# Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I

*В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК*

Введено понятие канонического разложения произвольной подалгебры алгебры $AO(1,n)$. С помощью этого разложения описаны все максимальные подалгебры $L$ ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ удовлетворяющие условию $L\cap V=\langle P_1,\dots,P_n\rangle$, где $V=\langle P_0,P_1,\dots,P_n\rangle$ — пространство трансляций.

**1. Введение.** Целью настоящей работы является применение групповых методов к нахождению точных решений нелинейного уравнения

$$\Box u+F(u)=0 \tag{1}$$

в пространстве Минковского $R_{1,n}$, где $\Box u=u_{00}-u_{11}-\dots-u_{nn}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$, $u\equiv u(x)$, $x=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in R_{1,n}$; $\mu,\nu=0,1,\dots,n$, $F(u)$ — гладкая функция. Уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,n)$. Ее алгебра Ли $AP(1,n)$ реализуется следующими операторами:

$$P_\mu=\partial_\mu,\quad J_{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}x_\alpha\partial_\nu-g^{\nu\alpha}x_\alpha\partial_\mu. \tag{2}$$

Будем предполагать, что $F(u)=\lambda u^k$ или $F(u)=\lambda\exp u$. Тогда максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является расширенная алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)=AP(1,n)\mathbin{\supset\!\!\!\!+}\langle S\rangle$, где $S=-x^\mu\partial_\mu+\frac{2u}{k-1}\partial_u$ при $F=\lambda u^k$ и $S=-x^\mu\partial_\mu+2\partial_u$ при $F=\lambda\exp u$ [1]. Генераторы поворотов $J_{\mu\nu}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, генераторы трансляций $P_\mu$ порождают коммутативный идеал $V$, причем $A\tilde{P}(1,n)=V\mathbin{+\!\!\!\!\subset} A\tilde{O}(1,n)$, где $A\tilde{O}(1,n)=AO(1,n)\oplus\langle S\rangle$. В [2, 3] описаны максимальные подалгебры ранга $n$ подалгебры $AP(1,n)$. В [4, 5] проведена редукция уравнения (1) по некоторым подалгебрам алгебр $A\tilde{P}(1,2)$ и $A\tilde{P}(1,3)$ и получен ряд его точных решений.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части работы определяется каноническое разложение произвольной подалгебры алгебры $AO(1,n)$. В п. 6 указанное разложение применяется к описанию максимальных подалгебр $L$ ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющих условию $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Во второй части работы решена задача описания максимальных подалгебр ранга $n$ расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$. В пп. 8 и 9 построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция уравнения (1) по каждой из них и найдены широкие классы точных решений.

**2. Основные понятия.** Пусть $R$ — поле вещественных чисел, $R_n$ — $n$-мерное арифметическое векторное пространство над $R$, $V$ — псевдоевклидово пространство типа $(1;n)$, состоящее из $(1+n)$-мерных столбцов, $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ — базис $V$,

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 11, С. 1552–1559.

элементы которого являются единичными столбцами. Обозначим через $O(1,n)$ группу псевдоортогональных преобразований пространства $V$. Будем предполагать, что $O(1,n)$ реализована в виде вещественных матриц порядка $n+1$. Тогда ее алгебра Ли $AO(1,n)$ состоит из всех вещественных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^T & A \end{pmatrix},$$

где $X \in R_n$, $A$ — кососимметрическая матрица порядка $n$, $X^T$ — матрица, транспонированная к $X$. Полагая $[\Delta, Z] = \Delta \cdot Z$, $[Z, Z'] = 0$ для произвольных $\Delta \in AO(1,n)$, $Z, Z' \in V$, превратим векторное пространство $V \dot{+} AO(1,n)$ в алгебру Ли, которая называется алгеброй Пуанкаре и обозначается $AP(1,n)$. Очевидно, $AP(1,n) = V \oplus AO(1,n)$. Алгебра $AP(1,n)$ является алгеброй Ли группы Пуанкаре $P(1,n)$, которая состоит из всех вещественных матриц порядка $n+2$ вида

$$\begin{pmatrix} B & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $B \in O(1,n)$, $Y \in V$. Следовательно, алгебра $AP(1,n)$ реализуется как алгебра квадратных матриц порядка $n+2$

$$\begin{pmatrix} \Delta & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in AO(1,n)$, $Z \in V$.

