, J_{12} + \alpha D, J_{03} - J_{34}\rangle$, $\alpha > 0$;
27) $L_{27} = \langle J_{12} + \alpha J_{03}, J_{04} - J_{43}, D\rangle$, $\alpha > 0$;
28) $L_{28} = \langle J_{04} - J_{42}, J_{02} + \alpha D, P_3\rangle$, $\alpha \neq 0$;
29) $L_{29} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24} J_{03} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
30) $L_{30} = \langle P_2, P_3, J_{01} + D + P_0 + P_1\rangle$;
31) $L_{31} = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02} + D + P_0 + P_2, P_3\rangle$;
32) $L_{32} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, J_{03} + D + P_0 + P_3\rangle$;
33) $L_{33} = \langle J_{03} + D + P_0 + P_3, J_{12} + \alpha(P_0 + P_3), J_{04} - J_{43}\rangle$, $\alpha > 0$;
34) $L_{34} = \langle J_{03} - J_{32} + P_0 - P_2, J_{14}, J_{02} - 2D\rangle$;
35) $L_{35} = \langle J_{03} + D, J_{12} + P_0 + P_3, J_{04} - J_{43}\rangle$;
36) $L_{36} = \langle J_{04} - J_{41} + P_0 - P_1, P_2, P_3\rangle$; 37) $L_{37} = \langle J_{14} + \alpha D, P_2, P_3\rangle$;
38) $L_{38} = \langle J_{12} + \alpha J_{04}, D, P_3\rangle$ $\alpha > 0$; 39) $L_{39} = \langle J_{14} + P_0, P_2, P_3\rangle$;
40) $L_{40} = AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \gamma M_1\rangle$, $\gamma < 0$; 41) $L_{41} = \langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1\rangle$;
42) $L_{42} = AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \alpha Z_1\rangle$; 43) $L_{43} = \langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1, H_1 + P_2\rangle$;
44) $L_{44} = \langle S_1 + T_1 + 2J_{12} + \gamma M_1, H_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, H_2 - P_1 - \sqrt{2}H_3\rangle$, $\gamma < 0$;
45) $L_{45} = \langle \alpha Z_1 + S_1 + T_1 + 2J_{12}, H_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, H_2 - P_1 - \sqrt{2}H_3\rangle$, $\alpha \in R$;
46) $L_{46} = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle$;
47) $L_{47} = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$; 48) $L_{48} = AO(3) \oplus \langle P_0 + K_0\rangle$;
49) $L_{49} = \langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 0$;
50) $L_{50} = \langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, P_0 + K_0 - 4J_{23}\rangle$;
51) $L_{51} = \langle 2J_{12} + J_{34}, 2J_{13} + 2J_{24} - \sqrt{3}(K_4 - P_4), 2J_{23} - 2J_{14} + \sqrt{3}(K_3 - P_3)\rangle$.

2. Анзацы вида $u = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$, $\omega = \omega(x)$. В настоящем пункте для построения анзацев, редуцирующих уравнение $(*)$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям, используются подалгебры L_1–L_{12}. Рассмотрим, например, подалгебру L_1. Ее полный набор основных инвариантов состоит из функций

$$\omega' = \frac{(x_0 - x_1)u - x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}, \quad \omega = x_0 - x_1.$$

Поэтому алгебре L_1 соответствует анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, который можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}}{x_0 - x_1}\varphi(\omega) + \frac{x_2}{x_0 - x_1}, \quad \omega = x_0 - x_1.$$

Аналогично получаем анзацы и для остальных подалгебр

$$L_2: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=x_0; \qquad L_3: \ u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2};$$
$$L_4: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2};$$
$$L_5: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2};$$
$$L_6: \quad u=x_2\varphi(\omega), \quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2}{x_2^2};$$
$$L_7: \quad u=x_3\varphi(\omega), \quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{x_3^2};$$
$$L_8: \quad u=\left[(x_0-x_2)^2-4x_1\right]\varphi(\omega), \quad \omega=3\ln\left[(x_0-x_2)^2-4x_1\right]- \\ -2\ln\left[6(x_0+x_2)-6x_1(x_0-x_2)+(x_0-x_2)^3\right];$$
$$L_9: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_1), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2};$$
$$L_{10}: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_2), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2};$$
$$L_{11}: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_3), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2};$$
$$L_{12}: \quad u=-\left(x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_3}{x_0-x_3+\alpha}x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}\varphi(\omega)+ \\ +\frac{\beta x_2}{x_0-x_3+\alpha}+\frac{x_1}{x_0-x_3}, \quad \omega=x_0-x_3.$$

