Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

Установлены необходимые и достаточные условия совместности системы двух скалярных комплексных волновых уравнений Даламбера и Гамильтона в четырехмерном пространстве Минковского. Предложен и эффективно реализован конструктивный метод интегрирования этой системы.

Введение

Настоящая работа посвящена интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП)

$$\Box u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta_3\right) u = F_1(u), \tag{1.a}$$

$$g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = F_2(u), \tag{1.б}$$

которую мы, следуя [1, 2] , будем в дальнейшем называть системой Даламбера–Гамилътона.

В (1) $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$, $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор пространства Минковского $M(1,3)$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование, причем индексы, обозначенные греческими буквами μ, ν изменяются от 0 до 3, латинскими буквами a, b, c — от 1 до 3, латинскими буквами e, m, n — от 1 до 2.

Ряд важных результатов по точным решениям системы ДУЧП (1) был получен Бейтменом [3], Картаном [4], Смирновым и Соболевым [5].

Сравнительно недавно Коллинзом получены необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы ДУЧП (1) и построено ее общее решение в случае, когда число независимых переменных равно трем. Его подход использовал геометрические идеи и методы и существенно опирался на трехмерность пространства независимых переменных [6].

В работе [7] установлено, что при $F_2 = 0$ уравнения Даламбера–Гамильтона совместны, если и только если $F_1 = 0$. В случае, когда $F_2 \not\equiv 0$, система (1) с помощью замены зависимой переменной вида $u \to f(u)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} &\Box u = F(u), \\ &g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Оказывается, что существует довольно узкий класс функций $F(u)$, при которых система (2) имеет нетривиальные решения. Именно. из требования совместности уравнений (2) с необходимостью вытекает, что $F = F(u)$ задается одной из

Препринт 90.39, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, 65 с.

следующих формул [1, 2]:

$$F(u)=\begin{cases}0,\\ (u+c_1)^{-1},\\ (u+c_1)^{-1}+(u+c_2)^{-1},\\ (u+c_1)^{-1}+(u+c_2)^{-1}+(u+c_3)^{-1},\end{cases} \tag{3}$$

где $c_1,\ldots,c_3$ — произвольные комплексные константы.

В данной работе установлены необходимые и достаточные условия совместности уравнений Даламбера–Гамильтона, а также предложен и эффективно реализован конструктивный метод интегрирования этих уравнений.

Следует подчеркнуть, что система (1) играет особую роль в теории пуанкаре-инвариантных скалярных ДУЧП, поскольку всякое $P(1,3)$-инвариантное уравнение о помощью подстановки

$$u(x)=\varphi(\omega), \tag{4}$$

где $\omega=\omega(x)$ — произвольное решение уравнений (1), приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) на $\varphi=\varphi(\omega)$ [8]. Например, если подставить (4) в нелинейное уравнение Даламбера

$$\Box u=F_3(u), \tag{5}$$

то для определения функции $\varphi(\omega)$ получается следующее ОДУ:

$$F_1(\omega)\dot\varphi+F_2(\omega)\ddot\varphi=F_3(\varphi).$$

Более того, в [9] была предложена подстановка, позволяющая с помощью точных решений системы Даламбера–Гамильтона строить частные решения нелинейного уравнения Дирака.

Хорошо известно, что система уравнений Даламбера–Гамильтона инвариантна относительно десятипараметрической группы Пуанкаре $P(1,3)$. Решения этой системы, которые переводятся друг в друга конечным преобразованием из группы $P(1,3)$, мы будем называть $P(1,3)$-эквивалентными ($P(1,3)$-сопряженными). Если $u(x)\not\equiv\mathrm{const}$, то с помощью преобразований из группы Пуанкаре можно добиться, чтобы $\frac{\partial u}{\partial x_0}\neq 0$. Следовательно, с точностью до $P(1,3)$-эквивалентности можно считать, что при $F_2(u)\not\equiv 0$ имеет место равенство $\frac{\partial u}{\partial x_0}\neq 0$.

Приведем перечень основных обозначений, используемых в дальнейшем

$u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$;

$\|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$ — матрица 4×4 с элементами $u_{\mu\nu}$, $\mu,\nu=\overline{0,3}$;

$\det\|u_{\mu\nu}\|\equiv|u_{\mu\nu}|$ — определитель матрицы $\|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$;

$\dot f(x)\equiv\frac{df}{dx}$ — производная функции одной переменной;

$f_{x_\mu}\equiv\partial_{x_\mu}f\equiv\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ — частная производная функции f по переменной x_μ;

$x_\mu x^\mu\equiv g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ — скалярное произведение в пространстве Минковского $M(1,3)$.

§ 1. Редукция четырехмерных уравнений Даламбера–Гамильтона к уравнениям меньшей размерности

Система ДУЧП Даламбера–Гамильтона при $F_2(u) \not\equiv 0$ с помощью замены зависимой переменной

$$u \to u' = \int^u (F_3(\tau))^{-1/2} d\tau \tag{1.1}$$

приводится к виду

$$\Box u = F(u), \tag{1.2а}$$

$$u_\mu u^\mu = 1. \tag{1.2б}$$

Поэтому задача исследования совместности системы уравнений Даламбера–Гамильтона (1а,б) сводится к изучению совместности системы более простого вида (1.2). В основе нашего подхода к решению этой задачи лежит метод нелокальных преобразований [10–13].

