О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. II

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Построены инварианты максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(2,2)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнений Даламбера $\Box u + \lambda u^k = 0$, $k \neq 1$, и Лиувилля $\Box u + \lambda \exp u = 0$. Проведена редукция данных уравнений по максимальным подалгебрам ранга 3 и найдены некоторые точные решения этих уравнений.

Настоящая работа является продолжением статьи [1], поэтому в ней сохранены все основные обозначения, а нумерация разделов продолжена.

6. Полные системы инвариантов максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Вначале находим инварианты максимальных подалгебр ранга 2 и 3 алгебры $AP(2,2)$, представленных в табл. 3. Запись $L\colon f_1(x),\dots,f_s(x)$ будет означать, что функции $f_1(x),\dots,f_s(x)$ образуют полную систему инвариантов алгебры L.

а) Инварианты максимальных подалгебр L ранга 2 и 3 алгебры $AP(2,2)$, удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$:

$$L_1\colon\ \omega = y_1y_2 + y_3y_4; \qquad L_2\colon\ \omega = 2(y_1y_2 + y_3y_4) + y_1^2/y_4;$$
$$K_1\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2/y_4;$$
$$K_2\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2y_4^{(1-\alpha)(1+\alpha)};$$
$$K_3\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_3y_4;$$
$$K_4\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2/y_4 - \ln y_4;$$
$$K_5\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,(y_2/y_4) - \ln(y_2^2 + y_4^2);$$
$$K_6\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_1y_4 - y_2y_3;$$
$$K_7\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_4;$$
$$K_8\colon\ \omega_1 = 2y_3y_4 - y_2^2y_4, \quad \omega_2 = y_4^{-1}(y_1 + y_2y_4)^2;$$
$$K_9\colon\ \omega_1 = y_2, \quad \omega_2 = y_3y_4/y_2 + \ln y_4;$$
$$K_{10}\colon\ \omega_1 = y_4, \quad \omega_2 = (2y_2 + y_1y_4)^2 - y_4^2(y_1^2 - 4y_3);$$
$$K_{11}\colon\ \omega_1 = y_4, \quad \omega_2 = (2y_2 + y_1y_4)^2 + (2\varepsilon - y_4^2)(y_1^2 - 4y_3);$$
$$K_{12}\colon\ \omega_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \omega_2 = x_3^2 + x_4^2;$$
$$K_{13}\colon\ \omega_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \omega_2 = x_4;$$
$$K_{14}\colon\ \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2^2 - x_3^2 - x_4^2;$$
$$K_{15}\colon\ \omega_1 = 4(y_1y_2 + y_3y_4) + \varepsilon(y_1 - \delta y_2)^2, \quad \omega_2 = y_4^{-2\varepsilon}\exp(y_1 - \varepsilon y_2).$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 9, С. 1237–1244.

б) Инварианты максимальных подалгебр $L \not\subset AP(2,2)$ ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, реализующихся на множестве решений уравнения Даламбера и удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$:

$$L_{1,1}\colon\ u\omega^{\frac{1}{k-1}}; \qquad L_{2,1}\colon\ u\omega^{\frac{1}{k-1}};$$

$$K_{1,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\omega_1^{\alpha}\omega_2;$$

$$K_{1,2}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \alpha\ln\omega_1 - 2\operatorname{arctg}\omega_2;$$

$$K_{1,3}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\omega_1 - 2\omega_2;$$

$$K_{2,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\omega_1^{\beta+1}\omega_2^{-(1+\alpha)};$$

$$K_{3,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

$$K_{4,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\omega_1^{\beta+1} + 2\omega_2;$$

$$K_{5,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\omega_1^{\beta+1} + \omega_2;$$

$$K_{6,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \frac{2\omega_1}{\omega_2};$$

$$K_{7,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\frac{\omega_1^{\beta+1}}{\omega_2^2};$$

$$K_{7,2}\colon\ u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} - \ln\omega_2;$$

$$K_{8,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \ln\frac{\omega_1}{\omega_2};$$

$$K_{9,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_2 - \ln\omega_1^{\beta+1};$$

$$K_{10,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \frac{\omega_2}{\omega_1^2} + 4\ln\omega_1;$$

$$K_{10,2}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{(k-1)(2\alpha+1)}}, \qquad \omega = \ln\frac{\omega_2^{2\alpha+1}}{\omega_1^{2(\alpha+1)}};$$

$$K_{10,3}\colon\ u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_1;$$

$$K_{11,1}\colon\ u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_1;$$

$$K_{12,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_1/\omega_2;$$

$$K_{13,1}\colon\ u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_1/\omega_2^2;$$

$$K_{14,1}\colon\ u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \omega = \omega_2/\omega_1^2.$$

Сделаем разъяснение относительно инвариантов подалгебр. Рассмотрим, например, подалгебру $K_{1,1}$. Ее основные инварианты $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$ и $\ln\omega_1^{\alpha}\omega_2$. Они представлены через основные инварианты соответствующей подалгебры K_1 из п. а).