Анзац, соответствующий подалгебре L_1, редуцирует уравнение $(*)$ к уравнению

$$2\varphi\dot{\varphi}-\omega^{-1}\varphi^2-\omega^{-1}(1+\omega^2)=0. \tag{1}$$

Общим решением уравнения (1) является функция $\varphi=(\omega^2+C\omega-1)^{1/2}$. В этом случае

$$u=(x_0-x_1)^{-1}\left\{x_2+\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}\left[(x_0-x_1)^2+C(x_0-x_1)-1\right]^{1/2}\right\}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие всем остальным подалгебрам L_2–L_{12}. Редуцированному уравнению присвоим номер той алгебры L_j, $2\le j\le 12$, которой оно соответствует:

$$\dot{\varphi}^2-1=0, \tag{2–5}$$

$$4\omega\dot{\varphi}^2-(\varphi-2\omega\dot{\varphi})^2-1=0, \tag{6–7}$$

$$144(e^{\omega}-1)\dot{\varphi}^2-96\varphi\dot{\varphi}-16\varphi^2-1=0, \tag{8}$$

$$\dot{\varphi}^2-\frac{2}{\omega}\dot{\varphi}-1=0, \tag{9–11}$$

$$2\omega\varphi\dot{\varphi}+\varphi^2-\omega^{-2}-\beta^2(\omega+\alpha)^{-2}-1=0. \tag{12}$$

Найдем общие решения редуцированных уравнений (2–12) и укажем соответствующие им точные решения уравнения эйконала. Общим решением редуцированного уравнения (2) является $\varphi=\pm\omega+C$. Следовательно, получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u=\pm\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2\right)^{1/2}+C, \quad l=1,2,3; \quad u=\pm x_0+C.$$

Общим решением уравнения (6) является

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\omega^{1/2}\right)\left\{\lambda(\omega)+\lambda(\omega)^{-1}\right\} - \lambda(\omega)^{-1},$$

где $\lambda(\omega) = C$ или $\lambda(\omega) = \pm\left(\omega^{1/2}-1\right)^{1/2}\left(\omega^{1/2}+1\right)^{-1}$. В первом случае

$$u = \frac{C^2+1}{2C}\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2} + \frac{C^2-1}{2C}x_2, \quad C \in R$$

а во втором —

$$u = \pm\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}.$$

Алгебре L_7 соответствуют такие решения уравнения эйконала.

$$u = \frac{C^2+1}{2C}\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2} + \frac{C^2-1}{2C}x_3, \quad u = \pm\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}.$$

Общим решением уравнения (9) является

$$\varphi = \ln|\omega| \pm \left\{\sqrt{1+\omega^2} + \ln|\sqrt{1+\omega^2}-1| - \ln|\omega|\right\} + C.$$

Следовательно, получаем решения уравнения эйконала

$$u = \sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}-1}{x_0-x_l}\right| + C,$$

$$u = -\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}+1}{x_0-x_l}\right| + C,$$

где $l = 1, 2, 3$.

Интегрируя уравнение (12), находим

$$\varphi = -\left\{\frac{\omega^3+(C+\alpha)\omega^2+(C\alpha-\beta^2-1)\omega-\alpha}{\omega^2(\omega+\alpha)}\right\}^{1/2}.$$

Соответствующее ему решение уравнения эйконала имеет вид

$$u = \left(x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_3}{x_0-x_3+\alpha}x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\frac{(x_0-x_3)^3+(C+\alpha)(x_0-x_3)^2+(C\alpha-\beta^2-1)(x_0-x_3)-\alpha}{(x_0-x_3)^2(x_0-x_3+\alpha)}\right\}^{1/2}+$$
$$+\frac{\beta x_2}{x_0-x_3+\alpha}+\frac{x_1}{x_0-x_3}.$$

3. Анзацы вида $u^2 = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$, $\omega = \omega(x)$. Для построения анзацев указанного вида используем подалгебры L_{13}–L_{35}. В результате несложных вычислений получаем следующие анзацы:

$$L_{13}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2};$$
$$L_{14}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2};$$
$$L_{15}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2};$$