Определение 1. *Преобразование зависимых и независимых переменных вида*

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \\ u' &= f(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad r \geq 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где f_μ, f — r-раз непрерывно дифференцируемые функции,

$$\underset{s}{u} = \left\{ \frac{\partial^s u}{\partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_s}} \ : \ \mu_1, \ldots, \mu_s = \overline{0,3} \right\}, \quad s = \overline{1,r}$$

называется нелокальным преобразованием порядка r.

Основная идея метода нелокальной линеаризации состоит в том, чтобы для исследуемого нелинейного ДУЧП указать в явном виде нелокальное преобразование (1.3), приводящее его к линейному. Если для преобразованного уравнения удается построить общее или частное решение, то, обращая преобразование (1.3), получаем решение исходного уравнения.

Особая роль в теории ДУЧП первого порядка принадлежит контактным преобразованиям — нелокальным преобразованиям вида

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \\ u' &= f(x, u, \underset{1}{u}), \\ u'_\mu &= g_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \end{aligned}$$

которые сохраняют условия касания первого порядка $du = u_\mu dx_\mu \Rightarrow du' - u'_\mu dx'_\mu = 0$. Этот факт объясняется тем, что всякие два скалярных ДУЧП первого порядка могут быть переведены друг в друга подходящим контактным преобразованием (С. Ли [14]).

Для уравнения $u_\mu u^\mu = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$ удается в явном виде построить контактное преобразование, приводящее его к линейному ДУЧП, что позволяет построить его общее решение в параметрическом виде [15].

Теорема 1. *Общее решение уравнения Гамильтона*

$$u_\mu u^\mu = \lambda, \quad u \neq \mathrm{const}, \tag{1.4}$$

определяемое с точностью до $P(1,3)$-сопряженности, задается одной из следующих формул:

$$1)\quad u = x_0\sqrt{\lambda + v_a^2} + x_a v_a + \Phi(v), \tag{1.5а}$$

где $v_a = v_a(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями:

$$x_a + x_0 v_a(\lambda + v_b^2)^{-1/2} + \Phi_{v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3}, \tag{1.5б}$$

$\Phi = \Phi(v_1, v_2, v_3) \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ *— произвольная функция;*

$$2)\quad u = x_0\sqrt{\lambda + w^2 + v_n^2} + x_n v_n + x_3 w + \Phi(v), \tag{1.6а}$$

где $v_n = v_n(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями:

$$x_n + x_3 w_{v_n} + x_0(v_n + w w_{v_n})(1 + v_n^2 + w^2)^{-1/2} + \Phi_{v_n} = 0, \quad n = \overline{1,2}, \tag{1.6б}$$

$\Phi(v_1, v_2), w(v_1, v_2) \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ *— произвольные функции;*

$$3)\quad u = x_0\sqrt{\lambda + w_a^2(v)} + x_a w_a(v) + \Phi(v), \tag{1.7а}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая соотношением

$$w_a \dot{w}_a x_0(\lambda + w_b^2)^{-1/2} + x_a \dot{w}_a + \dot{\Phi} = 0, \tag{1.7б}$$

$w_a(v), \Phi(v) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ *— произвольные функции, удовлетворяющие равенству*

$$w_a^2(v) = -\lambda + v^2, \quad \dot{w}_a \equiv \frac{dw_a}{dv}, \quad \dot{\Phi} \equiv \frac{d\Phi}{dv}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Из (1.4) следует, что величины $u_0, \ldots, u_3$ — функционально-зависимы, откуда

$$\det \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right\|_{\mu,\nu=0}^3 = 0.$$

Поэтому ранг (4×4)-матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$ принимает одно из следующих значений: 1, 2, 3.

I. $\mathrm{rank}\,\|u_{\mu\nu}\| = 3$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} \right\|_{a,b=1}^3 \neq 0. \tag{1.9}$$

Совершим в (1.4) следующее нелокальное преобразование :

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0, \quad y_a = u_a, \\ &H(y) = x_a u_a - u, \quad H_{y_0} = -u_0, \quad H_{y_a} = x_a. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Нетрудно проверить, что (1.10) — это контактное преобразование, которое является обобщением классического преобразования Эйлера для двух независимых переменных [11–12].

В новых переменных y_μ, $H(y)$ уравнение (1.4) принимает вид

$$H_{y_0} = -\sqrt{\lambda + y_a^2},$$

т.е. замена (1.10) приводит ДУЧП (1.4) при условии (1.9) к линейному уравнению, общее решение которого задается следующей формулой:

$$H = -y_0\sqrt{\lambda + y_a^2} - \Phi(y), \tag{1.11}$$

где $\Phi(y_1, y_2, y_3) \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя (1.11) в (1.10), приходим к такому выражению для $u(x)$:

$$u(x) = x_a y_a - H = x_0\sqrt{1 + y_a^2} + x_a y_a + \Phi(y), \tag{1.12а}$$

причем функции $y_a = y_a(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_a = H_{y_a} = -x_0 y_a(\lambda + y_b^2)^{-1/2} - \Phi_{y_a}. \tag{1.12б}$$

Обозначая в (1.12) $v_a = y_a(x)$, получаем формулы (1.5).

II. $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$\det\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_m}\right\|_{n,m=1}^2 \neq 0. \tag{1.13}$$

и, кроме того, существует функция $\tilde{w} \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$ такая, что

$$\tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$$

и величины $\tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3)$, $u_\mu u^\mu - \lambda$ — функционально-независимы.

