О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. I

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Получено описание максимальных подалгебр ранга 3 и 4 расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(2,2)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения $\Box u + F(u) = 0$, где $F(u) = \lambda u^k$, $k \neq 1$, или $F(u) = \lambda \exp u$.

1. Введение. Рассмотрим нелинейное уравнение в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$

$$\Box u + F(u) = 0, \qquad (1)$$

где $\Box u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44}$, $u_{\mu\nu} = \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $u \equiv u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; F — гладкая функция. Известно [1], что если $F(u) = \lambda u^k$, $k \neq 1$, или $F(u) = \lambda \exp u$, то максимальной группой инвариантности уравнения (1) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(2,2)$. Ее алгебра Ли $A\tilde{P}(2,2)$ реализуется следующими операторами:

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad S = -x^\alpha \partial_\alpha + \frac{2u}{k-1}\partial_u \quad \text{при } F = \lambda u^k,$$
$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad S = -x^\alpha \partial_\alpha + 2\partial_u \quad \text{при } F = \lambda \exp u,$$

где $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$, $\partial_u \equiv \partial/\partial u$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3, 4$.

В настоящей статье подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1) при $F(u) = \lambda u^k$ (уравнение Даламбера) и $F(u) = \lambda \exp u$ (уравнение Лиувилля). С этой целью опишем максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, не содержащиеся в $AP(2,2)$. Если L — одна из таких подалгебр ранга 3, $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$. При описании максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ используется метод классификации подалгебр алгебры $AO(2,2)$, основанный на разбиении множества всех ее подалгебр на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом [2].

Статья состоит из двух частей. В первой части описаны максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Во второй части статьи построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция по каждой из них и найдены точные решения уравнений Даламбера и Лиувилля.

Отметим, что редукция волнового уравнения (1) в пространстве Минковского $R_{1,3}$ осуществлена в работах [1, 3–6], а в пространствах $R_{2,2}$ и $R_{2,3}$ с использованием подалгебр алгебр $AP(2,2)$ и $AP(2,3)$ — в работах [7, 8].

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 8, С. 1122–1128.

2. Основные понятия. Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(2,2)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in O(2,2)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in R^4$.

Пусть E_{ik} — матрица порядка 5, имеющая единицу на пересечении i-и строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах, $i,k = 1,\ldots,5$.

Тогда базис алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ образуют матрицы $J_{12} = E_{12} - E_{21}$, $L_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$; $a < b$; $a,b = 3,4,5$; $J_{ia} = -E_{ia} - E_{ai}$; $i = 1,2$; $a = 3,4,5$; $P_j = E_{j5}$; $j = 1,\ldots,5$; $S = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44}$. Они удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b,$$
$$J_{ab} = -J_{ba}, \quad [P_a, P_b] = 0, \quad [S, J_{ab}] = 0, \quad [S, P_a] = P_a,$$

где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{ab} = 0$ при $a \neq b$; $a,b,c,d = 1,2,3,4$. Генераторы поворотов J_{ab} порождают алгебру $AO(2,2)$, генераторы трансляций P_a порождают коммутативный идеал V, причем $A\tilde{P}(2,2) = AP(2,2) \oplus \langle S\rangle$, где $AP(2,2) = V \oplus AO(2,2)$, $A\tilde{O}(2,2) = AO(2,2) \oplus \langle S\rangle$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $\tilde{P}(2,2)$, $AG = \langle X_1,\ldots,X_s\rangle$ — алгебра Ли группы G. Непостоянная функция $f(x,u) = f(x_1,\ldots,x_4,u)$ называется инвариантом группы G, если $f(x,u)$ постоянна на G-орбите каждой точки (x,u), $x \in R_{2,2}$. Функция $f(x,u)$ является инвариантом G тогда и только тогда, когда $X_i f(x,u) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,s$. Если r — ранг алгебры AG и $r < 5$, то существует система $s_1 = 5 - r$ функционально независимых инвариантов $f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант f группы G можно выразить через инварианты $f_1,\ldots,f_{s_1}$, т. е. $f(x,u) = \psi(f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u))$. Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы G или алгебры AG.

