# О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$

*В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК*

Symmetry reduction of the nonlinear d'Alembert equation $\Box u + \lambda u^k = 0$ in the Minkowski space $R_{1,n}$ is studied. Some exact solutions of this equation are found.

Рассмотрим нелинейное уравнение д'Аламбера в псевдоевклидовом пространстве $R_{1,n}$ $(n > 1)$

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad (1)$$

где $\Box u = u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{nn}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u \equiv u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n)$.

Известно [1], что если $k \neq 1$, то максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является расширенная алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, обладающая базисом $J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0$, $J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b$, $P_\mu = \partial_\mu$, $S = -x^\mu\partial_\mu + \frac{2u}{k-1}\partial_u$ $(a, b = 1, \ldots, n)$. Генераторы поворотов $J_{\mu\nu}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, генераторы трансляций $P_\mu$ порождают коммутативный идеал $V$, причем $A\tilde{P}(1,n) = V \supset\!\!\!\!+\ A\tilde{O}(1,n)$, где $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle S\rangle$. В [2–4] проведена симметрийная редукция уравнения (1) по некоторым подалгебрам алгебр $A\tilde{P}(1,2)$ и $A\tilde{P}(1,3)$ и получен ряд его точных решений.

В настоящем сообщении подалгебры алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1). Для этого описываем максимальные подалгебры ранга $n$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащиеся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n\rangle$. Если $L$ — одна из таких подалгебр, $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$AE(n-l-1) = \langle P_{l+1}, \ldots, P_{n-1}, J_{l+1,l+2}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle \quad (0 \le l \le n-2);$$
$$AO(l) = \langle J_{12}, \ldots, J_{l-1,l}\rangle \quad (2 \le l \le n);$$
$$AO(l_1; l_2) = \langle J_{l_1+1,l_2+2}, \ldots, J_{l_1+l_2-1,l_1+l_2}\rangle \quad (0 \le l_1 < l_2,\ l_1 + l_2 \le n);$$
$$AE'(l) = \langle G_1, \ldots, G_l, J_{12}, \ldots, J_{l-1,l}\rangle; \quad A\tilde{E}'(l) = AE'(l) \supset\!\!\!\!+\ \langle J_{0n}\rangle;$$
$$\Phi_1(\lambda_1) = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \ldots G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(r_1);$$
$$\Phi_2(\lambda_2) = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \ldots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(r_1; r_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_t(\lambda_t) = \langle G_{\sigma+1} + \lambda_t P_{\sigma+1}, \ldots, G_{\sigma+r_t} + \lambda_t P_{\sigma+r_t}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(\sigma; r_t),$$

где $\sigma = r_1 + r_2 + \cdots + r_{t-1}$, $\sigma + r_t = n - 1$.

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки, 1990, № 6, С. 31–34.

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $L$ $P(1,n)$-сопряжена одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AE(n-1)$; 2) $L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(1 < l < n)$;
3) $L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(1 \le l \le n-1)$;
4) $L_4 = \langle J_{0n} \rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(2 \le l \le n-1)$;
5) $L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(2 \le l \le n-1)$;
6) $L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1; l_2) \oplus AE(n-l-1)$ $(l = l_1 + l_2)$;
7) $L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE(n-2)$; 8) $L_8 = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \dots \oplus \Phi_t$;
9) $L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE(n-2)$;
10) $L_{10} = (AE'(l) \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} + \alpha P_{l+1} \rangle) \oplus AE(n-l-2)$.

**Теорема 2.** *Пусть $L$ — максимальная подалгебра ранга $n$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащаяся в $AP(1,n)$, и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $L$ $\tilde{P}(1,n)$-сопряжена одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = L_1 \oplus \langle S \rangle$; 2) $L_{1,2} = L_1 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} + \alpha S \rangle$ $(\alpha \ne 0)$;
3) $L_{1,3} = L_1 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$; 4) $L_{2,1} = L_2 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle S \rangle$; 5) $L_{3,1} = L_3 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle S \rangle$;
6) $L_{3,2} = L_3 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} + \alpha S \rangle$ $(\alpha \ne 0)$; 7) $L_{3,3} = L_3 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$;
8) $L_{4,1} = L_4 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle S \rangle$; 9) $L_{5,1} = L_5 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle S \rangle$; 10) $L_{6,1} = L_6 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle S \rangle$;
11) $L_{7,1} = L_7 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} - 2S \rangle$; 12) $L_{8,1} = L_8 \mathbin{\supset\!\!\!\!\!+} \langle J_{0n} - S \rangle$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (1) не имеет решений, инвариантных относительно $L_{8,1}$. Учитывая, что редукция уравнения (1) по подалгебрам $L_{1,1}$, $L_{1,2}$, $L_{1,3}$ и $L_{7,1}$ была проведена в [2, 4], в дальнейшем подалгебры 1–3, 11 и 12 теоремы 2 не рассматриваются. Выпишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 2. Запись $L : f_1(x), \dots, f_s(x)$ будет означать, что функции $f_1(x), \dots, f_s(x)$ образуют полную систему инвариантов алгебры $L$.