Пусть $E_{ik}$ — матрица порядка$n+2$, имеющая единицу на пересечении $i$-й строки и $k$-го столбца и нули на всех остальных местах $(i,k = 0,1,\ldots,n{+}1)$. Базис алгебры $AP(1,n)$ образуют матрицы $J_{0a} = -E_{0a} - E_{a0}$, $J_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$, $P_0 = E_{0,n+1}$, $P_a = E_{a,n+1}$ $(a < b;\ b = 1,2,\ldots,n)$. Алгебра $AP(1,n)$ изоморфна алгебре дифференциальных операторов (2), действующих в пространстве вещественных функций от переменной $x \in R_{1,n}$.

Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda B & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $B \in O(1,n)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in V$. Ее алгебра Ли $A\tilde{P}(1,n)$ является полупрямой суммой $AP(1,n) \oplus \langle S \rangle$, где $S = E_{00} + E_{11} + \cdots + E_{nn}$.

Пусть $G$ — подгруппа Ли группы $\tilde{P}(1,n)$, $AG = \langle X_1, \ldots, X_s \rangle$ — алгебра Ли группы $G$. Не постоянная функция $f(x,u)$, $x \in R_{1,n}$, называется инвариантом группы $G$, если $f(x,u)$ постоянна на $G$-орбите каждой точки $(x,u)$. Функция $f(x,u)$ является инвариантом $G$ тогда и только тогда, когда $X_i f(x,u) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,s$. Если $r$ — ранг алгебры $AG$ и $r < n+1$, то существует система $s_1 = n+1-r$ функционально независимых инвариантов $f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант $f$ группы $G$ можно выразить через инварианты $f_1,\ldots,f_{s_1}$, т.е. $f(x,u) = \psi(f_1(x,u),\ldots,f_s(x,u))$. Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы $G$ или алгебры $AG$.

Пусть $L_1$ и $L_2$ — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если для некоторого элемента $C \in \tilde{P}(1,n)$ подалгебры $CL_1C^{-1}$ и $L_2$ обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры $L_1$, $L_2$ будем называть эквивалентными [3, 6]. В классе всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра.

Подалгебра $L \subset AO(1,n)$ называется подалгеброй класса 0, если $V$ не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно $L$. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(1,n)$ принадлежит классу 1 или имеет изотропный ранг 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно $L$, равен 1. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра $L$ алгебры $AO(1,n)$ имеет изотропный ранг 0 или 1.

**3. Каноническое разложение подалгебры класса 0 алгебры $\boldsymbol{AO(1,n)}$.** В работе [7] определено каноническое разложение подалгебры класса 0 псевдоортогональной алгебры $AO(p,q)$. Так как оно играет важную роль в наших исследованиях, то рассмотрим это понятие применительно к алгебре $AO(1,n)$.

Пусть $F$ — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1,n)$. Тогда псевдоевклидово пространство $V$ разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых $F$-подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0}\rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0+1}, \ldots, P_{k_0+k_1}\rangle$, $\ldots$, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \cdots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = n$, $k_0 \geq 0$, $k_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь $V_0$ — псевдоевклидово пространство типа $(1;k_0)$, если $k_0 \neq 0$, $V_i$ — евклидово пространство размерности $k_i$, $i = 1, \ldots, s$. Обозначим через $O(V_i)$ группу изометрий пространства $V_i$, а через $AO(V_i)$ ее алгебру Ли. Если $J \in F$, то $\operatorname{ad} J$ можно рассматривать как линейное преобразование $\hat{J}_i$ пространства $V_i$. Матрица $\pi_i(J)$ преобразования $\hat{J}_i$ в базисе пространства $V_i$ содержится в $AO(V_i)$. Отображение $\pi_i : F \to AO(V_i)$. является гомоморфизмом, а $\pi_i(F)$ — неприводимой подалгеброй алгебры $AO(V_i)$. Так как отображение $J \to (\pi_0(J), \ldots, \pi_s(J))$ есть изоморфизм $F$ в алгебру $\pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F)$, то будем говорить, что $F$ разлагается относительно базиса $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ в подпрямое произведение алгебр $\pi_0(F), \ldots, \pi_s(F)$ записывать это так:

$$F = \pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F). \tag{3}$$

Пусть $F_i = \{J \in F' \mid \pi_j(J) = 0 \text{ для всех } j \neq i\}$, где $F' = \pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F)$. Легко видеть, что $F_i$ — подалгебра алгебры $F'$ наряду с разложением (3) мы имеем разложение $F = F_0 + \cdots + F_s$ алгебры $F$ в подпрямую сумму алгебр $F_0, \ldots, F_s$. В дальнейшем алгебры $F_0, \ldots, F_s$ будем называть неприводимыми частями алгебры $F$. Условимся алгебру $F_i$ отождествлять с алгеброй $\pi_i(F)$. В этом смысле будем говорить, что $F_i$ — неприводимая подалгебра алгебры $AO(V_i)$. Из работы [8] вытекает, что неприводимая часть $F_0$ совпадает с $AO(V_0)$.

Подалгебры $F_i$ и $F_j$ отличные от $F_0$, назовем эквивалентными, если $k_i = k_j$ и существует такая матрица $C \in O(V_i)$, что $C\pi_i(J)C^{-1} = \pi_j(J)$ для всех $J \in F$. Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве $\{F_0, F_1, \ldots, F_s\}$ является отношением эквивалентности, а потому оно проводит разбиение множества неприводимых частей алгебры $F$ на классы $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_t$. Класс $\mathfrak{U}_0$ существует только при $k_0 \geq 2$ и состоит в этом случае из одной подалгебры $F_0 = AO(V_0)$. Если $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_{r_i}} \in \mathfrak{U}_i$, то через $A_i$ обозначим подалгебру $(\pi_{m_1}+\cdots+\pi_{m_{r_i}})(F)$. Подалгебру $A_i$ назовем примарной частью алгебры $F$. Очевидно, $F$ является подпрямой суммой своих примарных частей. Разложение $F=A_0+\cdots+A_t$ будем называть каноническим разложением алгебры $F$. Если $F$ совпадает со своей примарной частью, то $F$ называется примарной алгеброй.

**Теорема 1 [7].** *Пусть $F$ — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1,n)$, $A_1,\ldots,A_t$ — примарные части $F$, $W\subset V$ — $F$-инвариантное подпространство. Тогда $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_t\oplus W'$, где $[A_i,W_i]=W_i$, $[A_i,W_j]=0$ при $i\neq j$, $[F,W']=0$ $(i,j=1,\ldots,t)$. Если примарная алгебра $A$ является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(V_1),AO(V_2),\ldots,AO(V_q)$, то с точностью до $O(1,n)$-сопряженности ненулевые подпространства $U$ пространства $V$ со свойством $[A,U]=U$ исчерпываются пространствами $V_1,V_1\oplus V_2,\ldots,V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_q$.*

**4. Каноническое разложение подалгебры класса 1 алгебры $AO(1,n)$.** В настоящем пункте речь идет о подалгебрах класса 1 алгебры $AO(1,n)$, проекция которых на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0. В п. 3 было определено каноническое разложение подалгебры $F$ класса 0 алгебры $AO(1,n)$. Это разложение позволило описать с точностью до $O(1,n)$-сопряженности все подпространства, инвариантные относительно $F$ и тем самым свести проблему классификации подалгебр класса 0 алгебры $AO(1,n)$ в некотором смысле к проблеме классификации неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k\leq n$. Естественно возникает задача определения подобного разложения для подалгебры $\Phi$ класса 1 алгебры $AO(1,n)$. Согласно работе [7] всегда можно предполагать, что подалгебра $\Phi$ оставляет инвариантным подпространство $V_{(1)}=\langle P_0+P_n,P_1,\ldots,P_{n-1}\rangle$. Указанное разложение подалгебры $\Phi$ связано с разложением пространства $V_{(1)}$ в ортогональную сумму подпространств. Это разложение пространства $V_{(1)}$ определяется следующей теоремой.