$$L_{16}: \quad u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = x_0;$$
$$L_{17}: \quad u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_0;$$
$$L_{18}: \quad u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0;$$
$$L_{19}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2, \quad \omega = x_0 - x_1;$$
$$L_{20}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0 - x_3;$$
$$L_{21}: \quad u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1 - 1} x_2^2, \quad \omega = x_0 - x_1;$$
$$L_{22}: \quad u^2 = x_2^2 \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_3^2}{x_2^2};$$
$$L_{23}: \quad u^2 = x_0^2 \varphi(\omega) - x_3^2, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2};$$
$$L_{24}: \quad u^2 = -x_3^2 \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = \frac{1+\alpha}{\alpha} \ln x_3 - \ln(x_0 - x_2);$$
$$L_{25}: \quad u^2 = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2,$$
$$\omega = (1+\alpha) \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\alpha \ln(x_0 - x_3) - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{26}: \quad u^2 = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{27}: \quad u^2 = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2,$$
$$\omega = 2 \ln(x_0 - x_3) - \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{28}: \quad u^2 = -x_1^2 \varphi(\omega) + x_0^2 - x_2^2, \quad \omega = \alpha \ln(x_0 - x_2) - (1+\alpha) \ln x_1;$$
$$L_{29}: \quad u^2 = \left(x_0^2 - x_3^2\right) \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2,$$
$$\omega = (1+\alpha) \ln(x_0 + x_3) + (1-\alpha) \ln(x_0 - x_3);$$
$$L_{30}: \quad u^2 = (x_0 - x_1) \varphi(\omega), \quad \omega = x_0 + x_1 + \ln(x_0 - x_1);$$
$$L_{31}: \quad u^2 = (x_0 - x_2) \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}{x_0 - x_2} + \ln(x_0 - x_2);$$
$$L_{32}: \quad u^2 = (x_0 - x_3) \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_0 + x_3 + \ln(x_0 - x_3);$$
$$L_{33}: \quad u^2 = -(x_0 - x_3) \varphi(\omega) + (x_0 - x_3) \left[\ln(x_0 - x_3) + 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right] + x_0^2 - x_3^2,$$
$$\omega = \frac{x_0 - x_3}{x_1^2 + x_2^2};$$
$$L_{34}: \quad u^2 = \left[(x_0 - x_2)^2 - 4x_3\right]^2 \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = 3 \ln\left[(x_0 - x_2)^2 - 4x_1\right] -$$
$$- 2 \ln\left[6(x_0 + x_2) - 6x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3\right];$$
$$L_{35}: \quad u^2 = -(x_0 - x_3) \varphi(\omega) + 2(x_0 - x_3) \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \frac{x_0 - x_3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие указанным анзацам:

$$\dot{\varphi}^2 + 4\varphi = 0, \tag{13–15}$$

$$\dot{\varphi}^2 - 4\varphi = 0, \tag{16–18}$$

$$\omega \dot{\varphi} - \varphi = 0, \tag{19–21}$$

$$(\omega-\omega^2)\dot\varphi^2+2\omega\varphi\dot\varphi-\varphi^2-\varphi=0, \tag{22}$$

$$(\varphi-\omega\dot\varphi)^2-\omega\dot\varphi^2-\varphi=0, \tag{23}$$

$$\gamma^2\dot\varphi^2-4(1-\gamma\varphi)\dot\varphi+4(\varphi^2-\varphi)=0, \quad \gamma=\alpha^{-1}(1+\alpha), \tag{24}$$

$$\{(1+\alpha)^2+\beta^2\}\dot\varphi^2+2\{(1+\alpha)\varphi-\alpha\}\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{25}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2+2\varphi\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{26}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2-2\varphi\dot\varphi+2\dot\varphi^2+\varphi^2-\varphi=0, \tag{27}$$

$$(1+\alpha)^2\dot\varphi^2+4\{\alpha-(1+\alpha)\varphi\}\dot\varphi+4\varphi(\varphi-1)=0, \tag{28}$$

$$(1-\alpha^2)\dot\varphi^2+2\varphi\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{29}$$

$$\dot\varphi^2+\varphi\dot\varphi-\varphi=0, \tag{30–32}$$

$$\omega^3\dot\varphi^2+\omega\dot\varphi+\omega\alpha^2-1=0, \tag{33}$$

$$144(e^\omega-1)\dot\varphi^2-96\varphi\dot\varphi-16\varphi^2-1=0, \tag{34}$$

$$\omega^2\dot\varphi^2+\dot\varphi+1=0. \tag{35}$$

Общим решением уравнения (13) является $\varphi=-(\omega+C)^2$. Таким образом, получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-2C\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-C^2;$$
$$u^2=x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-2C\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right)^{1/2}, \quad l=2,3.$$

Решая уравнение (16), получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u^2=x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2+2Cx_0+C^2, \quad l=1,2,3.$$

Так как $\varphi=C\omega$ является общим решением уравнения (19), то уравнение эйконала имеет такие решения:

$$u^2=C(x_0-x_1)+x_0^2-x_1^2, \quad u^2=C(x_0-x_3)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2;$$
$$u^2=C(x_0-x_1)+x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1-1}x_2^2.$$

Рассмотрим уравнение (24). Если $\gamma=2$, то $\varphi=-Ce^{-\omega}$ или $\varphi=1-Ce^{\omega}$. Получаем решение уравнения эйконала

$$u^2=C(x_0-x_2)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-\delta x_3^2, \quad \delta=0,1.$$

