Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.О. ПАРАСЮК

Известно, что нелинейное трехмерное уравнение Шредингера со степенной нелинейностью допускает редукцию к набору обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе исследована задача о существовании и асимптотическом поведении ограниченных на полуоси решений этих уравнений. На основе такого подхода описаны семейства решений уравнения Шредингера. обладающих разнообразными свойствами: квазипериодические, сферически симметрические, убывающие на бесконечности по пространственным переменным, неограниченно растущие во времени.

В [1, 2] проведена редукция трехмерного нелинейного уравнения Шредингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\lambda|\Psi|^k\right)\right)\Psi=0, \tag{1}$$
$$\Psi:\ R_t\times R_x^3\to\mathbb{C},\quad m>0,\quad \lambda\in R,\quad k=4/3,$$

к набору обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$a_2(\tau)\ddot z(\tau)+a_1(\tau)\dot z(\tau)+a_0(\tau)|z(\tau)|^k z(\tau)=0, \tag{2}$$

где $z:R_\tau\to\mathbb{C}$, $a_n(\tau)=P_n(\tau)/Q_n(\tau)$, P_n и Q_n — полиномы второй степени, $n=0,1,2$.

Явный вид анзацев, редуцирующих (1) к (2), приведен в [1, 2].

В настоящей работе на основе качественного анализа редуцированных уравнений описаны некоторые семейства ограниченных на множестве $[t_0,\infty)\times R_x^3$ решений уравнения (1) и исследованы их асимптотики.

1. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=t^{-3/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau),$$

где $\tau=t^{-1}\alpha\cdot x$. Здесь и в дальнейшем $\alpha\in R^3$, $\alpha^2=1$, и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau=\omega_1$) имеет вид

$$\ddot z+a|z|^{4/3}z=0,\quad a=2\lambda n. \tag{3}$$

Утверждение 1. *Если $a>0$, то общее решение уравнения (3) является квазипериодической функцией*

$$z=Z(\nu_1\tau+\varphi_1,\nu_2\tau+\varphi_2), \tag{4}$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 10, С. 1344–1349.

где $Z(\varphi_1, \varphi_2) : T^2 \to \mathbb{C}$, T^2 *— стандартный двухмерный тор,* $T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in R^2 \mid \operatorname{mod} 2\pi\}$; ν_1, ν_2, φ_1, φ_2 *— вещественные параметры (произвольные постоянные).*

Доказательство. Уравнение (3) в координатах $q_1 = \operatorname{Re} z$, $q_2 = \operatorname{Im} z$ представляет собой лагранжеву систему с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{3a}{10}\left(q_1^2 + q_2^2\right)^{5/3},$$

описывающую движение частицы в центральном поле. Если $a > 0$, то потенциальная энергия является положительно определенной функцией. Известно (см., например, [3]), что в этом случае совместная поверхность уровня полной энергии и кинетического момента, являющихся интегралами движения, компактна и, следовательно, является двухмерным тором. Общее решение уравнения (3) является квазипериодической функцией, частоты которой ν_1, ν_2 можно считать независимыми параметрами.

2. Рассмотрим анзац "бегущая волна"

$$\Psi(t, x) = z(\alpha \cdot x - lt), \quad l \in R.$$

и редуцированное уравнение для функции $z(\tau)$ (см. (VII), (IX) в [1])

$$\ddot{z} - 2ik\dot{z} + a|z|^{4/3}z = 0, \quad k = lm, \quad a = 2\lambda m. \tag{5}$$

Утверждение 2. *Если* $a > 0$, *то уравнение (5) имеет квазипериодическое общее решение вида (4). Если* $a < 0$, *то наряду с квазипериодическими решениями вида (4) уравнение (5) имеет семейство асимптотически периодических решений вида*

$$z = r(\tau + \xi)\exp\left(i\left(k\tau + \int_0^\tau \mu r^{-2}(s + \xi)ds + \theta\right)\right),$$

где μ, ξ, θ *— вещественные параметры, функция* $r(\tau) : R \to R$ *удовлетворяет при некоторых положительных* γ, r^* *оценке*

$$|r(\tau) - r^*| = O(\exp(-\gamma|\tau|)), \quad \tau \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Уравнение (5) отличается от уравнения (3) наличием "гироскопического члена" — $2ik\dot{z}$. Естественно поэтому положить $z = r\exp(i\varphi)$. Тогда для вещественных переменных r и φ получим систему

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + 2k\dot{\varphi} + ar^{7/3} = 0, \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - 2k\dot{r} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножив второе уравнение на r, будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\varphi}) = k\frac{d}{d\tau}(r^2), \quad \dot{\varphi} = k + \mu r^{-2}, \tag{8}$$

где μ — произвольная постоянная.