Каждый внутренний автоморфизм $g \to hgh^{-1}$ группы Ли G индуцирует автоморфизм $X \to hXh^{-1}$ алгебры Ли AG. Этот автоморфизм будем называть G-автоморфизмом алгебры AG и обозначать символом φ_h. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры AG будем называть G-сопряжениыми, если $hL_1h^{-1} = L_2$. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Если для некоторого элемента $C \in \tilde{P}(2,2)$ подалгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1, L_2 будем называть эквивалентными [7, 9]. В этом случае используем обозначение $L_1 \approx L_2$.

Если функции $f_i(x)$, $i = 1,\ldots,k$, являются инвариантами ненулевой подалгебры L алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, то L будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ существует максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

Предложение 1. *Пусть L_1, L_2 — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Для того чтобы $L_1 \approx L_2$, необходимо и достаточно, чтобы максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр L_1 и L_2 были $\tilde{P}(2,2)$-сопряженными.*

Подалгебра $L \subset AO(2,2)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(2,2)$ относится к классу $r > 0$ или имеет изотропный ранг r, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L, равен r. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра L алгебры $AO(2,2)$ имеет изотропный ранг 0 или 2.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Если подпространство $L \cap V$ отлично от нуля и не является вполне изотропным, то в силу теоремы Витта можно предполагать, что $P_i \in L \cap V$ для некоторого $i \in \{1,2,3,4\}$. Так как $P_i = \partial/\partial x_i$, то инвариант алгебры L не зависит от переменной x_i, и потому рассматриваемый случай сводится к изучению уравнения (1) в пространстве $R_{1,2}$. Поскольку эти случаи детально рассматривались в [1, 3], то, следовательно, достаточно ограничиться изучением тех подалгебр $L \subset A\tilde{P}(2,2)$, для которых $L \cap V = 0$ либо $L \cap V$ является вполне изотропным. Пусть $L \cap V$ является вполне изотропным и $L \cap V = \langle P_1 + P_4 \rangle$.

Тогда любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, имеет вид $u = \varphi(x_1 - x_4, x_2, x_3)$, и потому $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + F(\varphi) = 0$. Таким образом, все свелось к рассмотрению уравнения (1) пространстве $R_{1,1}$. Учитывая это, достаточно изучить подалгебры $L \subset A\tilde{P}(2,2)$, для которых $L \cap V = 0$.

Таблица 1

№ п/п	Тип разложения пространства	Максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$
1	$(++--)$	$AO(2,2)$
2	$(++-)(-)$	$AO(2,1) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$
3	$(+)(+--)$	$AO(1,2) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle$
4	$(++)(--)$	$AO(2) \oplus AO(2) = \langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{34} \rangle$
5	$(+)(+)(--)$	$AO(2) = \langle J_{34} \rangle$
6	$(++)(-)(-)$	$AO(2) = \langle J_{12} \rangle$

3. Подалгебры алгебры AO(2,2). Подалгебры алгебры $AO(2,2)$ изучены с точностью до $O(2,2)$-сопряженности в [9] на основе прямого разложения $AO(2,2) = AO(2,1) \oplus AO(2,1)$. В этом пункте классифицируем подалгебры алгебры $AO(2,2)$, используя другой подход, основанный на разбиении множества всех подалгебр алгебры $AO(2,2)$ на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом. Так как этот подход представляет самостоятельный интерес и может быть использован при изучении подалгебр алгебры $AO(2,n)$, $n > 2$, то остановимся на нем более подробно.

Найдем сначала все максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$, используя для этого тип разложения пространства V в прямую ортогональную сумму неприводимых подпространств. Пусть, например, L — максимальная подалгебра класса 0 алгебры $AO(2,2)$ и $V = V_1 \oplus V_2$ — прямая ортогональная сумма двух L-неприводнмых подпространств $V_1 = \langle P_1, P_2 \rangle$, $V_2 = \langle P_3, P_4 \rangle$. Будем говорить, что разложение пространства V относится к типу $(++)(--)$. Очевидно, подалгебра L совпадает с алгеброй $\langle J_{12} \oplus J_{34} \rangle$. Все максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$ приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что если подалгебра $L \subset AO(2,2)$ изотропного ранга 0 не является максимальной, то она либо неприводима, а потому сопряжена с алгеброй $\langle J_{25}+J_{34}, J_{24}-J_{35}, J_{23}-J_{45}, J_{23}\rangle$ [10], либо является подпрямой суммой подалгебр J_{23} и J_{45}. Во втором случае $L=\langle J_{23}+\gamma J_{45}\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}[1,-1,1,1]$, отображает L на $\langle J_{23}-\gamma J_{45}\rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $\gamma>0$. Если $\gamma=1$, то алгебра $J_{23}+J_{45}$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $\langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$, что противоречит предположению об L. Таким образом, $L=\langle J_{12}+\gamma J_{34}\rangle$; $\gamma>0$, $\gamma\neq 1$.