Если $\gamma=1$, то $\varphi=-C^2e^{-2\omega}+2Ce^{-\omega}$, $C\in R$, а потому

$$u^2=C(x_0-x_2)^2-2Cx_3(x_0-x_2)+x_0^2-x_1^2-x_2^2.$$

Если $\gamma=0$, то $\varphi=-Ce^{-\omega}(1-Ce^{-\omega})^{-1}$. Соответствующим решением уравнения $(*)$ является

$$u^2=\left\{\frac{x_3^2}{1-C(x_0-x_2)}+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right\}.$$

Если $\gamma \neq 0, 1, 2$, то φ задается неявно

$$\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}-\gamma+1\right|^{\gamma-1}\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}+1\right| = e^{-\omega+C},$$
$$\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}+\gamma-1\right|^{\gamma-1}\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}-1\right| = e^{-\omega+C}.$$

Подставляя вместо φ выражение $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-u^2\right)x_3^{-2}$, получаем уравнения, которые в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ задают u как неявную функцию от x_0, x_1, x_2, x_3.

Уравнение (25) имеет частные решения $\varphi = 1$ и $\varphi = 0$. Им соответствуют решения

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad \text{и} \quad u^2 = x_0^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = -1$, $\beta = 0$, то

$$\varphi = Ce^{\omega/2}(Ce^{\omega/2}-1)^{-1}.$$

В этом случае

$$u^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{1-C(x_0-x_3)} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то $\varphi = -Ce^{-\omega/2}$ или $\varphi = 1 - Ce^{-\omega/2}$. Имеем такие решения уравнения $(*)$:

$$u^2 = C(x_0-x_3) + x_0^2 - x_3^2, \quad u^2 = C(x_0-x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Уравнение (27) распадается на два уравнения. Общее решение первого уравнения задается соотношением

$$2\ln\left|\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}-1+\varphi\right| - \ln|1-\varphi| +$$
$$+ 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1-\varphi)} = \omega + C,$$

а общее решение второго уравнения — соотношением

$$2\ln\left|\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}+1-\varphi\right| - \ln|1-\varphi| -$$
$$- 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1-\varphi)} = \omega + C.$$

Уравнение (28) имеет при $\alpha^2 \neq 1$ такие решения:

$$\alpha\ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-\alpha\right| + \ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+1\right| = \omega + C,$$
$$\alpha\ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+\alpha\right| + \ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-1\right| = \omega + C.$$

Если $\alpha = 1$, то $\varphi = Ce^{\omega}$ или $\varphi = 1 + Ce^{\omega}$. Во втором случае получаем решение

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - C(x_0 - x_2).$$

При $\alpha = -1$ имеем $\varphi = (1-Ce^{\omega})^{-1}$ и, соответственно,

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \frac{Cx_1^2}{C-(x_0-x_2)}.$$

Общим решением уравнения (29) при $\alpha = 1$ является $\varphi = 1 + Ce^{-\omega/2}$. Соответствующим ему решением уравнения (∗) будет

$$u^2 = C(x_0 + x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Уравнение (30) распадается на два уравнения, которые имеют соответственно такие общие решения:

$$\ln\left|\frac{\psi - 1}{\psi + 1}\right| - \frac{2}{\psi + 1} = \omega + C, \quad \ln\left|\frac{\psi + 1}{\psi - 1}\right| + \frac{2}{\psi - 1} = \omega + C,$$

где $\psi = ((\varphi + 4)/\varphi)^{1/2}$.

Интегрируя уравнение (33), находим, что при $\alpha \neq 0$

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \pm \left\{\frac{1 - \lambda(\omega)}{4\omega} + 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\lambda(\omega) - 1}{2\alpha\omega} + \right.$$
$$\left. + \ln\left|\frac{\lambda(\omega) - 1 - 2\omega}{\omega}\right| + \frac{(1 + \alpha^2)\omega}{\lambda(\omega) - 1 - 2\omega}\right\} + C,$$

где $\lambda(\omega) = (-4\alpha^2\omega + 4\omega + 1)^{1/2}$, а при $\alpha = 0$

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \pm \left\{\ln\left|\frac{(4\omega + 1)^{1/2} - 1}{(4\omega + 1)^{1/2} + 1}\right| - \frac{(4\omega + 1)^{1/2}}{2\omega}\right\} + C.$$

Уравнение (35) распадается на два уравнения, которые имеют такие общие решения соответственно:

$$\varphi = -\frac{2\omega}{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1} - 2\operatorname{arctg}\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} - C,$$
$$\varphi = -\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} + 2\operatorname{arctg}\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} - C.$$

Получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2 = (x_0 - x_3)\left(\frac{1}{z} + 2\operatorname{arctg} z + 2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_0 + x_3 + C\right),$$
$$u^2 = (x_0 - x_3)\left(\frac{1}{z} - 2\operatorname{arctg} z + 2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_0 + x_3 + C\right),$$

где

$$z = \frac{\left\{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 4(x_0 - x_3)^2\right\}^{1/2} - \left(x_1^2 + x_2^2\right)}{2(x_0 - x_3)}.$$

4. Неявные анзацы. Используя подалгебры L_{36}–L_{50}, получаем анзацы вида $\omega'(x, u) = \varphi(\omega(x, u))$, где ω' и ω зависят от u. Такие анзацы задают в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ u как неявную функцию от x_0, x_1, x_2, x_3 и потому мы их называем неявными анзацами:

$$L_{36}: \quad u = \frac{1}{4}\varphi(\omega) + \frac{1}{4}(x_0 - x_1)^2, \quad \omega = 6(x_0 - x_1) - (x_0 - x_1)^3 - 6(x_0 + x_1);$$
$$L_{37}: \quad u^2 = x_0^2\varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + u^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$
$$L_{38}: \quad u^2 = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)\varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \ln\frac{x_0 - u}{x_0 + u};$$
$$L_{39}: \quad u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = x_0 + \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$

$$L_{40}:\quad x_0-u-\frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1}-2\gamma\,\mathrm{arctg}\,(x_0+u)=\sqrt{2}\varphi(\omega),$$
$$\omega=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2};$$

$$L_{41}:\quad x_0-u-\frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2+1}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2};$$

$$L_{42}:\quad -x_0-u+\frac{(x_0-u)\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\varphi(\omega),$$
$$\omega=\ln\frac{(x_0+u)^2+1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-2\alpha\,\mathrm{arctg}\,(x_0+u);$$

$$L_{43}:\quad \frac{(x_0-u)\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_3^2}-2\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)(x_0+u)+x_1x_2\left[(x_0+u)^2-1\right]}{(x_0+u)^2+1}-$$
$$-(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{\left[x_1+(x_0+u)x_2\right]^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]x_3};$$

$$L_{44}:\quad \frac{x_0-u}{2}-(x_0+u)\omega^2-\left\{\frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{2\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\right.$$
$$+\frac{1-3(x_0+u)^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3-$$
$$\left.-\frac{\sqrt{2}(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3\right\}-\gamma\,\mathrm{arctg}\,(x_0+u)=\varphi(\omega),$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1+\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2+\left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}};$$

$$L_{45}:\quad \frac{x_0-u}{2}-(x_0+u)\omega^2-\left\{\frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{2\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\right.$$
$$+\frac{1-3(x_0+u)^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3-$$
$$\left.-\frac{\sqrt{2}(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3\right\}-\gamma\,\mathrm{arctg}(x_0+u)=\varphi(\ln\omega+d\,\mathrm{arctg}\,(x_0+u)),$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1+\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2+\left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}};$$

$$L_{46}:\quad \frac{(\vec{x}^{\,2}-1)^2-4\left(x_1^2+x_2^2\right)}{(\vec{x}^{\,2}+1)^2}=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_0(\vec{x}^{\,2}-1)+2x_1x_3+2x_2u}{(\vec{x}^{\,2}+1)^2};$$

$$L_{47}:\quad \frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2}=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{(\vec{x}^{\,2}+1)^2}{x_1^2+x_2^2};$$

$$L_{48}:\quad \frac{u^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{\vec{x}^{\,2}+1}{u};$$

$$L_{49}:\quad \frac{4u^2+(\vec{x}^{\,2}+1)^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\varphi(\omega),\quad \omega=\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x_0}{\vec{x}^{\,2}-1}+\mathrm{arctg}\,\frac{\vec{x}^{\,2}+1}{2u};$$

$$L_{50}: \quad u^2 = -\frac{1}{12}\frac{x_2}{\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3}\varphi(u) - \frac{1}{12}\frac{\left[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3\right]^2}{x_2^2} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2(x_0+u)+2\sqrt{3}(x_0-u)x_3+(x_0-u)^3}{x_2^2\left[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3\right]} - 1.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение эйконала к следующим уравнениям:

$$9\varphi\dot{\varphi}^2 + 4 = 0; \tag{36}$$

$$(\varphi - \alpha^2)\dot{\varphi}^2 + 4\varphi^2\dot{\varphi} + 4\varphi^3 - 4\varphi^2 = 0; \tag{37}$$

$$(4 + \alpha^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2 + \varphi^4 - \varphi^3 = 0; \tag{38}$$