С учетом сказанного уравнение (1.4) при условии (1.13) может быть представлено в виде

$$u_0 = \sqrt{\lambda + u_a^2}, \quad \tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$$

или

$$u_0 = \sqrt{\lambda + u_n^2 + w^2}, \quad u_3 = w(u_1, u_2). \tag{1.14}$$

Совершим в (1.14) следующее контактное преобразование:

$$\begin{aligned} &x_0 = y_0, \quad x_n = H_{y_n}, \quad x_3 = y_3, \quad u = y_n H_{y_n} - H, \\ &u_0 = -H_{y_0}, \quad u_n = y_n, \quad u_3 = -H_{y_3}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

Откуда

$$H_{y_0} = -\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2}, \quad H_{y_3} = -w(y_1, y_2). \tag{1.16}$$

Интегрируя систему линейных ДУЧП (1.16), имеем

$$H = -y_0\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2} - y_3 w - \Phi(y_1, y_2),$$

где $\Phi \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подстановка полученного результата в формулы (1.15) дает следующее выражение для функции $u(x)$:

$$u = x_n y_n - H = x_n y_n + x_0\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2} + x_3 w + \Phi(y_1, y_2), \tag{1.17а}$$

причем функции $y_n(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_n = -x_0(y_n + ww_{y_n})(\lambda + y_n^2 + w^2)^{-1/2} - x_3 w_{y_n} - \Phi_{y_n}, \quad n = \overline{1,2}. \tag{1.17б}$$

Обозначая в (1.17) $v_n = y_n(x)$, приходим к формулам (1.6).

III. $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$. Не умаляя общности, можно считать, что

а) $u_{00} \neq 0$,

б) $\exists\, w_a = w_a(u_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1):\ u_a = w_a(u_0), \quad a = \overline{1,3}$.

С учетом этого уравнение Гамильтона (1.4) представляется в виде

$$u_0 = \sqrt{\lambda + w_a^2(u_0)}, \quad u_a = w_a(u_0). \tag{1.18}$$

Совершим в (1.18) следующее контактное преобразование:

$$\begin{aligned} &y_0 = u_0, \quad y_a = x_a, \\ &H = x_0 u_0 - u, \quad H_{y_0} = x_0, \quad H_{y_a} = -u_a. \end{aligned} \tag{1.19}$$

В новых переменных y_μ, $H(y)$ переопределенная система ДУЧП (1.18) принимает вид

$$H_{y_a} = -w_a(y_0), \tag{1.20а}$$

$$w_a^2(y_0) = y_0^2 - \lambda. \tag{1.20б}$$

Интегрируя уравнения (1.20а), имеем

$$H = -w_a(y_0) y_a - \Phi(y_0),$$

где $\Phi(y_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подстановка полученного результата в (1.19) дает следующее выражение для функции $u = u(x)$:

$$u = x_0 y_0 - H = x_0 \sqrt{\lambda + w_a^2(y_0)} + w_a(y_0) y_a + \Phi(y_0), \tag{1.21а}$$

причем функция $y_0 = y_0(x)$ определяется из соотношения

$$x_0 w_a \dot{w}_a (\lambda + w_b^2)^{-1/2} + \dot{w}_a y_a + \dot{\Phi} = 0 \tag{1.21б}$$

и выполнено равенство (1.20б).

Вводя в (1.20б), (1.21) обозначение $v = y_0(x)$, приходим к формулам (1.7).

Чтобы завершить доказательство, нам осталось рассмотреть вырожденный случай, когда матрица $\|u_{\mu\nu}\|$ — нулевая, т.е.

$$u_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}$$

Отсюда следует, что

$$u = c_0 x_0 + c_a x_a + c_4, \tag{1.22а}$$

причем константы c_μ, c_4 удовлетворяют соотношению

$$c_0^2 - c_a^2 = \lambda. \tag{1.22б}$$

Легко видеть, что формулы (1.22) получаются из (1.7), если положить $v = c_0$, $w_a = c_a$, $\Phi = c_4$. Теорема доказана.

Формулы (1.5)–(1.7) имеют очень прозрачный геометрический смысл при $\lambda = 1$. Рассмотрим, например, выражения (1.5). Разрешая эти соотношения относительно x_μ, имеем

$$x_0 = (v_0 + \theta)\sqrt{1 + v_a^2},\qquad x_a = -\Phi_{v_a} - (v_0 + \theta)v_a(1 + v_a^2)^{-1/2}. \tag{1.23}$$

Здесь использованы обозначения $v_0 = u$, $\theta = v_a \Phi v_a - \Phi$.

Вводя четырехвекторы

$$S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + v_a^2} \\ -\Phi_{v_b} - \theta v_b(1 + v_a^2)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + v_a^2} \\ -v_b \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

переписываем формулы (1.23) следующим образом:

$$x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,) + v_0 n_\mu(\vec{v}\,). \tag{1.25}$$

Из (1.25) заключаем, что $x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,)$ — это параметрическая форма записи поверхности уровня $u(x) = 0$ решения уравнения $u_\mu u^\mu = 1$, задаваемого формулами (1.5).

Непосредственный подсчет показывает, что четырехвекторы (1.24) удовлетворяют соотношениям

$$n \cdot n \equiv g_{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1,\qquad n \cdot S_{v_a} \equiv g_{\mu\nu} n_\mu \frac{\partial S_\nu}{\partial v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3} \tag{1.26}$$

(точкой обозначено скалярное произведение в пространстве Минковского $M(1,3)$ с метрикой $g_{\mu\nu}$). Следовательно, $n(\vec{v}\,)$ — это единичный четырехвектор нормали к поверхности $x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,)$.