Перейдем к рассмотрению подалгебр $L\subset AO(2,2)$ изотропного ранга 2. В силу теоремы Витта можно считать, что L оставляет инвариантным подпространство $V_{(2)}=\langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$. Все такие подалгебры L содержатся в максимальной подалгебре $A\mathrm{Opt}(1,1)$ класса 2, которая является нормализатором в $AO(2,2)$ вполне изотропного подпространства $V_{(2)}$. Отсюда следует, что базис алгебры $AOpt(1,1)$ образуют матрицы $A_1=-J_{14}+J_{23}$, $T=J_{12}-J_{24}+J_{13}-J_{34}$, $A_2=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}-J_{13}-J_{24})$, $A_3=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}+J_{13}+J_{24})$, $D=J_{14}+J_{24}$. Очевидно, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle = ASL(2,R)$, $SL(2,R)\oplus\langle D\rangle = AGL(2,R)$ и $\langle T\rangle\oplus AGL(2,R)=AOpt(1,1)$. Базисные элементы алгебры $\langle N_1,N_2,Y_1,Y_2\rangle\oplus AOpt(1,1)$, где $N_1=P_1+P_4$, $N_2=P_2+P_3$, $Y_1=P_1-P_4$, $Y_2=P_2-P_3$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{array}{llll}
[A_1,A_2]=2A_2, & [A_1,A_3]=-2A_3, & [A_1,N_1]=N_1, & [A_2,N_2]=-N_2,\\
[A_1,Y_1]=-Y_1, & [A_2,A_3]=-A_1, & [A_2,N_2]=N_1, & [A_2,Y_1]=-Y_2,\\
[A_3,N_1]=-N_2, & [D,T]=-2T, & [D,N_1]=-N_1, & [D,N_2]=-N_2,\\
[D,Y_1]=Y_1, & [T,Y_1]=-2N_2 & &
\end{array}$$

(нулевые коммутаторы опущены).

Введем новые переменные $y_1=x_1+x_4$, $y_2=x_1-x_4$, $y_3=x_2+x_3$, $y_4=x_2-x_3$. Тогда алгебра $V\notin AOpt(1,1)$ реализуется следующими дифференциальными операторами первого порядка:

$$\begin{gathered}
A_1=-y_1\frac{\partial}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial}{\partial y_3}-y_4\frac{\partial}{\partial y_4},\quad A_2=-y_3\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_4},\\
A_3=-y_4\frac{\partial}{\partial y_2}+y_1\frac{\partial}{\partial y_3},\quad D=-y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial}{\partial y_3}-y_4\frac{\partial}{\partial y_4},\\
T=-2y_4\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial}{\partial y_3},\quad N_1=2\frac{\partial}{\partial y_1},\quad N_2=2\frac{\partial}{\partial y_3},\quad Y_1=2\frac{\partial}{\partial y_2},\\
Y_2=2\frac{\partial}{\partial y_4}.
\end{gathered}$$

Классифицируем подалгебры алгебры $AOpt(1,1)$ с точностью до $O(2,2)$-сопряженности. Эта задача решается в четыре этапа.

1. Подалгебры алгебры $ASL(2,R)$. Известно, что $ASL(2,R)$ содержит с точностью до $SL(2,R)$-сопряженности только следующие подалгебры: O, $\langle A_1\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_2+A_3\rangle$, $\langle A_1,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$.