$$(\varphi - 1)\dot{\varphi}^2 - 4\varphi^2 = 0; \tag{39}$$

$$2\dot{\omega}\varphi^2 + \omega + 2\gamma = 0; \tag{40}$$

$$2\omega(\omega+1)^2\dot{\varphi}^2 + 2\varphi^2 + 1 = 0; \tag{41}$$

$$2\dot{\varphi}^2 - (4\varphi + 2\sqrt{2}\alpha)\dot{\varphi} + 2\varphi^2 + 1 = 0; \tag{42}$$

$$(\omega + \omega^2)\dot{\varphi}^2 - 2\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 + 4\omega + 1 = 0; \tag{43}$$

$$3\dot{\varphi}^2 + 12\omega^2 + 4\gamma = 0; \tag{44}$$

$$12 + 12\varphi^2 + (4\alpha + 12\varphi)\dot{\varphi} + 3\dot{\varphi}^2 = 0; \tag{45}$$

$$(16\omega^2 - 1)\dot{\varphi}^2 + 2(5\varphi - 1)\omega\dot{\varphi} + 16\varphi(\varphi - 1) = 0; \tag{46}$$

$$(\omega^2 + 4)\dot{\varphi}^2 - 4\omega\varphi\dot{\varphi} - 4\varphi - 4\varphi^2 = 0; \tag{47}$$

$$(4 + \omega\varphi)\dot{\varphi}^2 + 4\omega\varphi\dot{\varphi} + 4\varphi^2(\varphi + 1) = 0; \tag{48}$$

$$(-\alpha^2\varphi + \varphi + 4)\dot{\varphi}^2 + \varphi^2(\varphi + 4)^2 = 0; \tag{49}$$

$$-9[\varphi^2 - 256(\omega^2 + 1)^2]\dot{\varphi}^2 + 6\omega\varphi\dot{\varphi} - \omega^2 - 1 = 0. \tag{50}$$

Общим решением уравнения (36) является $\varphi = -(\omega + C)^{2/3}$. Ему соответствует решение

$$4u + \left[6(x_0 - x_1)u - (x_0 - x_1)^3 - 6(x_0 + x_1) + C\right]^{2/3} - (x_0 - x_1)^2 = 0$$

уравнения $(*)$.

По решениям уравнения (37) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$\alpha \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2 x_0}}{\alpha x_0} + \\ + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2 x_0} - x_0\right| - \alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1} + C = 0,$$

$$-\alpha \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2 x_0}}{\alpha x_0} + \\ + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2 x_0} + x_0\right| - \alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1} + C = 0.$$

Уравнение (38) имеет решения $\varphi=0$, $\varphi=1$ и

$$-2\alpha\left\{\alpha\left(\frac{1-\varphi}{1+\alpha^2\varphi}\right)^{1/2}\right\}+\ln\left|\frac{(1-\varphi)^{1/2}-(1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}{(1-\varphi)^{1/2}+(1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}\right|=\pm\omega+C.$$

Если $\varphi=0$, то $u=\pm x_0$.

Общим решением уравнения (39) является

$$\sqrt{\varphi-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\varphi-1}+C=\pm\omega.$$

Следовательно, получаем решение уравнения эйконала

$$\sqrt{x_1^2+u^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{x_1^2+u^2-1}\pm\left(x_0+\operatorname{arctg}\frac{u}{x_1}\right)+C=0.$$

По решениям редуцированных уравнений (40)–(50) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$-x_0+u+\frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1}+2\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u)\pm$$
$$\pm\gamma\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]\right)}}{\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]}\right]=0,$$

$$-u+\sqrt{2}(x_0+u)\omega^2+\frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\left[1-3(x_0+u)^2\right]}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2-\frac{2}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3-\frac{2(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3+$$
$$+\sqrt{2}\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u)\pm2\sqrt{2}\arcsin\sqrt{\frac{3}{|\gamma|}}\omega+C=0,$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1+\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2+\left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}}.$$

5. О связи между уравнениями эйконала и Гамильтона–Якоби. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (**) является конформная алгебра $AC(1,4)$ [5], обладающая базисом

$$\hat{J}_{ab}=x_b\partial_a-x_a\partial_b,\quad \hat{P}_a=\partial_a,\quad \hat{P}_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0+m\partial_u),$$
$$\hat{P}_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0-m\partial_u),\quad \hat{D}=-(t\partial_0+x^a\partial_a+u\partial_u),$$
$$\hat{J}_{04}=t\partial_0-u\partial_u,\quad \hat{J}_{0a}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\partial_0+\left(t+\frac{1}{m}u\right)\partial_a+mx_a\partial_u\right\},$$
$$J_{a4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\partial_0+\left(t-\frac{1}{m}u\right)\partial_a+mx_a\partial_u\right\},$$
$$K_0=-\sqrt{2}\left[\left(t^2+\frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0+\left(t+\frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a+\left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2}+\frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$

$$K_4 = \sqrt{2}\left[\left(t^2 - \frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2} - \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_a = -2x_a D + \left(\frac{2}{m}tu - \vec{x}^{\,2}\right)P_a,$$

где $\vec{x}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $a, b = 1, 2, 3$.