Из всего вышесказанного можно заключить, что значение функции u, определяемой соотношениями (1.5), в точке $x \in R(1,3)$ равно расстоянию (в смысле метрики пространства $M(1,3)$) от точки x до поверхности уровня этого решения (см. также [6]).

Соотношения (1.6), (1.7) также представляются в виде (1.25), где

$$S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + v_n^2 + w^2} \\ -\Phi_{v_n} - v_3 w_{v_n} - v_n\theta \\ v_3 - \theta w \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + v_n^2 + w^2} \\ -v_n \\ -w \end{pmatrix}, \qquad \theta = v_3(v_n w_{v_n} - w) + v_n \Phi_{v_n} - \Phi. \tag{1.27}$$

$$S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + w_n^2 + v_3^2} \\ v_n - \theta w_n \\ -\dot{\Phi} - v_n \dot{w}_n - v_3\theta \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + w_n^2 + v_3^2} \\ -w_n \\ -v_3 \end{pmatrix}, \qquad \theta = v_3\dot{\Phi} - \Phi + v_n(v_3\dot{w}_n - w_n). \tag{1.28}$$

Как показывает прямая проверка, четырехвекторы (1.27), (1.28) также удовлетворяют соотношениям (1.26). Следовательно, для произвольного решения уравнения $u_\mu u^\mu = 1$ значение его и точка равно расстоянию от x до поверхности уровня этого решения $u(x) = 0$.

Формулы (1.23), (1.25), (1.27), (1.28) можно рассматривать как замены переменных

$$x_\mu,\ u(x)\ \to\ v_\mu,\ u(v), \tag{1.29}$$

причем в новых переменных решение ДУЧП $u_\mu u^\mu = 1$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности имеет вид

$$u(v) = v_0. \tag{1.30}$$

При замене переменных (1.29) уравнение (1.2a) переходит в следующее ДУЧП (см., например, [16]);

$$Lu = |\tilde{g}|^{-1/2}\tilde{g}_{\mu\nu}\partial_{v_\nu}(|\tilde{g}|^{1/2}\partial_{v_\mu}u) = F(v_0). \tag{1.31}$$

Здесь L — оператор Лапласа–Бельтрами в криволинейных координатах $v_\mu(x)$;

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\alpha} g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\beta}, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}, \quad |\tilde{g}| = \det\|\tilde{g}_{\mu\nu}\|. \tag{1.32}$$

Подставляя в (1.31) выражение (1.30), приходим к уравнению на $|\tilde{g}|$

$$\frac{1}{2}|\tilde{g}|^{-1}\frac{\partial|\tilde{g}|}{\partial v_0} = F(v_0). \tag{1.33}$$

Следовательно, с помощью замены переменных (1.25) система ДУЧП Даламбера–Гамильтона сводится к уравнению (1.33). Явный вид матричных элементов $\tilde{g}_{\mu\nu}$ существенно зависит от ранга матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$. Мы детально рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$, в остальных случаях рассуждения аналогичны.

При условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$ замена переменных (1.29) определяется формулами (1.23). Вычисляя из этих соотношений $\frac{\partial x_\mu}{\partial v_a}$ и подставляя полученный результат в (1.32), имеем

$$\begin{aligned} &\tilde{g}_{00} = 1, \quad \tilde{g}_{0a} = \tilde{g}_{a0} = 0,\\ &\tilde{g}_{ab} = (v_0+\theta)^2\left((1+v_c^2)^{-1}v_a v_b - \delta_{ab}\right) -\\ &\qquad - 2(v_0+\theta)\Phi_{v_a v_b} - \Phi_{v_a v_c}\Phi_{v_b v_c} - \theta_{v_a}\theta_{v_b}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

где $\theta = v_a\Phi_{v_a} - \Phi$, $a,b,c = \overline{1,3}$. Следовательно,

$$|\tilde{g}| = \det\|\tilde{g}_{ab}\|^3_{a,b=1}.$$

Вычисление определителя матрицы $G = \|\tilde{g}_{ab}\|$ существенно упрощается, если воспользоваться тождеством (справедливость которого устанавливается прямой проверкой)

$$VG = -((v_0+\theta)I + V\Phi)^2, \tag{1.35}$$

где

$$V = \|\delta_{ab} + v_a v_b\|^3_{a,b=1}, \quad I = \|\delta_{ab}\|^3_{a,b=1}, \quad \Phi = \|\Phi_{v_a v_b}\|^3_{a,b=1}.$$

Так как $\det V = 1 + v_a^2 \neq 0$, то существует V^{-1}. Умножая (1.35) на V^{-1} слева, имеем следующее представление для матрицы G:

$$G = -V^{-1}((v_0+\theta)I + V\Phi)^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}\det G &= -(1+v_a^2)^{-1}[\det((v_0+\theta)I + V\Phi)]^2 = \\ &= -(1+v_a^2)^{-1}\Big[(v_0+\theta)^3 + (v_0+\theta)^2(\Delta\Phi + v_a v_b \Phi_{v_a v_b}) + \\ &\quad + (v_0+\theta)(M_2(\Phi) + (\Delta\Phi)v_a v_b \Phi_{v_a v_b} - v_a v_b \Phi_{v_a v_c}\Phi_{v_b v_c}) + \\ &\quad + (1+v_a^2)\det\|\Phi_{V_a V_b}\|\Big]^2.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, $M_2(\Phi)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $\|\Phi_{v_a v_b}\|$, т.е.

