Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК

Описаны максимальные подалгебры L ранга n расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$, где $V = \langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle$ — пространство трансляций. Построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция уравнений Даламбера и Лиувилля по каждой из них, и найдены широкие классы точных решений данных уравнений.

Настоящая статья является продолжением [1].

6. Максимальные подалгебры ранга n алгеры $A\tilde{P}(1,n)$. Опишем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащиеся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$. Центральное место занимает следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга r, $2 \le r \le n$, алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если $L \not\subset AP(1,n)$, то $L = K \oplus \langle S'\rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $r-1$ алгебры $AP(1,n)$, а $S' = S + X$, $X \in AP(1,n)$.*

Таблица 1

Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$	Нормализатор алгебры в $A\tilde{P}(1,n)$
$L_1 = AE(n-1)$	$L_1 \oplus \langle J_{0n}, P_0, P_n, S\rangle$
$L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l)$	$L_2 \oplus \langle S\rangle$
$L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_3 \oplus \langle J_{0n}, P_0 + P_n, S\rangle$
$L_4 = \langle J_{0n}\rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_4 \oplus \langle S\rangle$
$L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-2)$	$L_5 \oplus \langle S, P_{l+1}\rangle$
$L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1, l_2) \oplus AE(n-l-1)$	$L_6 \oplus \langle S\rangle$
$L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n\rangle \oplus AE(n-2)$	$L_7 \oplus \langle J_{0n} - 2S\rangle$
$L_8 = \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_t \oplus AE(n-\sigma-r_t-1)$	$L_8 \oplus \langle J_{0n} - 2S\rangle$
$L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1\rangle \oplus AE(n-2)$	L_9
$L_{10} = (A\tilde{E}'(l) \oplus \langle J_{0n} + dP_{l+1}\rangle) \oplus AE(n-l-2)$	L_{10}
$L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_0\rangle \oplus AE(n-2)$	L_{11}

Предложение 3 легко доказывается на основании теоремы об универсальном инварианте. Из этого предложения вытекает, что описание максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$, сводится к нахождению всех расширений максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle S + X\rangle$, $X \in AP(1,n)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть K — произвольная максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. Из табл. 1 вытекает, что ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ представляется в виде $K \oplus F$, где F — подалгебра. Следовательно, максимальная подалгебра L ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, содержащая K, является полупрямой суммой $L = K \oplus \langle S + X\rangle$, где $S + X \in F$. Пусть $L' = K \oplus \langle S + X'\rangle$,

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 12, С. 1693–1700.

$S + X' \in F$, — какая-нибудь другая максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 4. *Две подалгебры $L = K \oplus \langle S + X \rangle$ и $L' = K \oplus \langle S + X' \rangle$ $\tilde{P}(1,n)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\langle S + X \rangle$ и $\langle S + X' \rangle$ сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры F.*

Из предложений 3 и 4 вытекает следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга n алгебры $AP(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$.

1) Проводим классификацию всех максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-сопряженности.

2) Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1,n)$ ранга $n-1$ находим ее нормализатор $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,n)} K$ в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ (см. табл. 1). Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,n)} K = K \oplus F$.

3) Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов всех одномерных подалгебр алгебры F с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$.

4) Если $\langle S + X_1 \rangle, \ldots, \langle S + X_t \rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры F, то $K_1 = K \oplus \langle S + X_1 \rangle, \ldots, K_t = K \oplus \langle S + X_t \rangle$ — все максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, являющиеся расширениями подалгебры K.