в) Инварианты максимальных подалгебр $L \not\subset AP(2,2)$ ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, реализующихся на множестве решений уравнения Лиувилля и удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$:

$$L_{1,1}\colon\ u + \ln\omega; \qquad L_{2,1}\colon\ u + \ln\omega;$$

$$K_{1,1}\colon\ u + \ln\omega_1, \qquad \omega = \ln\omega_1^{\alpha}\omega_2;$$

$K_{1,2}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\alpha\ln\omega_1-2\,\mathrm{arctg}\,\omega_2$;

$K_{1,3}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln\omega_1-2\omega_2$;

$K_{2,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln\omega_1^{\beta+1}\omega_2^{-1(1+\alpha)}$;

$K_{3,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$;

$K_{4,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln\omega_1^{\beta+1}+2\omega_2$;

$K_{5,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln\omega_1^{\beta+1}+\omega_2$;

$K_{6,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=2\omega_1/\omega_2$;

$K_{7,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln(\omega_1^{\beta+1}/\omega_2^2)$;

$K_{7,2}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad\omega=\omega_1/\omega_2-\ln\omega_2$;

$K_{8,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln(\omega_1/\omega_2)$;

$K_{9,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\omega_2-\ln\omega_1^{\beta+1}$;

$K_{10,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\omega_2/\omega_1^2+4\ln\omega_1$;

$K_{10,2}$: $u+\dfrac{1}{2\alpha+1}\ln\omega_1$, $\quad\omega=\ln(\omega_2^{2\alpha+1}/\omega_1^{2(\alpha+1)})$;

$K_{10,3}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad\omega=\omega_1$;

$K_{11,1}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad\omega=\omega_1$;

$K_{12,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\omega_1/\omega_2$;

$K_{13,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad\omega=\omega_1/\omega_2^2$;

$K_{14,1}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad\omega=\omega_2/\omega_1^2$.

Как и в предыдущем пункте, основные инварианты рассмотренных алгебр представлены через основные инварианты соответствующих алгебр из п. а).

7. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, представленная в п. б), $\omega(x)$ — основные инварианты L. Инвариант $\omega'(x,u)$ записываем в виде $u/f(x)$ и рассматриваем анзац $u=f(x)\varphi(\omega(x))$. Подставляя его в уравнение Даламбера, получаем редуцированное уравнение

$$f(\nabla\omega)^2\ddot\varphi+(2\nabla f\cdot\nabla\omega+f\cdot\Box\omega)\dot\varphi+\Box f\cdot\varphi+\lambda f^k\varphi^k=0,$$

где

$$(\nabla\omega)^2=\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_4}\right)^2,$$

$$\nabla f\nabla\omega=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial\omega}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial\omega}{\partial x_4}.$$

Пусть далее L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, представленная в п. в), $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — основные инварианты L. Инвариант $\omega'(x,u)$ записываем в виде $u-g(x)$. Подставляя анзац $u=\varphi(\omega)+g(x)$ в уравнение Лиувилля, получаем редуцированное уравнение

$$\ddot\varphi(\nabla\omega)^2+\dot\varphi\cdot\Box\omega+\Box g+\lambda\exp(\varphi+g)=0.$$

Таким образом, чтобы провести редукцию уравнения Даламбера по подалгебрам из п. б), достаточно вычислить для каждой из них $(\nabla\omega)^2$, $\nabla f \nabla \varphi$, $\Box\omega$, $\Box f$. Результаты этих вычислений приведены в табл. 4, которая одновременно позволяет провести редукцию уравнения Лиувилля по всем подалгебрам, представленными в п. в).