2. Подалгебры алгебры $ASL(2,R)\oplus\langle D\rangle$. Применяя теорему Ли–Гурса о подалгебрах прямой суммы двух алгебр Ли, получаем с точностью до $GL(2,R)$-сопряженности следующие подалгебры алгебры $ASL(2,R)\oplus\langle D\rangle$: O, $\langle D\rangle$, $\langle A_1+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1,D\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3+D\rangle$, $\langle A_3,D\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3,D\rangle$, $\langle A_1+\alpha D,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_3,D\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3,D\rangle$.

3. Подалгебры алгебры $AOpt(1,1) = \langle T\rangle \oplus AGL(2,R)$. Проводим классификацию подалгебр алгебры $AOpt(1,1)$ с точностью до $O(2,2)$-автоморфизмов, сохраняющих $\langle N_1, N_2\rangle$. Получаем такие подалгебры: O, $\langle T\rangle$, $\langle D\rangle$, $\langle D,T\rangle$, $\langle A_1+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1+T\rangle$, $\langle A_1+\alpha D, T\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1+D, 2A_3\pm T\rangle$, $\langle A_1, D\rangle$, $\langle A_1, D, T\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3\pm T\rangle$, $\langle A_3, T\rangle$, $\langle A_3+D\rangle$, $\langle A_3+D, T\rangle$, $\langle A_3, D\rangle$, $\langle A_3, D, T\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3\pm T\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D, T\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3, D\rangle$, $\langle A_2, A_3, D, T\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, T\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, D\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, D, T\rangle$.

4. На этом этапе выделяется задача классификации подалгебр алгебры $AOpt(1,1)$, полученных в предыдущем пункте, с точностью до $O(2,2)$-сопряженности. Для решения указанной задачи рассмотрим следующие вполне изотропные подпространства V: $S_1 = \langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$, $S_2 = \langle P_1+P_4, P_2-P_3\rangle$, $S_3 = \langle P_1-P_4, P_2+P_3\rangle$, $S_4 = \langle P_1-P_4, P_2-P_3\rangle$. Обозначим через C_i следующие матрицы: $C_2 = \mathrm{diag}\,[1,1,-1,1]$, $C_3 = \mathrm{diag}\,[1,1,1,-1]$, $C_4 = \mathrm{diag}\,[1,1,-1,-1]$. Пусть φ_i — $O(2,2)$-автоморфизм алгебры $AO(2,2)$, порожденный матрицей C_i, $i=2,3,4$. Группу $\{\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}$, порожденную автоморфизмами φ_i, обозначим через G_2. Порядок группы G_2 равен 4. Пусть G_1 — группа $O(2,2)$-автоморфизмов, сохраняющая $\langle N_1, N_2\rangle$.

Предложение 2. *Если подалгебры $L_1, L_2\subset AOpt(1,1)$ сопряжены относительно группы $O(2,2)$-автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы $\{G_1, G_2\}$. Здесь $\{G_1, G_2\}$ — группа, порожденная группами G_1 и G_2.*

Доказательство. Отметим, что с точностью до сопряженности относительно группы G_1 существуют только следующие вполне изотропные подпространства ранга 2: S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть f — $O(2,2)$-автоморфизм отображающий алгебру $L_1\subset AOpt(1,1)$ на алгебру $L_2\subset AOpt(1,1)$. Подпространство $f^{-1}(S_1)$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. Нетрудно убедиться, что существует элемент θ группы G_1, отображающий $f^{-1}(S_1)$ на некоторое подпространство S_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, причем $\theta(L_1) = L_1$. Автоморфизм $f\theta$ отображает L_1 на L_2, а S_i на S_1. Таким образом, можно предполагать, что $f(L_1) = L_2$ и $f(S_i) = S_1$. Но тогда $f\in G_1$, если $i=1$, и $f = f_1\varphi_i$ для некоторого $f_1\in G_1$, если $i\neq 1$. Предположение доказано.

Таблица 2

	A_1	D	A_2	A_3	T
φ_2	D	A_1	$*$	$-\frac{1}{2}T$	$-2A_3$
φ_3	$-D$	$-A_1$	$-\frac{1}{2}T$	$*$	$-2A_2$
φ_4	$-A_1$	$-D$	A_3	A_2	$*$

Отметим, что при доказательстве предложения 2 установлено, что если $O(2,2)$-автоморфизм f отображает алгебру $L_1\subset AOpt(1,1)$ на алгебру $L_2\subset AOpt(1,1)$, то всегда можно считать, что $f = f_1\varphi$, где $f_1\in G_1$, а $\varphi\in G_2$.