$$L_{2,1}: \quad \frac{u}{x_0^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2};$$

$$L_{3,1}: \quad \frac{u}{x_0^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right)^{1/2}}{x_0 - x_n};$$

$$L_{3,2}: \quad \frac{u}{\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right)^{1/(1-k)}},$$
$$\omega = \delta \ln\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right) - \ln(x_0 - x_n);$$

$$L_{3,3}: \quad \frac{u}{(x_0 - x_n)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n);$$

$$L_{4,1}: \quad \frac{u}{\left(x_1^2 + \dots + x_l^2\right)^{1(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2 - x_n^2};$$

$$L_{5,1}: \quad \frac{u}{x_{l+1}^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_{l+1}^2};$$

$$L_{6,1}: \quad \frac{u}{\left(x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2\right)^{1/(1-k)}}, \quad \omega=\frac{x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_{l_1}^2-x_n^2}.$$

Применяя анзац $\omega'=\varphi(\omega)$, редуцируем уравнение д'Аламбера к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$

$$L_{2,1}: \quad 4(\omega^2-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8}{1-k}+6\omega-4l\right)\dot{\varphi}+\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,1}: \quad -\ddot{\varphi}+\frac{4+l(1-k)}{1-k}\frac{1}{\omega}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,2}: \quad 4\delta(\delta-1)\ddot{\varphi}+\left[\frac{8\delta-4}{1-k}+2\delta l\right]\dot{\varphi}+\left[\frac{4k}{(1-k)^2}+\frac{2(l+2)}{1-k}\right]\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,3}: \quad 4\ddot{\varphi}+\frac{4+2l-2lk}{1-k}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{4,1}: \quad 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8}{1-k}+4\omega^2-2\omega l\right)\dot{\varphi}-\frac{2l(1-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{5,1}: \quad 4(\omega-\omega^2)\ddot{\varphi}+\left(\frac{8}{1-k}+2l+4-6\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{6,1}: \quad 4(\omega-\omega^2)\ddot{\varphi}+\left(\frac{8}{1-k}+2l_1+4-8\omega+2\omega l_2\right)\dot{\varphi}-$$
$$-\frac{2l_2(1-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Выпишем некоторые точные решения д'Аламбера

$$L_{3,1}: \quad u^{-4/l}=\sigma(l)\left[\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}+c(x_0-x_n)\right]^2,$$
$$\sigma(l)=\frac{\lambda}{l(l+2)}, \quad k=\frac{4+l}{l}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}(\delta=0): \quad u^{1-k}=\frac{\lambda(1-k)^2\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)}{2c\sigma(k,l)}\frac{1-c(x_0-x_n)^{\frac{\sigma(k,l)}{2}}}{(x_0-x_n)^{\frac{\sigma(k,l)}{2}}},$$
$$\sigma(k,l)=l+2-kl, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left[x_0-x_n-c\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right],$$
$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2c(l-kl+2)}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right),$$
$$\sigma(k,l)=-\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-kl+2)}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \quad u^{1-k}=\sigma_1(k,l)\frac{\left[(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}-c\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right]^2}{(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}},$$
$$\sigma_1(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{4c(1+k)(2+l-kl)}, \quad \sigma_2(k,l)=\frac{4+l-kl}{2};$$

$$L_{3,3}: \ u^{2/l} = \sigma(k,l)\frac{x_0 - x_n}{\left[(x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2) + (x_0 - x_n)\{\ln(x_0 - x_n) + c\}\right]^2},$$
$$\sigma(k,l) = -\frac{4l(l+1}{\lambda}, \quad k = \frac{2+l}{l}, \quad 1 \le l \le n-1;$$
$$L_{4,1}: \ u^{1-k} = \sigma(k,l)\left(x_1^2 + \cdots + x_l^2\right), \quad \sigma(k,l) = \frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-kl+2k)}, \quad 1 \le l \le n.$$

Запись $L: \ u = u(x)$ означает, что решение $u = u(x)$ уравнения (1) инвариантно относительно подалгебры $L$.


1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
3. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
4. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **26**, № 4, 791–806.