О некоторых новых волновых уравнениях математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Предложены уравнения для описания взаимодействия скалярных и тензорных полей.

1. В стандартной нерелятивистской квантовой механике взаимодействие двух частиц (волн) описывается с помощью уравнения Шредингера

$$p_0 u(t,x,y) = \left\{ \frac{1}{2m_1} p_k^2 + \frac{1}{2m_2} p_{k+3}^2 + V(t,x,y) \right\} u(t,x,y), \tag{1}$$

где $p_0 = -i\frac{\partial}{\partial t}$, $p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$, $p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}$, $x_{k+3} \equiv y_k$, $k = 1,2,3$, $V(t,x,y)$ — потенциал взаимодействия, $u(t,x,y)$ — волновая функция системы двух частиц, m_1, m_2 — массы частиц.

Возможен и другой подход к описанию взаимодействия двух частиц (волн). Сопоставим невзаимодействующим частицам волновые функции $u_1(t,x)$ и $u_2(t,y)$. Взаимодействие скалярных волн u_1 и u_2 опишем с помощью такой системы

$$\begin{aligned} p_0 u_1(t,x) &= \frac{1}{2m_1} p_k^2 u_1(t,x) + V_1(t,x,y,u_1,u_2), \\ p_0 u_2(t,x) &= \frac{1}{2m_2} p_{k+3}^2 u_2(t,x) + V_2(t,x,y,u_1,u_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Конкретное взаимодействие волн u_1 и u_2 описывается заданием потенциалов V_1 и V_2, которые, вообще говоря, нелинейным образом зависят от u_1 и u_2. При линейном взаимодействии

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11}(t,x,y)u_1 + V_{12}(t,x,y)u_2, \\ V_2 &= V_{21}(t,x,y)u_1 + V_{22}(t,x,y)u_2. \end{aligned}$$

В отсутствии взаимодействия между частицами система (2) распадается на два независимых уравнения Шредингера, которые инвариантны относительно алгебры

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{k+3} = p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k, \quad J_{k+3\,l+3} = x_{k+3}p_{l+3} - x_{l+3}p_{k+3}, \\ &G_k = tp_k - x_k m_1, \quad G_{k+3} = tp_{k+3} - x_{k+3} m_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы для модели (2) выполнялся принцип относительности Галилея, достаточно потребовать инвариантности системы (2) относительно операторов G_k и G_{k+3}. Такое требование существенно сужает класс допустимых потенциалов V_1 и V_2. Описанию линейных и нелинейных уравнений вида (2), инвариантных относительно алгебры (3), будет посвящена отдельная публикация.

Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, С. 9–11.

2. Опишем взаимодействие двух скалярных полей u_1 и u_2 помощью гиперболической системы уравнений. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &p_0^2 u_1(t,x) = p_k^2 u_1(t,x) + m_1^2 u_1(t,x) + V_1(t,x,y,u_1,u_2), \\ &p_0^2 u_2(t,x) = p_{k+3}^2 u_2(t,x) + m_2^2 u_2(t,x) + V_2(t,x,y,u_1,u_2). \end{aligned} \tag{4}$$

При отсутствии взаимодействия, система (4) распадается на два независимых уравнения Клейна–Гордона–Фока, которые инвариантны относительно алгебра

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{k+3} = p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k, \quad J_{k+3\,l+3} = x_{k+3} p_{l+3} - x_{l+3} p_{k+3}, \\ &J_{0k} = t p_k - x_k p_0, \quad J_{0\,k+3} = t p_{k+3} - x_{k+3} p_0. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае нетривиального взаимодействия, естественно потребовать инвариантность (4) относительно алгебры (5). Важно подчеркнуть, что системе (4), в отличие от других релятивистских уравнений для двух частиц, содержит только одну временную переменную.

Взаимодействие двух электромагнитных волн, характеризующихся векторами $\vec{E}_1(t,x)$, $\vec{H}_1(t,x)$ и $\vec{E}_2(t,y)$, $\vec{H}_2(t,y)$ описывается системой

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{E}_1(t,x)}{\partial t} = \mathrm{rot}_x \vec{H}_1(t,x) + \vec{V}_1(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2), \\ &\frac{\partial \vec{H}_1(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{rot}_x \vec{E}_1(t,x) + \vec{V}_2(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2), \\ &\frac{\partial \vec{E}_2(t,y)}{\partial t} = \mathrm{rot}_y \vec{H}_2(t,y) + \vec{V}_3(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2), \\ &\frac{\partial \vec{H}_2(t,y)}{\partial t} = -\mathrm{rot}_y \vec{E}_2(t,y) + \vec{V}_2(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2). \end{aligned}$$

Конечно, на векторы $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ можно накладывать, в зависимости от конкретной задачи, дополнительные условия. Например, $\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_1 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{E}_2 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_2 = 0$.

Взаимодействия тензорного $A_{\mu\nu}(t,x)$, векторного $B_\mu(t,x)$ и скалярного $u(t,x)$ полей можно описать системой

$$A_{\mu\nu}(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + B_\mu(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_\mu} + C(t,x)u(t,x) = 0. \tag{6}$$

Коэффициенты системы (6) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$p_\alpha p^\alpha A_{\mu\nu}(t,x) = \lambda_1 A_{\mu\nu}(t,x), \tag{7}$$

$$p_\alpha p^\alpha B_\mu(t,x) = \lambda_2 B_\mu(t,x), \tag{8}$$

$$p_\alpha p^\alpha C(t,x) = \lambda_3 C(t,x), \tag{9}$$

λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные параметры.

Подчеркнем, что уравнение (6) при фиксированных функциях $A_{\mu\nu}$, B_μ, C не инвариантно относительно группы Пуанкаре. Однако, если эти функции удовлетворяют уравнения (7)–(9), то система (6)–(9) инвариантна относительно группы

Пуанкаре. Симметрийные свойства системы (6)–(9) дают возможность строить семейство точных решений.

Возможно описание взаимодействующих частиц с помощью следующего уравнения четвертого порядка:

$$\Big\{p_0^4 - 2p_0^2\left(p_k^2 + p_{k+3}^2 + m_1^2 + m_2^2\right) - 2\left(p_k^2 + m_1^2\right)\left(p_{k+3}^2 + m_2^2\right) + \\ + \left(p_k^2 + m_1^2\right)^2 + \left(p_{k+3}^2 + m_2^2\right)^2\Big\}u(t, x, y) = F(|u|)u(t, x, y).$$