**Теорема 2.** *Пусть $\Phi$ — подалгебра класса 1 алгебры $AO(1,n)$. Пространство $V_{(1)}$ с точностью до $O(1,n)$-сопряженности является прямой ортогональной суммой $\Phi$-инвариантных подпространств $U$ и $W$, удовлетворяющих двум условиям:*

*1) пространство $U$ изотропно и является ортогональной суммой $U=U_1+\cdots+U_s$ $\Phi$-инвариантных подпространств $U_1=\langle P_0+P_n\rangle\oplus V_1,\ldots,U_s=\langle P_0+P_n\rangle\oplus V_s$, где $V_1=\langle P_1,\ldots,P_{k_1}\rangle,\ldots,V_s=\langle P_{\sigma+1},\ldots,P_{\sigma+k_s}\rangle$, $s\geq 1$, $\sigma=k_1+\cdots+k_{s-1}$; каждое из подпространств $U_i$ содержит только следующие $\Phi$-инвариантные подпространства: 0, $\langle P_0+P_n\rangle$, $U_i$;*

*2) пространство $W$ невырождено и является прямой ортогональной суммой подпространств $W_1=\langle P_{l_0+1},\ldots,P_{l_0+l_1}\rangle,\ldots,W_t=\langle P_{\delta+1},\ldots,P_{\delta+l_t}\rangle$, $t\geq 0$, $l_0=\sigma+k_s$, $\delta=l_0+\cdots+l_{t-1}$, $\sigma+l_t=n-1$. Каждое из подпространств $W_i$ неприводимо и инвариантно относительно $\Phi$.*

**Доказательство.** Пусть $W$ — максимальное невырожденное подпространство $V_{(1)}$ инвариантное относительно $\Phi$. Тогда $V_{(1)}=W\oplus U$, где $U=W^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $W$. Пусть $O(n-1)$ — ортогональная группа, действующая на пространстве $\langle P_1,\ldots,P_{n-1}\rangle$. Очевидно, $O(n-1)\subset O(1,n)$ и подпространство $V_{(1)}$ инвариантно относительно группы $O(n-1)$. Используя теорему Витта, приведем базис подпространства $W$ к виду $P_{l_0+1}+\alpha(P_0+P_n),\ldots,P_{n-1}+\beta(P_0+P_n)$. Подействовав на этот базис автоморфизмом $\exp(\alpha G_{l_0+1}+\cdots+\beta G_{n-1})$, получим базис $\{P_{l_0+1},\dots,P_{n-1}\}$. Таким образом, можно предполагать, что $W = \langle P_{l_0+1},\dots,P_{n-1}\rangle$. Но тогда $U = \langle P_0+P_n, P_1,\dots,P_{l_0}\rangle$. В частности, может быть $U = \langle P_0+P_n\rangle$.

Допустим, что $U \neq \langle P_0+P_n\rangle$. Пусть $U_1'$ — минимальное, отличное от $\langle P_0+P_n\rangle$, ненулевое Ф-инвариантное подпространство пространства $U$. Учитывая, что ортогональная группа $O(l_0)$ действующая на пространстве $\langle P_1,\dots,P_{l_0}\rangle$, оставляет $V_{(1)}$ инвариантным, получаем, что $U_1'$ $O(l_0)$-сопряжено, а значит, и $O(1,n)$-сопряжено с подпространством $U_1 = \langle P_0+P_n, P_1,\dots,P_{k_1}\rangle$. Очевидно, автоморфизм $\varphi$, отображающий $U_1'$ на $U_1$, не изменяет подпространства $W$. Подпространство $U$ разлагается в ортогональную сумму $U = U_1 + U_1^\perp$, где $U_1^\perp = \langle P_0+P_n, P_{k_1+1},\dots,P_{l_0}\rangle$. Применяя к подпространству $U_1^\perp$ рассуждения, приведенные выше для подпространства $U_1'$, получаем через конечное число шагов искомое разложение пространства $U$. Эти же рассуждения доказывают существование разложения для подпространства $W$, указанного в теореме. Теорема доказана.