Чтобы установить связь между уравнениями $(*)$ и $(**)$, рассмотрим пространства $X_t \times V$ и $X \times U$, где $X = \{(x_0, x_1, x_2, x_3)\}$ и $X_t = \{(t, x_1, x_2, x_3)\}$ — пространства, представляющие независимые переменные, а $U = \{u\}$ и $V = \{v\}$ — пространства зависимых переменных. Отображение θ: $(t, \vec{x}, v) \to (x_0, \vec{x}, u)$, определенное с помощью формул

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{v}{m}\right), \quad x_a = x_a, \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{v}{m}\right),$$

является отображением пространства $X_t \times V$ на пространство $X \times V$. В предположении, что $\partial u/\partial x_0 + 1 \neq 0$, подстановка θ переводит уравнение $(*)$ в уравнение $(**)$. Аналогично, отображение θ_1: $(x_0, \vec{x}, u) \to (t, \vec{x}, v)$, определенное с помощью формул

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + u), \quad x_a = x_a, \quad v = \frac{m}{\sqrt{2}}(x_0 - u),$$

является отображением пространства $X \times U$ на пространство $X_t \times V$ и если $m + v_t \neq 0$, то подстановка θ_1 переводит уравнение $(**)$ в $(*)$. Так как $\theta\theta_1$ — тождественное преобразование пространства $X \times U$, а $\theta_1\theta$ — тождественное преобразование пространства $X_t \times V$, то $\theta_1 = \theta^{-1}$.

Исследуем зависимость между уравнениями $(*)$ и $(**)$ более подробно. С этой целью рассмотрим пространства $X_t \times V \times V^{(1)}$ и $X \times U \times U^{(1)}$, координаты которых представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные первого порядка от зависимых переменных. Выделим в $X_t \times V \times V^{(1)}$ открытое подпространство M_1 состоящее из тех векторов $(t, x, v, v_0, v_1, v_2, v_3)$, У которых $v_0 + m \neq 0$, а в $X \times U \times U^{(1)}$ — открытое подпространство M_2, состоящее из тех векторов $(x_0, \vec{x}, u, u_0, u_1, u_2, u_3)$, у которых $u_0 + 1 \neq 0$. Покажем, что отображение $\theta : X_t \times V \to X \times U$ можно продолжить до отображения $\hat{\theta}$: $M_1 \to M_2$.

Возьмем произвольную функцию $v = f(t, \vec{x})$ и пусть

$$\Gamma_f = \{(t, \vec{x}, f(t, \vec{x}) \,|\, (t, \vec{x}) \in \omega\} \subset X_t \times V$$

— ее график, где ω — область определения функции f. Отображение θ переводит Γ_f в

$$\theta \cdot \Gamma_f = \{(x_0, \vec{x}, u) = \theta(t, \vec{x}, v) \,|\, ((t, \vec{x}, v) \in \Gamma_f\}.$$

Множество $\theta \cdot \Gamma_f$ в общем случае не является графиком какой-либо однозначной функции $u = \hat{f}(x_0, \vec{x})$. Однако, поскольку $m + v_t \neq 0$, то результат преобразования $\theta \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\hat{f}}$ является графиком некоторой однозначной гладкой функции $u = \hat{f}(x_0, \vec{x})$. Докажем это. Действительно, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0 - u) - v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + u), x_1, x_2, x_3\right) = 0. \tag{51}$$

Найдем производную по u:

$$-\frac{m}{\sqrt{2}} - v_t\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(m+v_t).$$

