# Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера

*В.И. ФУЩИЧ, В.И. ЧОПИК*

Conditional invariance of multidimensional nonlinear Schrödinger equation is investigated. It is proved, that symmetry of the nonlinear Schrödinger equation is essentially extented in the case of some nonlinear additional conditions on solutions.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$
\begin{aligned}
&i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + F(|\Psi|)\Psi = 0;\\
&\Psi = \Psi(x_0, \boldsymbol{x}), \quad x_0 \equiv t, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n),\\
&\Psi_0 = \frac{\partial\Psi}{\partial x_0}, \quad \Psi = (\Psi\Psi^*)^{1/2}, \quad n \in N,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$F(\Psi)$ — произвольная гладкая функция, $\lambda = \mathrm{const}$.

В [1] детально исследованы симметрийные свойства нелинейного уравнения (1).

**Теорема 1.** *Уравнение (1) инвариантно относительно следующих алгебр:*

• *для произвольной гладкой функции $F(|\Psi|)$ базисные элементы алгебры инвариантности $AG(1,n)$ имеют вид*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = \overline{1,n}, \quad Q = i\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right),\\
&G_a = x_0 P_a + \frac{1}{2\lambda}x_a Q, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad b = \overline{1,n};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

• *для функции*

$$
F(|\Psi|) = \gamma|\Psi|^{-\frac{4}{\beta}}, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad \beta \in \mathbb{R}^1,
\tag{3}
$$

*базисные элементы алгебры инвариантности $AG_1(1,n)$ задаются формулой (2) и оператор масштабных преобразований имеет вид*

$$
D = 2x_0 P_0 + x_a P_a + \frac{\beta}{2}I, \quad I = \Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} + \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*};
\tag{4}
$$

• *для функции $F(|\Psi|) = \gamma|\Psi|^{4/n}$, $n$ — число пространственных переменных, базисные элементы алгебры инвариантности уравнения (1) $AG_2(1,n) \supset AG_1(1,n)$ задаются формулами (2), (4) и оператором проективных преобразований*

$$
A = x_0^2 P_0 + x_0 x_a P_a + \frac{\boldsymbol{x}^2}{4\lambda}Q - \frac{n}{2}x_0 I.
\tag{5}
$$

В настоящей работе показано, что симметрию уравнения (1) можно существенно расширить, если воспользоваться понятием условной инвариантности (см. [2–5]).

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 4, С. 30–33.

Представим нелинейность $F(|\Psi|)$ в уравнении (1) в виде

$$F(|\Psi|) = F_1(|\Psi|) + iF_2(|\Psi|), \tag{6}$$

где $F_1, F_2$ — действительные функции, $i^2 = -1$.

Предположим, что в (6) $F_2 = 0$. Тогда справедлива

**Теорема 2.** *Уравнение (1) условно инвариантно относительно алгебры $AG(1,n)$ и оператора*

$$R = \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right) + x_a P_a - \frac{\alpha}{1}I, \quad \alpha = \text{const}, \tag{7}$$

*если $F_1(|\Psi|)$ имеет вид*

$$F_1(|\Psi|) = \gamma_1|\Psi|^{-\frac{4}{\alpha}} + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4}{\alpha}}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^1 \tag{8}$$

*и функция $\Psi$ удовлетворяет уравнению*

$$\lambda\Delta|\Psi| + \gamma_2|\Psi|^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} = 0, \tag{9}$$

*где $\alpha \neq 0$.*

Для доказательства теоремы необходимо найти второе продолжение оператора $R$ и подействовать им на уравнение (1).

**Утверждение.** *Оператор $R$ порождает следующие конечные преобразования:*

$$\begin{aligned} &x'_0 = x_0, \qquad x'_a = \exp\{\tau\}\cdot x_a, \\ &\Psi' = \exp\left\{-\frac{\alpha\tau}{2}\right\}|\Psi|\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)^{\frac{\exp\{2\tau\}}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

*где $\tau$ — групповой параметр.*

**Теорема 3.** *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4}{\alpha}}\Psi = 0; \\ &\lambda\Delta|\Psi| + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4+\alpha}{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

*инвариантна относительно $AG_2(1,n)$, дополненной оператором (7), где $\alpha = n$.*

Обобщенную алгебру Галилея $AG_2(1,n)$, дополненную оператором $R$, обозначим символом $AG_3(1,n)$.