Пусть $T_1 = \langle G_1,\dots,G_k\rangle,\dots,T_s = \langle G_{\sigma+1},\dots,G_{\sigma+k_s}\rangle$, где $G_\alpha = J_{0a} - J_{an}$, $a = 1,\dots,\sigma+k_s$, и пусть $AE'(U_i) = T_i \subset\!\!\!+ AO(V_i)$, $i = 1,\dots,s$. Алгебра $AE'(U_i)$ является, очевидно, алгеброй Евклида. Максимальная подалгебра $K$, для которой существует разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2, разлагается в прямую сумму подалгебр $AE'(U_i)$ и $AO(W_j)$, т.е.

$$K = AE(U_1)\oplus\cdots\oplus AE(U_s)\oplus AO(W_1)\oplus\cdots\oplus AO(W_t).$$

Пусть $L$ — любая другая подалгебра, обладающая указанным разложением пространства $V_{(1)}$. Тогда $L\subset K$ и $L$ является подпрямой суммой подалгебр $\bar\Phi_i \subset AE(U_i)$ и $F_j \subset AO(W_j)$. Очевидно, $F_j$ — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W_j)$, а $U_i$ содержит только следующие $\bar\Phi_i$-инвариантные подпространства: 0, $\langle P_0+P_n\rangle$, $U_i$. Алгебры $\bar\Phi_i$ и $F_j$ будем называть элементарными частями алгебры $L$ и записывать это так:

$$L = \bar\Phi_1 \dot+ \cdots \dot+ \bar\Phi_s \dot+ F_1 \dot+ \cdots \dot+ F_t. \tag{4}$$

Определим структуру каждой из подалгебр $\bar\Phi_i$. Так как в $U_i$ существует только одно нетривиальное подпространство $\langle P_0+P_n\rangle$, инвариантное относительно $\bar\Phi_i$, то проекция $\Phi_i$ алгебры $\bar\Phi_i$ на $AO(V_i)$ действует неприводимо на $V_i$. Следовательно, подалгебра $\Phi_i$ действует вполне приводимо на подпространстве $T_i$ и потому обладает только расщепляемым расширениями в алгебре $\bar\Phi_i$ [7]. Поэтому $\bar\Phi_i = T_i\oplus\Phi_i$.

Используем разложение (4) и введем понятие примарной части алгебры $L$. С этой целью рассмотрим два множества подалгебр $\mathfrak{M}_1 = \{\bar\Phi_1,\dots,\bar\Phi_s\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{F_1,\dots,F_t\}$. В п. 3 было определено отношение эквивалентности на множестве $\mathfrak{M}_2$, которое проводит разбиение $\mathfrak{M}_2$ на классы $\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_t$. Подалгебры $F_{k_1}, F_{k_2}, \dots, F_{k_{n_j}}$, входящие в класс $\mathfrak{U}_j$, определяют примарную часть $A_j(d_j;n_j)$, являющуюся подпрямой суммой подалгебр $F_{k_1}, F_{k_2},\dots,F_{k_{n_j}}$. Здесь $d_j$ — размерность подпространств $W_{k_1}, W_{k_2},\dots,W_{k_{n_j}}$.

Перейдем к определению примарных частей алгебры $L$, которые строятся на основе элементарных частей $\bar\Phi_i$. Обозначим через $\tau_i$ проектирование $L$ на $\bar\Phi_i$, а через $\Phi_{ij}$ алгебру $(\tau_i+\tau_j)(L)$ $(i\neq j;\ i,j = 1,\dots,s)$. Пусть $N$ — произвольное $L$-инвариантное подпространство $V_{(1)}$, $\theta_i$ — проектирование $N$ на $U_i$, и $N_{ij} =$

$(\theta_i+\theta_j)(N)$. Допустим, что $\theta_i(N)=U_i$, $\theta_j(N)=U_j$. Тогда имеет место следующее предложение.

**Предложение 1.** *Если подпространство $N_{ij}$ неразложимо в сумму подпространств $U_i$ и $U_j$, то $\bar{\Phi}_{ij}=(T_i\oplus T_j)\oplus(\Phi_i\dot{+}\Phi_j)$, где $\Phi_i\dot{+}\Phi_j$ — примарная подалгебра алгебры $AO(V_i\oplus V_j)$.*