$$M_2(\Phi) = \begin{vmatrix}\Phi_{v_1 v_1} & \Phi_{v_1 v_2} \\ \Phi_{v_1 v_2} & \Phi_{v_2 v_2}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Phi_{v_2 v_2} & \Phi_{v_2 v_3} \\ \Phi_{v_2 v_3} & \Phi_{v_3 v_3}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Phi_{v_3 v_3} & \Phi_{v_1 v_3} \\ \Phi_{v_1 v_3} & \Phi_{v_1 v_1}\end{vmatrix}.$$

Подставляя (1.36) в (1.33) и сравнивая полученное выражение для функции $F(v_0)$ с (3), заключаем, что

$$F(v_0) = (v_0+\alpha)^{-1} + (v_0+\beta)^{-1} + v_0^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1. \tag{1.37}$$

Расщепляя равенство (1.33), где $|\tilde{g}| = \det G$, $F(v_0)$ задаются формулами (1.36), (1.37), по степеням величины $v_0 + \theta$, приходим к системе трех ДУЧП на функцию $\Phi = \Phi(v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{aligned}&\Delta\Phi + v_a v_b \Phi_{v_a v_b} = -3\theta + \alpha + \beta, \\ &M_2(\Phi) + (\Delta\Phi)v_a v_b \Phi_{v_a v_b} - v_a v_b \Phi_{ac}\Phi_{bc} = (\alpha-\theta)(\beta-\theta) - \theta(\alpha+\beta-2\theta), \\ &|\Phi_{v_a v_b}| = -(\alpha-\theta)(\beta-\theta)\theta(1+v_a^2)^{-1},\end{aligned} \tag{1.38}$$

где $\theta = v_a \Phi_{v_a} - \Phi$.

Таким образом, общее решение системы (1.2) при условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (1.5), где $\lambda = 1$, $\Phi = \Phi(\vec{v}\,)$ — произвольное решение системы ДУЧП (1.38).

Вычисляя определитель матрицы $\|\tilde{g}_{\mu\nu}\|$ для случая, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 2$, имеем

$$\begin{aligned}\det\|\tilde{g}_{\mu\nu}\| &= -(1+v_n^2+w^2) \times \\ &\quad \times \left[(v_0+\theta)^2 S_2 + (v_0+\theta)(1+v_n^2+w^2)S_1 + S_0\right]^2,\end{aligned} \tag{1.39}$$

где

$$\begin{aligned}S_2 &= (1+w_{v_n}^2+\tau^2)(1+v_n^2+w^2)^{-1}, \\ S_1 &= (v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})(\Phi_{v_n v_m} + v_3 w_{v_n v_m}) - \\ &\quad - [\Delta\Phi + v_n v_m \Phi_{v_n v_m} + v_3(\Delta w + v_n v_m w_{v_n v_m})](1+w_{v_n}^2+\tau^2), \\ S_0 &= \det\|\Phi_{v_n v_m} + v_3 w_{v_n v_m}\|.\end{aligned}$$

Здесь $\theta = v_3(v_n w_{v_n} - w) + v_n\Phi_{v_n} - \Phi$, $\tau = v_n w_{v_n} - w$, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Определитель (1.39) не равен нулю, так как соотношения $S_1 = S_2 = S_0 = 0$ противоречат равенствам (1.6б). Действительно, дифференцируя последние по переменной x_m, имеем (при $\lambda = 1$)

$$\left\{x_0 \left(\sqrt{1+v_l^2+w^2}\right)_{v_n v_{m'}} + x_3 w_{v_n v'_m} + \Phi_{v_n v'_m}\right\} \frac{\partial v_{m'}}{\partial x_m} = -\delta_{nm}.$$

Но это равенство невозможно, так как определитель матрицы

$$\left\| x_0 \left(\sqrt{1+v_l^2+w^2}\right)_{v_n v_{m'}} + x_3 w_{v_n v_{m'}} + \Phi_{v_n v_{m'}} \right\|_{n,m'=1}^2$$

в силу условий $S_0 = S_1 = S_2 = 0$ равен нулю.

Подставляя определитель (1.39) в формулу (1.33) и сравнивая полученный результат с (3), заключаем, что функция $F(u)$ с необходимостью задается одним из следующих выражений:

I. $F(u) = 0,$

II. $F(u) = u^{-1},$

III. $F(u) = u^{-1} + (u+\alpha)^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^1.$

Расщепляя в каждом из приведенных случаев равенство (1.33) по степеням величины v_0, v_3, приходим к системам двумерных ДУЧП на функции $\Phi(v_1, v_2)$, $w(v_1, v_2)$

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} &1 + w_{v_n}^2 + \tau^2 = 0, \\ &(v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_n v_m} = 0, \end{aligned} \tag{1.40}$$

причем $\det \|v_3 w_{v_n v_m} + \Phi_{v_n v_m}\| \neq 0$;

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} &1 + w_{v_n}^2 + \tau^2 = 0, \quad \det\|w_{v_n v_m}\| = 0, \\ &(1+v_n^2+w^2)\det\|\Phi_{v_n v_m}\| = \rho\{(v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_n v_m}\}, \\ &(1+v_n^2+w^2)(\Delta\Phi_\Delta w - \Phi_{v_n v_m} w_{v_n v_m}) = \\ &\quad = \tau\{(v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_n v_m}\}; \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} &(\Delta w + v_n v_m w_{v_n v_m})(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2) - \\ &\quad - (v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m}) w_{v_n v_m} = -2\tau(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2), \\ &\det\|w_{v_n v_m}\| = \tau^2(1 + w_n^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}, \\ &(\Delta\Phi + v_n v_m \Phi_{v_n v_m})(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2) - (v_n\tau + w_{v_n}) \times \\ &\quad \times (v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_n v_m} = -(2\rho + \alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2), \\ &\det\|\Phi_{v_n v_m}\| = \rho(\rho+\alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}, \\ &\Delta\Phi\Delta w - \Phi_{v_n v_m} w_{v_n v_m} = \tau(2\rho+\alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

В формулах (1.42) использовано обозначение $\rho = v_n\Phi_{v_n} - \Phi$.