Используя указанный алгоритм и результаты, изложенные в п. 5, находим список максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Тогда L сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = L_1 \oplus \langle S \rangle$;
2) $L_{1,2} = L_1 \oplus \langle J_{0n} + \alpha S \rangle \quad (\alpha \neq 0)$;
3) $L_{1,3} = L_1 \oplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$;
4) $L_{2,1} = L_2 \oplus \langle S \rangle$;
5) $L_{3,1} = L_3 \oplus \langle S \rangle$;
6) $L_{3,2} = L_3 \oplus \langle J_{0n} + \alpha S \rangle \quad (\alpha \neq 0)$;
7) $L_{3,3} = L_3 \oplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$;
8) $L_{4,1} = L_4 \oplus \langle S \rangle$;
9) $L_{5,1} = L_5 \oplus \langle S \rangle$;
10) $L_{6,1} = L_6 \oplus \langle S \rangle$;
11) $L_{7,1} = L_7 \oplus \langle J_{0n} - 2S \rangle$;
12) $L_{8,1} = L_8 \oplus \langle J_{0n} - S \rangle$.

Введем далее в рассмотрение расширенную алгебру Евклида $A\tilde{E}(n)$, обладающую базисом $J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b$, $P_a = \partial_a$, S_1, где $S_1 = -x^a \partial_a + 2\partial_u$ или $S_1 = -x^a \partial_a + \frac{2u}{k-1}\partial_u$; $a, b = 1, \ldots, n$. Генераторы поворотов J_{ab} порождают ортогональную алгебру $AO(n)$. Используя указанный выше алгоритм, приходим к следующим результатам.

Предложение 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{E}(3)$. Тогда L $\tilde{E}(3)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{12}, S_1 \rangle$;
2) $L_2 = \langle P_3, S_1 \rangle$;
3) $L_3 = \langle J_{12} + cS_1, P_3 \rangle \quad (c > 0)$;
4) $L_4 = \langle J_{12}, P_1, P_2 \rangle$;
5) $L_5 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$;
6) $L_6 = \langle J_{12}, P_3 \rangle$.

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{E}(4)$ и $L \cap \langle P_1, \ldots, P_n \rangle = 0$. Тогда L $\tilde{E}(4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

$$1)\quad L_1 = \langle J_{12}, J_{34}, S_1 \rangle; \qquad 2)\quad L_2 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S_1 \rangle; \qquad 3)\quad L_3 = AO(4).$$

7. Редукция и точные решения уравнения Лиувилля. В настоящем пункте подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,n)$ и $A\tilde{E}(n)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1) при $F(u) = \lambda \exp u$. Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и подпространство $L \cap V$ изотропно. В силу теоремы Витта можно предполагать, что $P_0 + P_1 \in L \cap V$. Тогда любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$, и потому

$$u_{11} + \cdots + u_{n-1,n-1} - \lambda \exp u = 0. \tag{7}$$

Таким образом, указанный случай сводится к рассмотрению уравнения (7) в евклидовом пространстве R_{n-1}. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (7) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n-1)$, обладающая базисом $J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b$, $P_a = \partial_a$, $S_1 = -x^a \partial_a + 2\partial_u$; $a, b = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, подалгебры алгебры $A\tilde{E}(n-1)$ можно использовать для поиска инвариантных решений уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Для иллюстрации остановимся подробно на случае $n = 4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 5; запись $L\colon f_1, \ldots, f_n$ будет означать, что функции $f_1, \ldots, f_n$ образуют полную систему инвариантов алгебры L:

$$\begin{aligned}
&L_1\colon\ \ \omega' = u + 2\ln x_3, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2};\\
&L_2\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};\\
&L_3\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + c\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};\\
&L_4\colon\ \ \omega' = u, \quad \omega = x_3;\\
&L_5\colon\ \ \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;\\
&L_6\colon\ \ \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2.
\end{aligned}$$

Анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\omega(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
&L_1\colon\ \ 4(\omega + \omega^2)\ddot{\varphi} + (6\omega + 4)\dot{\varphi} - 2 - \lambda \exp\varphi = 0;\\
&L_2, L_4\colon\ \ \ddot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0; \qquad L_3\colon\ \ (4_c^2)\ddot{\varphi} - \lambda \exp\varphi = 0;\\
&L_5\colon\ \ 4\omega\ddot{\varphi} + 6\dot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0; \qquad L_6\colon\ \ 4\omega\ddot{\varphi} + 4\dot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим, например, уравнение $\ddot{\varphi} - \lambda_1 \exp\varphi = 0$, $\lambda_1 = \lambda/(4 + c^2)$. Оно имеет следующие решения [2]:

$$\varphi = \ln\left\{\frac{C_1}{2\lambda_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{C_1}}{2}(\omega + C_2)\right]\right\}, \qquad C_1 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad C_2 \in R,$$

$$\varphi = \ln\left\{\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)}{\lambda_1[1 - C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)]^2}\right\}, \qquad C_1 > 0, \quad \lambda_1 C_2 > 0,$$

$$\varphi = -\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\omega + C\right)^2.$$