Введем на множестве $\mathfrak{M}_1$ отношение эквивалентности следующим образом. Две подалгебры $\bar{\Phi}_i,\bar{\Phi}_j\in\mathfrak{M}_1$ будем называть эквивалентными, если $\bar{\Phi}_{ij}=(T_i\oplus T_j)\oplus(\Phi_i\dot{+}\Phi_j)$, где $\Phi_i\dot{+}\Phi_j$ — примарная подалгебра алгебры $AO(V_i\oplus V_j)$. Данное отношение проводит разбиение множества $\mathfrak{M}_1$ на классы $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_i$. Если $\Phi_{h_1},\ldots,\Phi_{h_{m_i}}\in\mathfrak{R}_i$, то через $B_i(r_i;m_i)$ обозначим подалгебру $B_i(r_i;m_i)=(\tau_{h_1}+\cdots+\tau_{h_{m_i}})(L)$. Здесь $r_i$ — размерность пространств $V_{h_1},\ldots,V_{h_{m_i}}$. Согласно этому определению примарная часть $B_i(r_i;m_i)$ имеет следующий вид:

$$B_i(r_i;m_i)=(T_{h_1}\oplus\cdots\oplus T_{h_{m_i}})\oplus(\Phi_{h_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\Phi_{h_{m_i}}),$$

где $\Phi_{h_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\Phi_{h_{m_i}}$ является примарной подалгеброй алгебры $AO(V_{h_1}\oplus\cdots\oplus V_{h_{m_i}})$. Таким образом, произвольная подалгебра $L$ класса 1 алгебры $AO(1,n)$, обладающая нулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$, разлагается в подпрямую сумму примарных подалгебр

$$L=B_1(r_1;m_1)\dot{+}\cdots\dot{+}B_t(r_t;m_t)\dot{+}A_1(d_1;n_1)\dot{+}\cdots\dot{+}A_s(d_s;n_s). \tag{5}$$

Если $t=0$, то в разложении (5) примарные части $B_i(r_i;m_i)$ отсутствуют и мы получаем следующее разложение подалгебры $L$:

$$L=A_1(d_1;n_1)\dot{+}\cdots\dot{+}A_s(d_s;n_s). \tag{6}$$

Разложения (5) и (6) будем называть каноническими разложениями алгебры $L$. Используя каноническое разложение алгебры $L$, нетрудно дать классификацию всех $L$-инвариантных подпространств пространства $V$ с точностью до $O(1,n)$-сопряженности.

**5. Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$.** Опишем все максимальные подалгебры $L$ ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющие условию $L\cap V=\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$. При описании таких подалгебр можно предполагать, что $L\cap V=0$. Обозначим через $\pi$ проектирование $AP(1,n)$ на $AO(1,n)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

**Предложение 2.** *Пусть $F$ — подалгебра класса 1 алгебры $AO(1,n)$, совпадающая со своей примарной частью $B_1(r_1;m_1)$, и $r_1>1$. Любая подалгебра $L\subset AP(1,n)$, удовлетворяющая условиям $\pi(L)=F$ и $L\cap V=0$, содержит подалгебру, которая $P(1,n)$-сопряжена подалгебре $L_1$ с базисом $G_1+\lambda_1P_1,\ldots,G_{r_1}+\lambda_1P_{r_1},\ldots,G_{(m_1-1)r_1+1}+\lambda_{m_1}P_{(m_1-1)r_1+1},\ldots,G_{m_1r_1}+\lambda_{m_1}P_{m_1r_1}$.*

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$AE(n-l-1)=\langle P_{l+1},\ldots,P_{n-1},J_{l+1,l+2},\ldots,J_{n-2,n-1}\rangle,\quad 0\le l\le n-2;$$
$$AO(l)=\langle J_{12},\ldots,J_{l-1,l}\rangle,\quad 2\le l\le n;$$
$$AO(l_1;l_2)=\langle J_{l_1+1,l_1+2},\ldots,J_{l_1+l_2-1,l_1+l_2}\rangle,\quad 0\le l_1<l_2,\ l_1+l_2\le n;$$

$$AE'(l) = \langle G_1, \dots, G_l, J_{12}, \dots, J_{l-1,l}\rangle;$$
$$A\tilde{E}'(l) = AE'(l) \oplus \langle J_{0n}\rangle;$$
$$\Phi_1(\lambda_1) = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \dots, G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}\rangle \oplus AO(r_1);$$
$$\Phi_2(\lambda_2) = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \dots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle \oplus AO(r_1; r_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Phi_t(\lambda_t) = \langle G_{\sigma+1} + \lambda_t P_{\sigma+1}, \dots, G_{\sigma+r_t} + \lambda_t P_{\sigma+r_t}\rangle \oplus AO(\sigma; r_t),$$

где $\sigma = r_1 + r_2 + \dots + r_{t-1}$.