Таблица 4

Алгебра	$\frac{1}{f^{k-1}}(\nabla\omega)^2$	$\frac{1}{k^{k-1}}\cdot\Box\omega$	$\frac{1}{f^{k+1}}(\nabla f)^2$	$\frac{1}{f^k}\cdot\Box f$	$\frac{1}{f^k}(\nabla f\cdot\nabla\omega)$
$K_{1,1}$	$4\alpha^2$	4α	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\alpha}{k-1}$
$K_{1,2}$	$4\alpha^2$	4α	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\alpha}{k-1}$
$K_{1,3}$	4	4	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4}{k-1}$
$K_{2,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{3,1}$	$4\omega^2(\omega-1)$	$4\omega^2$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	0
$K_{4,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{5,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{6,1}$	$-\omega^2(\omega^2+4)$	$-2\omega^3$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	0
$K_{7,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{7,2}$	-4	4	0	0	$-\frac{2}{k-1}$
$K_{8,1}$	$16(1+e^{\omega})$	$8e^{\omega}$	$\frac{8}{(k-1)^2}$	$\frac{8}{(k-1)^2}$	$-\frac{12}{k-1}$
$K_{9,1}$	-4β	4	0	0	$-\frac{2}{k-1}$
$K_{10,1}$	64	16	0	0	$-\frac{8}{k-1}$
$K_{10,2}$	$32\alpha(2\alpha+1)\times$ $\times e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}$	$16\alpha(2\alpha+1)\times$ $\times e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}$	0	0	$-\frac{8e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}}{k-1}$
$K_{10,3}$	0	0	$\frac{32\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{8\omega^2}{k-1}$
$K_{11,1}$	0	0	$\frac{32\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{8(\omega^2-2\varepsilon)}{k-1}$
$K_{12,1}$	$4\omega^2(1-\omega)$	$4\omega(1-\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$
$K_{13,1}$	$4\omega^2(1-\omega)$	$6\omega(1-\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$
$K_{14,1}$	$4\omega^2(1+\omega)$	$6\omega(1+\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{3(k-3)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$

8. Точные решения уравнения Даламбера. Используя табл. 4, получаем следующие уравнения для функции $\varphi=\varphi(\omega)$:

$$K_{1,1}, K_{1,2}\colon\ 4\alpha^2\ddot{\varphi}+\frac{4\alpha(k-3)}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{1,3}\colon\ 4\ddot{\varphi}+\frac{4(k-3)}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{i,1}(i=2,4,5,7)\colon\ 4(\beta^2-1)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\beta}{k-1}+4\beta+4\right)\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{3,1}\colon\ 4\omega^2(\omega-1)\ddot{\varphi}+4\omega^2\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{6,1}\colon\ -\omega^2(\omega^2+4)\ddot{\varphi}-2\omega^3\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{7,2}\colon\ -4\ddot{\varphi}+\frac{4(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{8,1}\colon\ 16(1+e^\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{24}{k-1}+8e^\omega\right)\dot{\varphi}+\frac{8}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{9,1}\colon\ -4\beta\ddot{\varphi}+\frac{4(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,1}\colon\ 64\ddot{\varphi}+\frac{16(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,2}\colon\ 32\alpha(2\alpha+1)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}\ddot{\varphi}+\left(-\frac{16}{k-1}+16(2\alpha+1)\right)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,3}\colon\ -\frac{16\omega^2}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{11,1}\colon\ -\frac{16(\omega^2-2\varepsilon)}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{12,1}\colon\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+4\omega(1-\omega)\right)\dot{\varphi}+\frac{4}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{13,1}\colon\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+6\omega(1-\omega)\right)\dot{\varphi}-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{14,1}\colon\ 4\omega^2(1+\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+6\omega(1+\omega)\right)\dot{\varphi}-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Используя редуцированные уравнения, выпишем некоторые решения уравнения Даламбера. Запись L: $u=u(x)$ будет означать, что рассматриваемое решение $u=u(x)$ уравнения Даламбера инвариантно относительно подалгебры L. Если $L=K_{m,i}$, то функцию $u(x)$ представляем через основные инварианты соответствующей подалгебры K_m:

$$K_{1,1}\colon\ u^{1-k}=-\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1;$$

$$K_{1,2}\colon\ u=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{C\omega_1e^{-\frac{2}{\alpha}\operatorname{arctg}\omega_2}}{\left[1-C\omega_1e^{-\frac{2}{\alpha}\operatorname{arctg}\omega_2}\right]^2}\right\}^{1/2}\quad\text{при}\quad k=3;$$

$$K_{1,3}\colon\ u=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{C\omega_1e^{-2\omega_2}}{[1-C\omega_1e^{-2\omega_2}]^2}\right\}^{1/2}\quad\text{при}\quad k=3;$$

$$K_{2,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_2^{\frac{1+\alpha}{2}};$$

$$K_{2,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1\omega_2^{\frac{(k-2)(1+\alpha)}{2}};$$

$$K_{4,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+Ce^{-\omega_2};$$

$$K_{4,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1e^{-(k-2)\omega_2};$$

$$K_{5,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+Ce^{-\frac{1}{2}\omega_2};$$

$$K_{5,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1e^{-\frac{k-2}{2}\omega_2};$$

$$K_{7,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_2;$$

$$K_{7,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1\omega_2^{k-2};$$

$$K_{7,2}\colon\ u=\frac{24}{\lambda}\frac{\omega_2}{(\omega_1-\omega_2\ln\omega_2+\omega_1C)^2};\quad\text{при}\quad k=2;$$

$$K_{9,1}(\beta\neq0)\colon\ u=\frac{24\beta}{\lambda}\frac{1}{\omega_1(\omega_2-\ln C\omega_1^{\beta+1})^2}\quad\text{при}\quad k=2;$$