С учетом (8) первое уравнение (7) примет вид

$$\ddot{r} - \mu^2 r^{-3} + k^2 r + ar^{7/3} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы, потенциальная энергия которой имеет вид

$$\Pi(r) = 2^{-1}(\mu^2 r^{-2} + k^2 r^2) + 3 \cdot 10^{-1} a r^{10/3}.$$

Если $a > 0$, то ситуация та же, что и в п. 1 (случай потенциальной ямы).

Если $a < 0$, то, уменьшая μ, можно добиться того, чтобы график $\Pi(r)$ имел локальный минимум в точке $r_* > 0$ и локальный максимум в точке $r^* > r_*$. На фазовой плоскости $(r, \dot r)$ линии уровня интеграла энергии $2^{-1}\dot r + \Pi = E$ для $\Pi(r_*) < E < \Pi(r^*)$ в окрестности точки $(r_*, 0)$ замкнуты. Таким значениям соответствуют квазипериодические решения уравнения (5). Линия уровня для значения $E = \Pi(r^*)$ является петлей сепаратрисы седла $(r^*, 0)$. Ей соответствует однопараметрическое семейство решений уравнения (9) $r = r(\tau + \xi)$, удовлетворяющее оценке (6). Осталось воспользоваться формулой (7).

Замечание. Результаты данного пункта остаются справедливыми для уравнения Шредингера с нелинейностью более общего вида $\Phi(|\Psi|)\Psi$. При этом если $\Phi(0) < 0$ и $\Phi(r)$ принимает положительные значения для достаточно больших r, то уравнение может иметь решения типа “уединенная бегущая волна”.

3. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-3/4} z(t^{-1/2} \alpha \cdot x)$$

и редуцированное уравнение (см. (IV), (V) в [1], $\tau = \omega_1$)

$$\ddot z - im\tau \dot z - \frac{3}{2} imz + a|z|^{4/3} z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Уравнение (10) имеет семейство ограниченны на всей оси решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, причем $Z(\tau, c) = Z(-\tau, c)$ и $Z(\tau, c) = O(\tau^{-3/2})$ при $\tau \to \infty$.*

Доказательство. Положим $s = 2^{-1}\tau^2$. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(-im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{3im}{4s} z + \frac{a}{2s}|z|^{4/3} z = 0.$$

Стандартной заменой убираем член с производной

$$z = v \exp\left(\frac{1}{2}\int\left(im - \frac{1}{2s}\right) ds\right) = v s^{-1/4} \exp\left(\frac{ims}{2}\right). \tag{11}$$

Получим

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s} + \frac{3}{16 s^2}\right) v + \frac{a}{2} s^{-4/3} |v|^{4/3} v = 0. \tag{12}$$

Исследуем соответствующее линейное уравнение ($a = 0$). Для него $s = 0$ — регулярная особая точка. Определяющее уравнение $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$ имеет два корня: $\rho_1 = 1/4$, $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения уравнения (12) при $a = 0$ существует конечный предел

$$\lim_{s \to 0} v(s) s^{-1/4} < \infty. \tag{13}$$

Исследуем поведение решений при $s \to \infty$. Для корней уравнения

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}\right) = 0$$

справедливо асимптотическое разложение

$$\rho_\pm(s) = \pm i\sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}} = \pm\left(\frac{im}{2} + \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right).$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\rho_1(s) - \rho_2(s)) \neq 0$, то уравнение (12) при $a = 0$ имеет фундаментальную систему решений $v_+(s)$, $v_-(s)$, вронскиан которых равен 1 и для которых имеет место асимптотика [4]

$$v_\pm(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s} \rho_\pm(s_1)ds_1\right)(c_\pm + o(1)) = O\left(s^{\pm 1/2}\right). \tag{14}$$

Кроме того, для этих решений выполнено условие (13).

Теперь задача об ограниченных на $[0,\infty)$ решениях уравнения (12) стандартным образом с помощью метода вариации произвольных постоянных сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_1^s v_+(\theta)\theta^{-4/3}|v(\theta)|^{4/3}v(\theta)d\theta\right) + \\ + \frac{a}{2}v_+(s)\int_s^\infty v_-(\theta)\theta^{-4/3}|v(\theta)|^{4/3}v(\theta)d\theta \stackrel{\text{def}}{=} A[v], \end{aligned} \tag{15}$$

где c — комплексный параметр.