**Теорема 3.** *Пусть $L$ — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$. Тогда $L$ $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AE(n-1)$;
2) $L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 1 < l < n$;
3) $L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 1 \le l \le n-1$;
4) $L_4 = \langle J_{0n}\rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 2 \le l \le n-1$;
5) $L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 2 \le l \le n-1$;
6) $L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1; l_2) \oplus AE(n-l-1), \quad l = l_1 + l_2$;
7) $L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n\rangle \oplus AE(n-2)$;
8) $L_8 = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \dots \oplus \Phi_t \oplus AE(n-\sigma-r_t-1)$;
9) $L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1\rangle \oplus AE(n-2)$;
10) $L_{10} = (AE'(l) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{l+1}\rangle) \oplus AE(n-l-2)$;
11) $L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_0\rangle \oplus AE(n-2)$.

**Доказательство.** Пусть $L$ — произвольная подалгебра класса 1 алгебры $AP(1,n)$ и $\pi(L) = F$ обладает каноническим разложением (5). Как уже отмечалось, можно предполагать, что $L \cap V = 0$. Рассмотрим подробно случай, когда проекция $L$ на $\langle J_{0n}\rangle$ равна нулю (остальные случаи рассматриваются аналогично). Допустим вначале, что все $r_i$ больше единицы. Согласно результатам, изложенным в п. 4, $B_1(r_1; m_1) = (T_1 \oplus \dots \oplus T_{m_1}) \oplus (\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_{m_1})$. Из предложения 2 вытекает, что $L$L содержит подалгебру $L_1 = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \dots, G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}$. Полная система инвариантов подалгебры $L_1$ состоит из функций $x_0 - x_n$,

$$\varphi(x) = -x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n - \lambda_1}\left(x_1^2 + \dots + x_{r_1}^2\right) + x_n^2,$$

$x_{r_1+1}, \dots, x_{n-1}$. Поэтому любой инвариант $f$ алгебры $L$ является функцией вида $f(x_0 - x_n, \varphi(x), x_{r_1+1}, \dots, x_{n-1})$. Так как каждая из этих функций $f$ является инвариантом подалгебры $AO(V_1) = \langle J_{12}, \dots, J_{r_1-1,r_1}\rangle$, то ввиду максимальности $L$ имеем $AO(V_1) \subset L$ и потому $m_1 = 1$. Следовательно, $\Phi_1 = AO(V_1)$ и подалгебра $K_1 = L_1 \oplus AO(V_1)$ выделяется прямым слагаемым в алгебре $L$, т.е. $L = K_1 \oplus L'$.

Рассмотрим далее примарную часть $B_2(r_2; m_2)$ алгебры $F$. Аналогичными рассуждениями доказываем, что $m_2 = 1$ и $L'$ содержит подалгебру $K_2 = L_2 \oplus AO(V_2)$, $L_2 = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \dots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle$, которая выделяется в $L'$ прямым слагаемым. Значит, $L = K_1 + K_2 \oplus L''$. Полная система инвариантов подалгебры $K_1 \oplus K_2$ состоит из функций $x_0 - x_n$ и

$$-x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_1}\left(x_1^2 + \cdots + x_{r_1}^2\right) + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_2}\left(x_{r_1+1}^2 + \cdots + x_{r_1+r_2}^2\right) + x_n^2,$$

$x_{r_1+r_2+1}, \ldots, x_{n-1}$. Через $t$ шагов получаем $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus \bar{L}$, где $K_i = L_i \oplus AO(V_i)$, $L_i = \langle G_{\sigma_i+1} + \lambda_i P_{\sigma_i+1}, \ldots, G_{\sigma_i+r_i} + \lambda_i P_{\sigma_i+r_i}\rangle$, $\sigma_i = r_1 + \cdots + r_{i-1}$, а $\bar{L} \subset \langle P_{\sigma+r_t+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle \oplus A_1(d_1; n_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A_s(d_s; n_s)$. Отсюда вытекает, что функции $x_0 - x_n$ и

$$\begin{aligned} &-x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_1}\left(x_1^2 + \cdots + x_{r_1}^2\right) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_t}\left(x_{\sigma+1}^2 + \cdots + x_{\sigma+r_t}^2\right) + x_n^2, \end{aligned}$$

являются инвариантами алгебры $L$. Так как полная система инвариантов алгебры $L$ состоит из двух инвариантов, то $s = 0$. Следовательно, из условия $L \cap V = 0$. получаем $\bar{L} = 0$ и $\sigma + r_t = n - 1$, т.е. алгебра $L$ относится к типу 8 теоремы 3.