Следовательно, получаем такие решения уравнения (1):

$$u = \ln\left\{\frac{\theta_1}{2\lambda_1\omega_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{\theta_1}}{2}(\omega+\theta_2)\right]\right\},$$
$$u = \ln\left\{\frac{2\theta_1\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega}{\lambda_1\omega_1[1-\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega]^2}\right\},$$
$$u = -\ln\left\{\omega_1\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\omega+\theta_2\right)^2\right\},$$

где $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\theta_1 = \theta_1(x_0 - x_4)$ и $\lambda_1\theta_3 = \lambda_1\theta_3(x_0 - x_4)$ — положительно определенные дифференцируемые функции от переменной $x_0 - x_4$, $\theta_2 = \theta_2(x_0 - x_4)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной $x_0 - x_4$.

Пусть далее L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и подпространство $L \cap V$ не вырождено. С учетом рассмотренного случая можно предполагать, что $L \cap V = \langle P_0\rangle$ или $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$. Если $L \cap V = \langle P_0\rangle$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, не зависит от x_0, и потому

$$u_{11} + \cdots + u_{nn} - \lambda\exp u = 0. \tag{8}$$

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (8) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n)$. Поэтому подалгебры L алгебры $A\tilde{E}(n)$, удовлетворяющие условию $L \cap \langle P_1, \dots, P_n\rangle = 0$, можно использовать для поиска решений уравнения (8), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим случай $n = 4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 6:

$$L_1\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2},$$
$$L_2\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2},$$
$$L_3\colon\ \ \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Применяя анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, редуцируем уравнение (8) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_1\colon\ \ 4\omega^2(1+\omega)\ddot\varphi + 4\omega(1+\omega)\dot\varphi - \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$L_2\colon\ \ 4\omega^2(1+\omega)\ddot\varphi + 6\omega(1+\omega)\dot\varphi - 2 - \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$L_3\colon\ \ 4\omega\ddot\varphi + 8\dot\varphi - \lambda\exp\varphi = 0.$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (8), а значит, и уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$. Будем предполагать, что L не содержится в $AP(1,n)$ и ее ранг равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4:

$$L_{1,1}\colon\quad \omega' = u + 2\ln(x_0+x_n),\quad \omega = x_0/x_n,$$

$$L_{1,2}\colon\quad \omega' = u - \frac{2\alpha}{1-\alpha}\ln(x_0+x_n),\quad \omega = (1+\alpha)\ln(x_0+x_n)+(1-\alpha)\ln(x_0-x_n),$$

$$L_{1,3}\colon\quad \omega' = u + \ln(x_0-x_n),\quad \omega = x_0+x_n+\ln(x_0-x_n),$$

$$L_{2,1}\colon\quad \omega' = u + 2\ln x_0,\quad \omega = \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_l^2}{x_0^2},$$

$$L_{3,1}\colon\quad \omega' = u + 2\ln(x_0-x_n),\quad \omega = \frac{\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}}{x_0-x_n},$$

$$L_{3,2}\colon\quad \omega' = u + \ln\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right),$$
$$\omega = \delta\ln\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)-\ln(x_0-x_n),$$

$$L_{3,3}\colon\quad \omega' = u + \ln(x_0-x_n),\quad \omega = \frac{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2}{x_0-x_n}+\ln(x_0-x_n),$$

$$L_{4,1}\colon\quad \omega' = u + \ln\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right),\quad \omega = \frac{x_1^2+\cdots+x_l^2}{x_0^2-x_n^2},$$