$$K_{9,1}(\beta=0)\colon\ u^{1-k}=\omega_1\left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(\omega_2-\ln\omega_1)+C\right\}\quad\text{при}\quad k\neq2;$$

$$K_{10,1}\colon\ u=-\frac{384}{\lambda}\frac{\omega_1}{\omega_2+\omega_1^2\ln\omega_1}\quad\text{при}\quad k=2;$$

$$K_{10,2}(\alpha=0)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{16(k-2)}\frac{\omega_2}{\omega_1}+C\omega_1;$$

$$K_{10,3}\colon\ u^{1-k}=\omega_2\left[\frac{\lambda(k-1)^2}{16(k-2)}\frac{1}{\omega_1}+C\omega_1^{k-3}\right]\quad\text{при}\quad k\neq2;$$

$$K_{10,3}\colon\ u=\frac{16\omega_1}{(C-\lambda\ln\omega_1)\omega_2}\quad\text{при}\quad k=2;$$

$$K_{11,1}\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{16}\omega_2(\omega_1-2\varepsilon)^{\frac{k-3}{2}}\int\frac{d\omega_1}{(\omega_1^2-2\varepsilon)^{\frac{k-1}{2}}}.$$

9. Точные решения уравнения Лиувилля. Любое решение уравнения Лиувилля, инвариантное относительно подалгебры $\langle P_1+P_4\rangle$, имеет вид $u=\varphi(x_1-x_4, x_2,x_3)$. В результате получаем следующее редуцированное уравнение: $\partial^2\varphi/\partial x_2^2-\partial^2\varphi/\partial x_3^2+\lambda e^{\varphi}=0$. Отсюда вытекает, что общее решение u, инвариантное относительно $\langle P_1+P_4\rangle$, имеет вид

$$u=\ln\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{f_{y_2}(y_2,y_3)g_{y_4}(y_2,y_4)}{[f(y_2,y_3)+g(y_2,y_4)]^2}\right\},$$

где f, g — произвольные дифференцируемые функции, f_{y_2} — производная по аргументу y_2, g_{y_4} — производная по аргументу y_4 и $\lambda f_{y_2}g_{y_4}<0$.

Рассмотрим далее редуцированные уравнения, соответствующие анзацам $u=\varphi(\omega)+g(x)$. Используя табл. 4, получаем следующие уравнения для функции

$\varphi = \varphi(\omega)$:

$$K_{1,1}, K_{1,2}\colon\ 4\alpha^2\ddot\varphi + 4\alpha\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{1,3}\colon\ 4\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{i,1}(i = 2, 4, 5, 7)\colon\ 4(\beta^2 - 1)\ddot\varphi + 4(\beta + 1)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{3,1}\colon\ 4\omega^2(\omega - 1)\ddot\varphi + 4\omega^2\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{6,1}\colon\ -\omega^2(\omega^2 + 4)\ddot\varphi - 2\omega^3\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{7,2}\colon\ -4\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{8,1}\colon\ 16(1 + e^\omega)\ddot\varphi + 8e^\omega\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{9,1}\colon\ -4\beta\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,1}\colon\ 64\ddot\varphi + 16\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,2}\colon\ 16(2\alpha + 1)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}[2\alpha\ddot\varphi + \dot\varphi] + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,3}, K_{11,1}\colon\ -16\omega + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{12,1}\colon\ 4\omega^2(1 - \omega)\ddot\varphi + 4\omega(1 - \omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{13,1}\colon\ 4\omega^2(1 - \omega)\ddot\varphi + 6\omega(1 - \omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 2 = 0;$$
$$K_{14,1}\colon\ 4\omega^2(1 + \omega)\ddot\varphi + 6\omega(1 + \omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 2 = 0;$$

Выпишем некоторые точные решения уравнения Лиувилля:

$$K_{2,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4C\omega_2^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{1 + \lambda C\omega_1\omega_2^{-\frac{1+\alpha}{2}}};$$
$$K_{4,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4Ce^{\omega_2}}{1 + \lambda C\omega_1 e^{\omega_2}};$$
$$K_{5,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4Ce^{\frac12\omega_2}}{1 + \lambda C\omega_1 e^{\frac12\omega_2}};$$
$$K_{7,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4C}{\omega_2 + \lambda C\omega_1};$$
$$K_{10,2}(\alpha = 0)\colon\ u = \ln\frac{16\omega_1}{\lambda\omega_2 + C\omega_1^2};$$
$$K_{10,3}, K_{11,1}\colon\ u = \ln\frac{16}{\lambda}\frac{\omega_1}{\omega_2};$$
$$K_{9,1}(\beta = 0)\colon\ u = -\ln\left[\frac{\lambda}{4}(\omega_2 - \ln\omega_1)\omega_1 + C\omega_1\right].$$

1. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д., О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **41**, № 8, 1122–1128.