Рассмотрим далее случай, когда $r_1 = 1$, а все остальные $r_i$ больше единицы. Так как подалгебры $K_i$, соответствующие примарным частям $B_i(r_i; m_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t-1$, выделяются прямыми слагаемыми в алгебре $L$, то достаточно ограничиться рассмотрением случая $t = 1$. Тогда $B_1(1; m_1) = \langle G_1, \ldots, G_{m_1}\rangle$ и алгебра $L$ содержит подалгебру $L_1$ с базисом

$$\begin{aligned} &X_1 = G_1 + d_{11}P_1 + \cdots + \alpha_{1,m_1}P_{m_1} + Y_1 + \gamma_1(P_0 - P_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X_{m_1} = G_{m_1} + \alpha_{m_1,1}P_1 + \cdots + \alpha_{m_1,m_1}P_{m_1} + Y_{m_1} + \gamma_{m_1}(P_0 - P_n), \end{aligned}$$

где $Y_1, \ldots, Y_{m_1} \in \bar{L} = \langle P_{m_1+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle \oplus A_1(d_1; n_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A_s(d_s; n_s)$, и в случае $m_1 > 1$ $[Y_i, Y_j] \in \langle P_{m_1+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle$, $i, j = 1, \ldots, m_1$. Очевидно, алгебра $L$ представляется в виде суммы $L = L_1 + L_A$, где $L_A$ — подпространство алгебры $\langle P_0 + P_n\rangle \oplus \bar{L}$. Поэтому функция $x_0 - x_n$ является инвариантом алгебры $L$. По условию ранг алгебры $L$ равен $n-1$, следовательно, $s = 0$ или $s = 1$.

Если $s = 1$, то $n_1 = 1$ и функция $x_{m_1+1}^2 + \cdots + x_{m_1+d_1}^2$ является инвариантом алгебры $L$. Так как инварианты $x_0 - x_n$ и $x_{m_1+1}^2 + \cdots + x_{m_1+d_1}^2$ алгебры $L$ функционально независимы, то из условия $L \cap V = 0$ получаем, что $m_1 + d_1 = n - 1$ и подалгебра $AO(W_1) = \langle J_{m_1+1,m_1+2}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle$ содержится в $L$. Таким образом, $Y_1 = \cdots = Y_{m_1} = 0$ и $L = L_1 \oplus AO(W_1)$. Ранг алгебры $L$ равен $n-2$, что противоречит условию. Следовательно, $s = 0$ и потому $m_1 = n - 1$. Очевидно $[X_i, X_j] = (\alpha_{ji} - \alpha_{ij})(P_0 - P_n) - 2\gamma_i P_i + 2\gamma_j P_j$. Так как $L \cap V = 0$, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\gamma_i = \gamma_j = 0$ и потому матрица $A = (\alpha_{ij})$ симметрическая. Но тогда существует такая ортогональная матрица $C \in O(m_1)$, что $CAC^{-1} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}]$. Отсюда следует, что с точностью до $P(1,n)$-сопряженности можно предполагать, что $X_1 = G_1 + \lambda_1 P_1, \ldots, X_{n-1} = G_{n-1} + \lambda_{n-1}P_{n-1}$. Поэтому алгебра $L$ имеет два функционально независимых инварианта $x_0 - x_n$ и

$$-x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_1}x_1^2 + \cdots + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_{n-1}}x_{n-1}^2 + x_n^2.$$

Таким образом, $L$ относится к типу 8 теоремы.

Если $n = 2$, то алгебра $L$ с точностью до $P(1,n)$-сопряженности содержит элемент $X_1 = G_1 + (P_0 - P_2)$ и потому $L = \langle G_1 + P_0 - P_2 \rangle$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.


1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
3. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре, Препринт 86.86, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 40 с.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
5. Баранник А.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.87, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 48 с.
8. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в сб. Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. ун-т, 1980, 86–115.