$$L_{5,1}\colon\quad \omega' = u + 2\ln x_{l+1},\quad w = \frac{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2}{x_{l+1}^2},$$

$$L_{6,1}\colon\quad \omega' = u + \ln\left(x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2\right),\quad \omega = \frac{x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_{l_1}^2-x_n^2},$$

$$L_{7,1}\colon\quad \omega' = u + 2\ln\left[(x_0-x_n)^2-4x_1\right],$$
$$\omega = \frac{\left[(x_0-x_n)^2-4x_1\right]^3}{\left[6(x_0+x_n)-6x_3(x_0-x_n)+(x_0-x_n)^3\right]^2},$$

$$L_{8,1}\colon\quad \omega' = u + \ln\left[-x_0^2+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_1}\left(x_1^2+\cdots+x_{r_1}^2\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_t}\left(x_{\sigma+1}^2+\cdots+x_{\sigma+r_t}^2\right)+x_n^2\right],\qquad \omega = x_0-x_n.$$

Анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение Лиувилля к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{1,1}\colon\quad (1+\omega)^2(1-\omega^2)\ddot\varphi - 2\omega(1+\omega)^2\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{1,2}\colon\quad 4(1-\alpha^2)\exp(-\omega)\ddot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{1,3}\colon\quad 4\ddot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{2,1}\colon\quad 4\omega(\omega-1)\ddot\varphi + (6\omega-2l)\dot\varphi + 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{3,1}\colon\quad 4\omega^3\ddot\varphi + 2\omega^2(2+l)\dot\varphi - \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{3,2}\colon\quad 4\delta(\delta-1)\ddot\varphi + 2\delta l\dot\varphi - 2l + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{3,3}\colon\quad 4\ddot\varphi + 2l\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{4,1}\colon\quad 4\omega^2(\omega-1)\ddot\varphi + (4\omega^2-2l\omega)\dot\varphi - 2l - 4 + \lambda\exp\varphi = 0,$$
$$L_{5,1}\colon\quad 4\omega(1-\omega)\ddot\varphi + (4+2l-6\omega)\dot\varphi - 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{6,1}\colon\quad 4\omega(1-\omega)\ddot\varphi+(4+2l_1+2l_2\omega-8\omega)\dot\varphi+2l_2-4+\lambda\exp\varphi=0,$$
$$L_{7,1}\colon\quad 144\omega^2(\omega-1)\ddot\varphi+24\omega(9\omega-4)\dot\varphi-32+\lambda\exp\varphi=0,$$
$$L_{8,1}\colon\quad \left(1+\frac{\omega}{\omega+\lambda_1}+\cdots+\frac{\omega}{\omega+\lambda_t}\right)-\lambda\exp\varphi=0.$$

Используя редуцированные уравнения, соответствующие подалгебрам $L_{4,1}$ и $L_{3,2}$, получаем такие решения уравнения Лиувилля:

$$L_{4,1}\colon\quad u=\ln\frac{4-2l}{\lambda\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right)},$$
$$L_{3,2}(\delta=0)\colon\quad u=\ln\frac{2l}{\lambda\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)},$$
$$L_{3,2}(\delta=1)\colon u=-\ln\left\{\left(-\frac{\lambda}{2Cl}\right)\left[x_0-x_n-C\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right]\right\}.$$

8. Редукция и точные решения уравнения Даламбера. В настоящем пункте подалгебры алгебры $A\tilde P(1,n)$ используются для поиска инвариантных решений нелинейного уравнения (1) при $F(u)=\lambda u^k$. Следуя п. 7, мы должны рассмотреть три случая в зависимости от структуры пространства $L\cap V$, где L — подалгебра алгебры $A\tilde P(1,n)$. Рассмотрим один из этих случаев, а именно: будем предполагать, что $L\not\subset AP(1,n)$, $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$ и ранг L равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4, за исключением подалгебр $L_{1,i}$, $i=1,2,3$; $L_{7,1}$ и $L_{8,1}$:

$$L_{2,1}\colon\quad \omega'=\frac{u}{x_0^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_l^2}{x_0^2},$$
$$L_{3,1}\colon\quad \omega'=\frac{u}{(x_0-x_n)^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}}{x_0-x_n},$$
$$L_{3,2}\colon\quad \frac{u}{\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/(1-k)}},$$
$$\omega=\delta\ln\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)-\ln(x_0-x_n),$$
$$L_{3,3}\colon\quad \omega'=\frac{u}{(x_0-x_n)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2}{x_0-x_n}+\ln(x_0-x_n),$$
$$L_{4,1}\colon\quad \omega'=\frac{u}{\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_1^2+\cdots+x_l^2}{x_0^2-x_n^2},$$
$$L_{5,1}\colon\quad \omega'=\frac{u}{x_{l+1}^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2}{x_{l+1}^2},$$
$$L_{6,1}\colon\quad \omega'=\frac{u}{\left(x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2\right)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_{l_1}^2-x_n^2}.$$

Применяя анзац $\omega'=\varphi(\omega)$, редуцируем уравнение Даламбера к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{2,1}\colon\quad 4(\omega^2-\omega)\ddot\varphi+\left(-\frac{8}{1-k}+6\omega-4l\right)\dot\varphi+\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$
$$L_{3,1}\colon\quad -\ddot\varphi+\frac{4+l(1-k)}{1-k}\frac{1}{\omega}\dot\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{3,2}\colon\quad 4\delta(\delta-1)\ddot\varphi+\left(\frac{8\delta-4}{1-k}+2\delta l\right)\dot\varphi+\left[\frac{4k}{(1-k)^2}+\frac{2(l+2)}{1-k}\right]\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{3,3}\colon\quad 4\ddot\varphi+\frac{4+2l-2lk}{1-k}\dot\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{4,1}\colon\quad 4\omega^2(1-\omega)\ddot\varphi+\left(-\frac{8}{1-k}+4\omega^2-2\omega l\right)\dot\varphi-\frac{2l(l-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{5,1}\colon\quad 4(\omega-\omega^2)\ddot\varphi+\left(\frac{8}{1-k}+2l+4-6\omega\right)\dot\varphi-\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{6,1}\colon\quad 4(\omega-\omega^2)\ddot\varphi+\left(\frac{8}{1-k}2l_1+4-8\omega+2\omega l_2\right)\dot\varphi- -\frac{2l_2(l-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Запишем некоторые точные решения уравнения Даламбера

$$L_{3,1}\colon\quad u^{-4/l}=\sigma(l)\left[\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}+C(x_0-x_n)\right]^2,$$

$$\sigma(l)=\frac{4\lambda}{l(l-2)},\quad k=\frac{4+l}{l},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta=0)\colon\quad u^{1-k}=\frac{\lambda(1-k)^2\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)}{2C\delta(k,l)}\frac{1-C(x_0-x_n)^{\sigma(k,l)/2}}{(x_0-x_n)^{\sigma(k,l)/2}},$$

$$\sigma(k,l)=l+2-kl,\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta=1)\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left[x_0-x_n-C\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right],$$

$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2C(l-lk+2)},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right),$$

$$\sigma(k,l)=-\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-lk+2)},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}\colon\quad u^{1-k}=\sigma_1(k,l)\frac{\left[(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}-C_0\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right]^2}{(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}},$$

$$\sigma_1(k,l)=\frac{\lambda(1-k^2)}{4C(1+k)(2+l-kl)},\quad \sigma_2(k,l)=\frac{4+l-kl}{2},$$

$$L_{3,3}\colon\quad u^{2/l}=\sigma(l)\frac{x_0-x_n}{\left[(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2)+(x_0-x_n)\{\ln(x_0-x_n)+C\}\right]^2},$$

$$k=\frac{2+l}{l},\quad \sigma(l)=-\frac{4l(l+1)}{\lambda},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{4,1}\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right),$$

$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-lk+2k)},\quad 1\le l\le n-1.$$

1. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.
2. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1971, 576 с.