Действия автоморфизмов $\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ на базис $\{A_1, A_2, A_3, D, T\}$ алгебры $AOpt(1,1)$ приведены в табл. 2, где символом $*$ обозначены элементы алгебры $AO(2,2)$, не содержащиеся в $AOpt(1,1)$, и потому не представляющие для нас интереса. Используя табл. 2, получаем следующее предложение.

Предложение 3. *Алгебра $AOpt(1,1)$ содержит с точностью до $O(2,2)$-сопряженности только следующие подалгебры:*

1) O; 2) $\langle T\rangle$; 3) $\langle A_1+\alpha D\rangle$, $0\le\alpha\le 1$; 4) $\langle D,T\rangle$;
5) $\langle A_1+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$, $d\ne 1$; 6) $\langle A_1+T\rangle$; 7) $\langle A_1,D\rangle$;
8) $\langle A_1,D,T\rangle$; 9) $\langle A_3\pm T\rangle$; 10) $\langle A_3,T\rangle$; 11) $\langle A_3+D,T\rangle$;
12) $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$, $\alpha\ge 0$; 13) $\langle A_2+A_3\pm T\rangle$;
14) $\langle A_2+A_3+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$; 15) $\langle A_2+A_3,D\rangle$;
16) $\langle A_2+A_3,D,T\rangle$; 17) $\langle A_1+D,2A_3\pm T\rangle$;
18) $\langle A_1+\alpha D,A_3,T\rangle$, $|\alpha|\le 1$; 19) $\langle A_1,A_3,D,T\rangle$; 20) $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$;
21) $\langle A_1,A_2,A_3,T\rangle$; 22) $\langle A_1,A_2,A_3,D\rangle$; 23) $\langle A_1,A_2,A_3,D,T\rangle$.

4. Подалгебры алгебры $AP(2,2)$. В настоящем пункте нашей задачей является описание с точностью до $P(2,2)$-сопряженности подалгебр $L\subset AP(2,2)$ ранга 2 и 3, удовлетворяющих условию $L\cap V=0$. Используя описание подалгебр алгебры $AO(2,2)$, изложенное в предыдущем пункте, приходим к следующему результату.

Таблица 3

№ п/п	Алгебра	Ранг алгебры	Нормализатор алгебры в $A\tilde{P}(2,2)$
1	$L_1=AO(2,2)$	3	$L_1\oplus\langle S\rangle$
2	$L_2=\langle 3A_1+D,T+Y_1,A_3\rangle$	3	$L_2\oplus\langle 3S-D\rangle$
3	$K_1=\langle D,T\rangle$	2	$K_1\oplus\langle A_1,A_2,A_3\rangle$
4	$K_2=\langle A_1+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$, $\alpha\ne 1$	2	$K_2\oplus\langle S,D\rangle$
5	$K_3=\langle A_1,D\rangle$	2	$K_3\oplus\langle S\rangle$
6	$K_4=\langle A_3+D,T\rangle$	2	$K_4\oplus\langle S,D\rangle$
7	$K_5=\langle A_2+A_3+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$	2	$K_5\oplus\langle S\rangle$
8	$K_6=\langle A_2+A_3,D\rangle$	2	$K_6\oplus\langle S\rangle$
9	$K_7=\langle A_1-D,A_3,T\rangle$	2	$K_7\oplus\langle 3,D,N_2\rangle$
10	$K_8=\langle 3A_1+D,T+Y_1\rangle$	2	$K_8\oplus\langle 3S-D\rangle$
11	$K_9=\langle A_1+D+N_1,T\rangle$	2	$K_9\oplus\langle S+D,N_1\rangle$
12	$K_{10}=\langle A_3+N_1,T\rangle$	2	$K_{10}\oplus\langle S+D,A_1+3D,N_2\rangle$
13	$K_{11}=\langle A_3+N_1,T+\varepsilon Y_1\rangle$, $\varepsilon=\pm 1$	2	$K_{11}\oplus\langle 2S-A_1-D,N_2\rangle$
14	$K_{12}=\langle J_{12},J_{34}\rangle$	2	$K_{12}\oplus\langle S\rangle$
15	$K_{13}=\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$	2	$K_{13}\oplus\langle S\rangle$
16	$K_{14}=\langle J_{23},J_{24},J_{34}\rangle$	2	$K_{14}\oplus\langle S\rangle$
17	$K_{15}=\langle A_1+D+Y_1-\varepsilon N_1,2A_3+\varepsilon t\rangle$,	2	$K_{15}\oplus\langle Y_1-\varepsilon N_1\rangle$
	$\varepsilon=\pm 1$	2	