Таким образом, общее решение системы Даламбера–Гамильтона (1.2) при условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 2$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами

(1.6), где $\lambda = 1$, $\Phi(v_1, v_2)$, $w(v_1, v_2)$ — произвольные решения одной из систем ДУЧП (1.40)–(1.42).

Проводя аналогичные вычисления для случая, когда $\operatorname{rank} \|u_{\mu\nu}\| = 1$, убеждаемся, что функция $F(u)$ с необходимостью задается одним из следующих соотношений:

$$\text{I.} \quad F(u) = 0,$$
$$\text{II.} \quad F(u) = u^{-1}.$$

При этом общее решение системы уравнений Даламбера–Гамильтона (1.2) задается формулами (1.7), где $\lambda = 1$, $w_a(v)$, $\Phi(v)$ — гладкие функции, удовлетворяющие системам ОДУ

$$\text{I.} \quad \dot{w}_a^2 = 1, \quad w_a^2 = v^2 - 1. \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \ddot{w}_a = (1 - \dot{w}_b^2)(v\dot{w}_a - w_a), \\ & \ddot{\Phi} = (1 - \dot{w}_b^2)(v\dot{\Phi} - \Phi), \quad w_a^2 = v^2 - 1, \end{aligned} \tag{1.44}$$

при $F(u) = 0$ и $F(u) = u^{-1}$ соответственно.

В (1.43), (1.44) точкой обозначено дифференцирование по переменной v.

§ 2. Необходимые и достаточные условия совместности системы уравнений Даламбера–Гамильтона

В этом параграфе получен критерий совместности переопределенной системы ДУЧП (1), т.е. описаны в явном виде все функции $F_1(u)$, $F_2(u)$, при которых система уравнений Даламбера–Гамильтона имеет нетривиальные решения.

Теорема 2. *Система ДУЧП (1) совместна, если и только если функции $F_1(u)$, $F_2(u)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} &1) \quad F_1(u) = F_2(u) = 0; \\ &2) \quad F_1(u) = N\dot{f}^{-1}(f - c)^{-1} - \ddot{f}\dot{f}^{-3}, \quad F_2(u) = \dot{f}^{-2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $f = f(u) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\dot{f}(u) \not\equiv 0$; $c = \text{const}$; N — дискретный параметр, принимающий одно из значений 0, 1, 2, 3.

Доказательство. Пусть $F_2 \equiv 0$, тогда согласно [1, 2, 7] система ДУЧП (1) совместна, если и только если $F_1 \equiv 0$.

Предположим теперь, что $F_2 \not\equiv 0$, тогда замена (1.1) приводит уравнения Даламбера–Гамильтона к виду (1.2). Задача исследования совместности уравнений (1.2а) и (1.2б) в предыдущем параграфе была сведена к исследованию совместности переопределенных систем ДУЧП меньшей размерности (1.38), (1.40)–(1.44). Покажем, что из требования совместности этих систем с необходимостью следует равенство $\alpha = \beta = 0$.

1. Совместность системы ДУЧП (1.38). Уравнения (1.38) существенно упрощаются, если сделать следующую локальную замену переменных:

$$z_a = v_a(1 + v_b^2)^{-1/2}, \quad p(\vec{z}) = (1 + v_b^2)^{-1/2}\Phi(\vec{v}). \tag{2.2}$$

В переменных z_a, $p(\vec{z})$ система (1.38) принимает вид

$$\begin{aligned} &1) \quad \Delta p - z_a z_b p_{z_a z_b} = -(\alpha+\beta)(1-z_a^2)^{-1/2},\\ &2) \quad M_2(p) - (\Delta p) z_a z_b p_{z_a z_b} + + z_a z_b p_{z_a z_c} p_{z_b z_c} = \alpha\beta(1-z_a^2)^{-1},\\ &3) \quad \det \|p_{z_a z_b}\| = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\Delta = \partial_{z_a}\partial_{z_a}$, $M_2(p)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $\|p_{z_a z_b}\|$.

Из третьего уравнения системы (2.3) следует, что матрица $\|p_{z_a z_b}\|$ является вырожденной. Поэтому ее ранг равен либо 1, либо 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

$$A. \ \ \operatorname{rank} \|p_{z_a z_b}\| = 1. \tag{2.4}$$

Из условия (2.4) следует существование таких функций $R_n \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, для которых

$$p_{z_n} = R_n(p_{z_3}), \quad n = \overline{1,2}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение из (2.3), видим, что его левая часть тождественно равна нулю, откуда $\alpha\beta = 0$. Следовательно, один из параметров (скажем β) равен нулю.

С учетом сказанного первое уравнение системы (2.3) представляется в виде

$$p_{z_3 z_3}\left[1 + \dot{R}_n^2 - (z_n \dot{R}_n + z_3)^2\right] = -\alpha(1-z_a^2)^{-1/2}, \tag{2.6}$$

где $\dot{R}_n \equiv dR_n/dp_{z_3}$.