Нетрудно показать, что оператор A на полном метрическом пространстве B_K непрерывных функций $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |f(s) - g(s)|$ и таких, что

$$|f(s)| \leq \begin{cases} Ks^{1/4}, & s \in [0,1]; \\ Ks^{-1/2}, & s \in (1,\infty) \end{cases} \tag{16}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и $K > 0$ является оператором сжатия. Действительно, условия (13), (14) гарантируют существование константы $K_1 > 0$, не зависящей от c и K, такой, что

$$|A[f]| \leq \begin{cases} K_1\left(|c| + K^{7/3}\right)s^{1/4}, & s \in [0,1]; \\ K_1\left(|c| + K^{7/3}\right)s^{-1/2}, & s \in (1,\infty), \end{cases}$$
$$\rho(A[f], A[g]) \leq K_1K^{4/3}\rho(f,g),$$

если $f, g \in B_K$. Теперь ясно, что уменьшением $|c|$ и K можно добиться выполнения условий сжатия:

$$K_1\left(|c| + K^{7/3}\right) \leq K, \quad K_1K^{4/3} < 1.$$

Отсюда следует, что уравнение (16) для всех достаточно малых c имеет решение $v(s,c)$, удовлетворяющее условию (13) и имеющее асимптотику $v(s,c) = O\left(s^{-1/2}\right)$ при $s \to \infty$. Осталось подставить это решение в формулу (11).

4. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-3/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z\left(\frac{x^2}{t^2}\right)$$

и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau = \omega_2$)

$$\ddot{z} + \frac{3}{2\tau}\dot{z} + \frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z = 0, \quad a = \frac{\lambda m}{2}. \tag{17}$$

Утверждение 4. *Если $a > 0$, то уравнение (17) имеет семейство решений вида $z = \exp(i\theta)r(\tau,c)$, где θ, c — вещественные параметры, а $r(\tau,c)$ при фиксированном c является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$ функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to 0}\ddot{r}(\tau,c)\cdot\tau < \infty, \quad r(\tau,c) = O\left(\tau^{-3/10}\right) \quad \textit{при} \ \ \tau\to\infty.$$

Замечание 1. В силу первого условия анзац является классическим решением уравнения (1) в области $(0,\infty)\times R^3_x$.

Доказательство. Положим $z = \exp(i\theta)r$, где $\theta\in R$ — параметр, а $r = r(\tau)$ — вещественное решение уравнения

$$\ddot{r} + \frac{3}{2\tau}\dot{r} + \frac{a}{\tau}r^{7/3} = 0. \tag{18}$$

Выполняя затем подстановку $r = \tau^{-1/2}p$, получаем

$$\ddot{p} + \frac{1}{2\tau}\dot{p} + a\tau^{-5/3}p^{7/3} = 0.$$

Производная функции

$$V(\tau,p,\dot{p}) = 2^{-1}(\dot{p})^2 + 3\cdot 10^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3}$$

в силу этого уравнения удовлетворяет оценке

$$\dot{V} = -\tau^{-1}\left(2^{-1}(\dot{p})^2 + 2^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3}\right) \le -\tau^{-1}V.$$

Значит, $V(\tau,p(\tau),\dot{p}(\tau)) = O\left(\tau^{-1}\right)$, а тогда $p^{10/3}(\tau) = O\left(\tau^{2/3}\right)$, $p(\tau) = O\left(\tau^{1/5}\right)$, и, следовательно, $r(\tau) = O\left(\tau^{-3/10}\right)$ для любого решения (18).

Покажем теперь, что уравнение (18) имеет однопараметрическое семейство решений $r(\tau,c)$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{\tau\to+0} r(\tau,c) < \infty$.

Положим $\tau = e^{-s}$. Уравнение (18) примет вид

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dr}{ds} + ae^{-s}r^{7/3} = 0. \tag{19}$$

Это уравнение имеет для любого достаточно малого c решение с асимптотикой [5]

$$r = \tilde{r}(s,c) = c + o(1), \quad s\to\infty.$$

Положим $r(\tau,c)=\tilde{r}(-\ln\tau,c)$. При фиксированном c эта функция непрерывна и ограничена по τ на полуоси $[0,\infty)$. Так как для $\tau>0$ она удовлетворяет уравнению (17), то справедливо представление

$$\dot{r}(\tau,c)=-a\tau^{-3/2}\int_0^\tau \tau_1^{1/2}r^{7/3}(\tau_1,c)d\tau_1.$$

Из этой формулы легко выводятся требуемые свойства функции $r(\tau,c)$.

Замечание 2. Можно показать, что если $a<0$, то уравнение (17) имеет семейство решений с асимптотикой $O\left(\tau^{-3/4}\right)$, $\tau\to\infty$. Однако ли такое решение имеет особенность при типа $\tau=0$ типа $\tau^{-3/4}$.

5. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=t^{-3/4}z\left(x^2t^{-1}\right)$$

и редуцированное уравнение (см. (VI) [1], $\tau=\omega_2$)

$$\ddot{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\tau}-im\right)\dot{z}-\frac{3im}{8\tau}z+\frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z=0,\quad a=\frac{\lambda m}{2}. \tag{20}$$

Утверждение 5. *Уравнение (20) имеет семейство решений $z=Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр, а $Z(\tau,c)$ при фиксированном c является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$ функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\tau\to0}\ddot{Z}(\tau,c)\tau<\infty$ и $Z(\tau,c)=O\left(\tau^{-3/4}\right)$ при $\tau\to\infty$ (см. замечание 1 п. 4).*

Доказательство. Подставляя

$$z=\exp\left(-\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{\tau}-im\right)d\tau\right)v=\exp\left(\frac{im\tau}{4}\right)\tau^{-3/4}v$$

в уравнение (20), имеем

$$\ddot{v}+\left(\frac{m^2}{16}+\frac{3}{16\tau^2}\right)v+\frac{a}{\tau^2}|v|^{4/3}v=0. \tag{21}$$

Любое решение этого уравнения, для которого $v(\tau_0)$ достаточно мало, где $\tau_0>0$, ограничено на полуоси $[\tau_0,\infty)$. Значит, малые решения уравнения (20) имеют асимптотику $O\left(\tau^{-3/4}\right)$ при $\tau\to\infty$. Теперь нужно среди таких решений выбрать семейство решений, остающихся ограниченными при подходе к точке $\tau=0$. После подстановки $\tau=e^{-s}$ доказательство существования этого семейства проводится аналогично п. 4.

Замечание. Утверждение остается в силе на полуоси $(-\infty,0]$.

6. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=\left(1-t^2\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1-t^2}\right)z\left(\frac{x^2}{1-t^2}\right)$$

и соответствующее редуцированное уравнение (см. (I) в [1], $\tau=\omega_2$)

$$\ddot{z}+\frac{3}{2\tau}\dot{z}+\frac{m^2}{4}z+\frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z=0,\quad a=\frac{\lambda m}{2}. \tag{22}$$

Утверждение 6. *Уравнение (22) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ обладает свойствами, указанными в утверждении 5.*

Доказательство. Выполним подстановку $z = \tau^{-3/4}v$. Уравнение для v имеет вид

$$\dot{v} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{3}{16\tau^2}\right)v + \frac{a}{\tau^2}|v|^{4/3}v = 0. \tag{23}$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в п. 5.

Для интерпретации результата данного пункта нам понадобится следующее его уточнение: для любого $\delta > 0$ можно указать такое $c_0(\delta) > 0$, что если $|c| < c_0(\delta)$, то

$$|Z(\tau, c)| \le \delta \min\left(1, \tau^{-3/4}\right) \quad \forall\, \tau \in [0, \infty). \tag{24}$$

Это уточнение легко получается из теорем [5], использованных в пп. 4, 5.

7. В заключение отметим, что рассмотренные выше решения моделируют процессы самоорганизации в системе, описываемой уравнением (1). Например, рассмотрим решение, получаемое в соответствии с утверждением 6. Покажем, что равномерно малое в момент $t = 0$ решение п. 6 при $t \to 1$ локализуется в окрестности точки $x = 0$, причем в самой точке оно неограниченно растет.

Действительно, в соответствии с оценкой (24), если $|c| < c_0(\delta)$, то в начальный момент $t = 0$ имеем

$$|\Psi(0, x)| \le \delta \min\left(1, \|x\|^{-3/2}\right), \quad \|x\| = \sqrt{x^2}.$$

Для $0 < t < 1$ в силу (24) получаем

$$|\Psi(t, x)| \le \delta \left(1 - t^2\right)^{-3/4} \min\left(1, \left(1 - t^2\right)^{3/4}, \|x\|^{-3/2}\right) \tag{25}$$

и

$$|\Psi(0, x)| = \left(1 - t^2\right)^{-3/4} |\Psi(0, 0)|. \tag{26}$$

Из (25) получаем оценку

$$|\Psi(t, x)| \le \delta \|x\|^{-3/2},$$

а из (26) следует неограниченный рост решения в точке $x = 0$ при $t \to 1$. Таким образом, рассмотренное решение моделирует характерный режим с обострением [6]. Аналогичное поведение демонстрируют решения пп. 4, 5 при $t \to t_*$, если предварительно преобразовать $t \to t - t_*$.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, 929–933.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Арнольд В.И., Математические методы классической механики, М., Наука, 1974, 432 с.
4. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 216 с.
5. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970, 720 с.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 480 с.