Предложение 4. *Пусть L — не расщепляемая подалгебра алгебры $AO(2,2)$, $L\cap V=0$ и $\dim L>1$. Тогда L $P(2,2)$-сопряжена одной из следующих подалгебр:*

1) $\langle 3A_1+D,T+Y_1\rangle$; 2) $\langle A_1+D+N_1,T\rangle$; 3) $\langle A_3+N_1,T\pm Y_1\rangle$;
4) $\langle A_3+N_1,T\rangle$; 5) $\langle 3A_1+D,T+Y_1,A_3\rangle$;
6) $\langle A_1-D+N_2,A_3,T\rangle$; 7) $\langle A_1+D+Y_1\pm N_1,2A_3\mp T\rangle$.

Используя предложения 3 и 4, получаем классификацию с точностью до $P(2,2)$-сопряженности максимальных подалгебр $L \cap AP(2,2)$ ранга 2 и 3, удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$. Результаты приведены в табл. 3.

5. Максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. В настоящем пункте определяем максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, не содержащиеся в $AP(2,2)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V = 0$. Центральное место занимает следующее предложение.

Предложение 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга r алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Тогда $L \subset AP(2,2)$ или $L = K \oplus \langle S' \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $r-1$ алгебры $AP(2,2)$, $S' = S + X$, $X \in AP(2,2)$.*

Предложение 5 доказывается на основе теоремы об универсальном инварианте.

Используя предложение 5 и табл. 3, находим список максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, имеющих нулевое пересечение с пространством V и не содержащихся в $AP(2,2)$.

Теорема 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 или 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$ и $L \cap V = 0$. Тогда L $\tilde{P}(2,2)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = AO(2,2) \oplus \langle S \rangle$;
2) $L_{2,1} = L_2 \oplus \langle 3S - D \rangle$;
3) $K_{1,1} = K_1 \oplus \langle S + \alpha A_1 \rangle$, $\alpha \geq 0$;
4) $K_{1,2} = K_1 \oplus \langle S + \alpha(A_2 + A_3) \rangle$, $\alpha > 0$;
5) $K_{1,3} = K_1 \oplus \langle S + A_3 \rangle$;
6) $K_{2,1} = K_2 \oplus \langle S + \beta D \rangle$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$;
7) $K_{3,1} = K_3 \oplus \langle S \rangle$;
8) $K_{4,1} = K_4 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
9) $K_{5,1} = K_5 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
10) $K_{6,1} = K_6 \oplus \langle S \rangle$;
11) $K_{7,1} = K_7 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
12) $K_{7,2} = K_7 \oplus \langle S + D + N_2 \rangle$;
13) $K_{8,1} = K_8 \oplus \langle 3S - D \rangle$;
14) $K_{9,1} = K_9 \oplus \langle S + D + \beta N_1 \rangle$;
15) $K_{10,1} = K_{10} \oplus \langle S + D + N_2 \rangle$;
16) $K_{10,2} = K_{10} \oplus \langle S + \alpha A_1 + (1 + 3\alpha) D \rangle$;
17) $K_{10,3} = K_{10} \oplus \langle 2S - A_1 - D \rangle$;
18) $K_{11,1} = K_{11} \oplus \langle 2S - A_1 - D \rangle$ $(\varepsilon = \pm 1)$;
19) $K_{12,1} = K_{12} \oplus \langle S \rangle$;
20) $K_{13,1} = K_{13} \oplus \langle S \rangle$;
21) $K_{14,1} = K_{14} \oplus \langle S \rangle$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1983, 336 с.
2. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.87, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 48 с.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The summetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'AIembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
4. Баранник Л.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.
5. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
6. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.

7. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I, *Укр. мат. журн.*, 1988, **40**, № 4, 411–416.

8. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, № 5, 579–584.

9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

10. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.