Если $p_{z_3 z_3} = 0$, то из (2.6) с необходимостью следует, что $\alpha = 0$.

Пусть $p_{z_3 z_3} \neq 0$. Совершим в (2.6) контактное преобразование Эйлера для трех независимых переменных [17]

$$\begin{aligned} &y_n = z_n, \quad y_3 = p_{z_3}, \quad H(\vec{y}) = z_3 p_{z_3} - p,\\ &H_{y_n} = -P_{z_n}, \quad H_{y_3} = z_3, \quad H_{y_3 y_3} = p^{-1}_{z_3 z_3},\\ &H_{y_n y_3} = -p_{z_n z_3} p^{-1}_{z_3 z_3}, \quad H_{y_n y_m} = \begin{vmatrix} p_{z_3 z_3} & p_{z_n z_3} \\ p_{z_m z_3} & p_{z_n z_m} \end{vmatrix} p^{-1}_{z_3 z_3}, \quad n, m = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В новых переменных y_a, $H(\vec{y})$ уравнения (2.5), (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned} &1) \quad \left[1 + \dot{R}_n^2 - (y_n \dot{R}_n + H_{y_3})^2\right] H^{-1}_{y_3 y_3} = -\alpha(1 - y_n^2 - H_{y_3}^2),\\ &2) \quad H_{y_1} = -R_1,\\ &3) \quad H_{y_2} = -R_2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $R_n = R_n(y_3)$, $\dot{R}_n \equiv dR_n/dy_3$.

Таким образом, комбинируя локальную и нелокальную замену переменных (2.2), (2.7), мы существенно упростили систему нелинейных ДУЧП (1.38), поскольку два последних уравнений из (2.8) являются линейными. Интегрирование этих уравнений дает следующее выражение для $H = H(\vec{y})$:

$$H = -R_n(y_3) y_n + Q(y_3), \tag{2.9}$$

где $Q \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя (2.9) в уравнение 1) из (2.8), имеем

$$(-\ddot{R}_n y_n + \ddot{Q})^{-1}(1 + \dot{R}_n^2 - \dot{Q}^2) = -\alpha \left[1 - y_n^2 - (\dot{R}_n y_n - \dot{Q})^2\right]^{-1/2}. \tag{2.10}$$

Необходимым условием расщепления уравнения (2.10) по переменным y_1, y_2 является требование, чтобы выражение

$$1 - y_1^2 - y_2^2 - (\dot{R}_1 y_1 + \dot{R}_2 y_2 - \dot{Q})^2 \tag{2.11}$$

было точным квадратом. Предположим, что это так, т.е. $\exists\ \lambda_n(y_3)$, $\lambda_3(y_3)$, для которых

$$(\lambda_n y_n + \lambda_3)^2 = 1 - y_n^2 - (\dot{R}_n y_n - \dot{Q})^2.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях независимых переменных y_1, y_2, получаем систему нелинейных, алгебраических уравнений

$$\lambda_3^2 = 1 - \dot{Q}^2, \quad \lambda_3\lambda_n = \dot{Q}\dot{R}_n, \quad \lambda_n^2 = -1 - \dot{R}_n^2, \quad \lambda_1\lambda_2 = \dot{R}_1\dot{R}_2.$$

Несложный подсчет показывает, что эта система несовместна. Следовательно, выражение (2.11) не является точным квадратом по переменным y_1, y_2 ни при каких $R_n(y_3)$, $Q(y_3)$. Из этого заключаем, что уравнение (2.10) может иметь нетривиальные решения только при $\alpha = 0$.

B. $\operatorname{rank}\|p_{z_a z_b}\| = 2$.

В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что выполнено условие

$$\det \begin{Vmatrix} p_{z_1 z_1} & p_{z_1 z_2} \\ p_{z_1 z_2} & p_{z_2 z_2} \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{2.12}$$

Следовательно, существует такая функция $R \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$, для которой

$$p_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2}). \tag{2.13}$$

С учетом равенства (2.13) система ДУЧП (2.3) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \left[1 + R_1^2 - (z_1 + z_3 R_1)^2\right] p_{z_1 z_1} + 2\left[R_1 R_2 - (z_1 + z_3 R_1)(z_2 + z_3 R_2)\right] p_{z_1 z_2} + \\
&\qquad + \left[1 + R_2^2 - (z_2 + z_3 R_2)^2\right] p_{z_2 z_2} = -(\alpha + \beta)(1 - z_a^2)^{-1/2}, \\
&2) \quad \left[(1 - z_a^2)(1 + R_n^2) + (z_3 - z_n R_n)^2\right] \begin{vmatrix} p_{z_1 z_1} & p_{z_1 z_2} \\ p_{z_1 z_2} & p_{z_2 z_2} \end{vmatrix} = \alpha\beta(1 - z_a^2)^{-1}, \\
&3) \quad p_{z_3} = R.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь мы использовали обозначение $R_n \equiv dR/dp_{z_n}$.