По условию $m+v_t \neq 0$. Поэтому уравнение (51) определяет в некоторой окрестности точки (x_0, x_1, x_2, x_3, u) u как однозначную неявную функцию $\hat{f}$ от x_0, x_1, x_2, x_3. Функция $\hat{f}$ называется образом f при отображении θ и обозначается $\hat{f} = \theta \cdot f$. Отметим также, что если $v_t = 0$, то уравнение Гамильтона–Якоби не имеет вещественных решений. Поэтому следует предполагать, что $v_t \neq 0$ и $m + v_t \neq 0$. При таком предположении $u_0 + 1 \neq 0$. Продолжение $\hat{\theta}$: $M_1 \to M_2$ отображения θ определяется так, что оно преобразует производные функции $v = f(t, \vec{x}\,)$ в соответствующие производные преобразованных функций $u = \hat{f}(x_0, \vec{x})$. Продолженное действие отображения θ определено корректно. Действительно, пусть $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$ — заданная точка в M_1. Выберем произвольную гладкую функцию $v = f(t, \vec{x})$, определенную в окрестности точки $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, график которой лежит в M_1 и которая имеет данные производные v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0 в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$. Преобразованная функция $\theta \cdot f$ определена в окрестности соответствующей точки $(x_0^0, \vec{x}^{\,0}, u) = \theta(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0)$. Определим теперь действие продолженного преобразования $\hat{\theta}$ на точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, вычисляя производные преобразованной функции $\theta \cdot f$ в точке $(x_0^0, \vec{x}^{\,0})$. Пользуясь цепным правилом, получаем, что это определение зависит лишь от производных функции f в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, т.е. от самой точки $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, и следовательно, не зависит от выбора функции f, представляющей точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$.

Пусть Δ_1 и Δ_2 — многообразия, определяющиеся уравнениями $(*)$ и $(**)$ соответственно, M_1 — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_1, для которых $u_0 + 1 \neq 0$, а M_2 — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_2, для которых $v_t + m \neq 0$. Очевидно, $M_1 = M_1 \cap \Delta_1$, $M_2 = M_2 \cap \Delta_2$ и в силу изложенного выше $\hat{\theta}$ отображает M_1 на M_2. Инвариантность уравнения $(*)$ относительно группы $G_1 = \exp AC(1,4)$ означает, что многообразие Δ_1 инвариантно относительно действия продолженной группы $\tilde{G}_1$. Аналогично, многообразие Δ_2 инвариантно относительно продолженной группы $\tilde{G}_2$, где $G_2 = \exp \hat{A}C(1,4)$. Отсюда вытекает, что если $g_1 \in \tilde{G}_1$, то $\hat{\theta} g_1 \hat{\theta}_1 \in G_2$ и, обратно, если $g_2 \in \tilde{G}_2$, то $\hat{\theta}_1 g_2 \hat{\theta} \in G_1$. Значит, отображение θ индуцирует изоморфизм φ_θ: $X \to \theta X \theta_1$ алгебры $AC(1,4)$ на алгебру $\hat{A}C(1,4)$, который действует следующим образом:

$$P_0 \to -\hat{P}_0, \quad P_4 \to -\hat{P}_4, \quad J_{ab} \to J_{ab}, \quad J_{a4} \to -\hat{J}_{a4}, \quad J_{04} \to -\hat{J}_{04},$$
$$J_{0a} \to -\hat{J}_{0a}, \quad K_0 \to -\hat{K}_0, \quad K_4 \to -\hat{K}_4, \quad K_a \to \hat{K}_a.$$

Докажем, например, что $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$. Действительно, пусть $f(x_0, \vec{x}, u)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда

$$\theta_1 f(x_0, \vec{x}, u) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{u}{m}\right), \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{u}{m}\right)\right)$$

и значит, $P_0 \theta_1 f(x_0, \vec{x}, u) = -\frac{\partial f}{\partial x_0}$. Следовательно, $\theta P_0 \theta_1 = -\frac{\partial}{\partial x_0} = -\hat{P}_0$, а потому $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$.

Пусть H — произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$, тогда $\varphi_\theta(H) = \hat{H}$ является подалгеброй алгебры $\hat{A}C(1,4)$, причем ранги алгебр H и $\hat{H}$ совпадают. Из предыдущих результатов вытекает, что если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов алгебры H, то $\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_s)$ — полная система инвариантов алгебры H. Анзац $\omega_s = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$, соответствующий подалгебре H, редуцирует уравнение $(*)$ к дифференциальному уравнению $F(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, содержащему только переменные $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$, функцию φ и частные производные $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ от φ по переменным $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ соответственно. Анзац $\theta(\omega_s) = \varphi(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1})) = 0$, соответствующий подалгебре $\hat{H}$, редуцирует уравнение $(**)$ к дифференциальному уравнению $F(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}), \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, имеющему тот же вид, что и предыдущее. Это утверждение вытекает из равенства

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1 = -\frac{4m}{(m+v_t)^2}\left(v_t + \frac{1}{2m}(\Delta v)^2\right)$$

и соотношений

$$u_0 = \frac{m - v_t}{m + v_t}, \quad u_a = -\frac{\sqrt{2}}{m + v_t} v_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

которые связывают производные функций $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $v = \theta_1 u$.

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lettere al Nuovo Cimento*, 1982, **34**, № 16, 498–502.
2. Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М., Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений, Препринт № 86.27, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 36 с.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, P. 3645–3656.
4. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт № 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.