**Теорема 4.** *Переопределенная система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + \gamma_1|\Psi|^{-\frac{4}{\alpha}}\Psi = 0; \\ &\Delta|\Psi| = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

*инвариантна относительно $AG_3(1,n)$ при $\alpha = -n$.*

Для доказательства этих теорем к системам уравнений (11), (12) необходимо применить алгоритм С. Ли.

Теперь предположим, что в уравнении (1) с нелинейностью (6) $F_1 \equiv 0$, т.е. $F = iF_2$. Потребуем инвариантность уравнения (1) относительно оператора

$$R^0 = \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right) + x_a P_a, \tag{13}$$

получаемого из (7) при $\alpha = 0$.

**Теорема 5.** *Уравнение Шредингера (1) с нелинейностью (6) и $F_1 \equiv 0$ при произвольной гладкой функции $F = iF_2$ инвариантно относительно оператора $R^0$, если его решение $\Psi$ удовлетворяет дополнительному условию*

$$\Delta|\Psi| = 0. \tag{14}$$

**Замечание.** Если потребовать условную инвариантность уравнения (1) с нелинейностью (6) при $F_1 \equiv 0$ относительно оператора (7), то получим, что $F \equiv 0$.

**Теорема 6.** *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + i\gamma_3|\Psi|^{\frac{4}{n}}\Psi = 0;\\ &\Delta|\Psi| = 0, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \tag{15}$$

*инвариантна относительно $AG_3(1,n)$, где оператор $R$ имеет вид (7) при $\alpha = 0$.*

Итак, с помощью дополнительных условий, налагаемых на решения уравнения Шредингера, мы расширили симметрию уравнения (1).

Приведем некоторые примеры использования операторов условной симметрии для нахождения точных решений уравнения Шредингера.

Условная инвариантность уравнения (1) относительно операторов (7), (13) позволяет находить решения данного уравнения в виде

$$\Psi = f(x_0, \boldsymbol{x})\Phi_1(\omega_i)\{\Phi_2(\omega_i)\}^{ig(x_0,\boldsymbol{x})}, \tag{16}$$

где $\Phi_1, \Phi_2$ — функции от новых инвариантных переменных $\omega_i$, которые подлежат определению. Анзац (16) редуцирует систему уравнений (11), (12), (15) к набору уравнений с меньшим числом переменных.

Если в (16) функции

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\omega_i) = \omega_1^{\frac{A}{2}} \exp\left\{\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}\right\},\\ &\Phi_2(\omega_i) = \exp\left\{\pm\frac{i}{4\lambda}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_i = \frac{(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\exp\{\chi\cdot\operatorname{arctg} x_0\}}{x_i},\\ &A = \frac{\chi\cdot n \pm i}{\chi \pm i}, \quad 2A + A^2 = 0, \qquad \chi = \text{const}, \end{aligned} \tag{18}$$

то эта формула определяет решение линейного уравнения Шредингера для случая $n$ пространственных переменных. В (17) $\varphi$ — произвольная гладкая функция от $n-1$ переменных, а функции $f$ и $g$ соответственно имеют вид

$$f = (x_0^2+1)^{-\frac{n}{4}} \exp\left\{\frac{ix^2}{4\lambda}\frac{x_0}{x_0^2+1} - \frac{n}{2}\chi\cdot\operatorname{arctg} x_0\right\}, \tag{19}$$

$$g = \exp\{2\chi\cdot\operatorname{arctg} x_0\}. \tag{20}$$

Частным точным решением системы (11) для случая, когда $n = 1$ является функция

$$\Psi = \left(\sqrt{\frac{-3\lambda}{4\gamma^2}} \cdot \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\pm\frac{x^2}{4\lambda(x_0^2+1)} + \frac{ix^2}{4\lambda}\frac{x_0}{x_0^2+1}\right\}. \qquad (21)$$

Следует подчеркнуть, что решение (21) нелинейного уравнения Шредингера найдено за счет оператора условной симметрии $R$, т. е. формула (16) задает нелиевский анзац.


1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
2. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L45–L48.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 9, 17–20.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.