Совершим в (2.14) следующее контактное преобразование Эйлера:

$$\begin{aligned}
&y_n = p_{z_n}, \quad y_3 = z_3, \quad H(y) = z_n p_{z_n} - p, \quad H_{y_n} = z_n, \quad H_{y_3} = -p_{z_3}, \\
&H_{y_1 y_1} = \delta^{-1} p_{z_2 z_2}, \quad H_{y_1 y_2} = -\delta^{-1} p_{z_1 z_2}, \quad H_{y_2 y_2} = \delta^{-1} p_{z_1 z_1}, \\
&H_{y_3 y_3} = -\delta^{-1} \det\|p_{z_a z_b}\|, \quad H_{y_1 y_3} = \delta^{-1}(p_{z_1 z_2} p_{z_2 z_3} - p_{z_2 z_2} p_{z_1 z_3}), \\
&H_{y_2 y_3} = \delta^{-1}(p_{z_1 z_3} p_{z_1 z_2} - p_{z_1 z_1} p_{z_2 z_3}),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$\delta = p_{z_1z_1}p_{z_2z_2} - p^2_{z_1z_2} \neq 0.$$

В новых переменных система ДУЧП (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned}
1)\quad & \left[1 + R^2_{y_2} - (H_{y_2} + y_3R_{y_2})^2\right] H_{y_1y_1} - \\
& - 2\left(R_{y_1y_2} - (H_{y_1} + y_3R_{y_1})(H_{y_2} + y_3R_{y_2})\right) H_{y_1y_2} + \\
& + \left[1 + R^2_{y_1} - (H_{y_1} + y_3R_{y_1})^2\right] H_{y_2y_2} = \\
& = -(\alpha+\beta)\left(1 - H^2_{y_n} - y_3^2\right)^{-1/2}\left(H_{y_1y_1}H_{y_2y_2} - H^2_{y_1y_2}\right), \qquad (2.16)\\
2)\quad & \left[\left(1 - y_3^2 - H^2_{y_n}\right)\left(1 + R^2_{y_n}\right) + (y_3 - R_{y_n}H_{y_n})^2\right] = \\
& = -\alpha\beta\left(1 - H^2_{y_n} - y_3^2\right)^{-1}\left(H_{y_1y_1}H_{y_2y_2} - H^2_{y_1y_2}\right), \\
3)\quad & H_{y_3} = R(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение из (2.16), имеем

$$H = -y_3R(y_1, y_2) + iQ(y_1, y_2), \qquad (2.17)$$

где $Q \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подстановка выражения (2.17) в первые два уравнения системы (2.16) дает следующие соотношения для определения функций R, Q:

$$\begin{aligned}
1)\quad & -y_3f(R) + if(Q) = -(\alpha+\beta)\det\| - y_3R_{y_ny_m} + iQ_{y_ny_m}\| \times \\
& \times\left[1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2\right]^{-1/2}, \qquad (2.18)\\
2)\quad & g(R,Q) = \alpha\beta\det\| - y_3R_{y_ny_m} + iQ_{y_ny_m}\|\left[1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

В (2.18) использованы такие обозначения:

$$\begin{aligned}
& f(S) = \left(1 + R^2_{y_n} + Q^2_{y_n}\right)S_{y_my_m} - (R_{y_n}R_{y_m} + Q_{y_n}Q_{y_m})S_{y_ny_m}, \\
& g(R,Q) = \left(1 + R^2_{y_n}\right)\left(1 + Q^2_{y_m}\right) - (R_{y_n}Q_{y_n})^2.
\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (2.16) расщепляется по y_3 только при условии, что выражение

$$1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2$$

является точным квадратом по переменной y_3. Вычисляя его детерминант Δ, имеем

$$\Delta = -g(R,Q).$$

Если $\Delta = -g(R,Q) = 0$, то ввиду условия

$$\det\|H_{y_ny_m}\| \equiv \det\| - R_{y_ny_m}y_3 + iQ_{y_ny_m}\| \neq 0 \qquad (2.19)$$

имеем из (2.18), что $\alpha\beta = 0$. Следовательно, при $\Delta = 0$ один из параметров α, β (скажем, β) равен нулю. С учетом этого факта уравнения (2.18) после расщепления по степеням переменной y_3 принимают вид

$$\begin{aligned}
1)\quad & i\alpha\det\|R_{y_ny_m}\| = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R), \\
2)\quad & i\alpha\det\|Q_{y_ny_m}\| = \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q), \qquad (2.20)\\
3)\quad & i\alpha h(R,Q) = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q) + \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R), \\
4)\quad & g(R,Q) = 0.
\end{aligned}$$

В (2.20) $h(R,Q) = R_{y_1y_1}Q_{y_2y_2} + R_{y_2y_2}Q_{y_1y_1} - 2R_{y_1y_2}Q_{y_1y_2}$; функции $f(R)$, $f(Q)$, $g(R,Q)$ определены выше.

Если в (2.18) $\Delta = -g(R,Q) \neq 0$, то в силу (2.19) из первого уравнения следует, что $\alpha+\beta = 0$. Расщепляя уравнения (2.18) по степеням переменной y_3 при $\beta = -\alpha$, приходим к переопределенной системе двумерных ДУЧП на функции R, Q.

$$
\begin{aligned}
&1)\quad f(R) = 0,\\
&2)\quad f(Q) = 0,\\
&3)\quad \alpha^2 \det \|R_{y_ny_m}\| = \left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} g(R,Q),\\
&4)\quad \alpha^2 \det \|Q_{y_ny_m}\| = \left(1+Q^2_{y_n}\right)^{1/2} g(R,Q),\\
&5)\quad \alpha^2 h(R,Q) = 2(R_{y_n}Q_{y_n})g(R,Q).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Таким образом, задача исследования совместности системы ДУЧП (2.14) с помощью нелокального преобразования (2.15) сводится к исследованию совместности систем двумерных уравнений (2.20), (2.21). Мы подробно рассмотрим случай системы (2.20), для уравнений (2.21) рассуждения аналогичны.

Продифференцировав уравнение 4) из (2.20) по переменным y_n, $n = -1, 2$, имеем следующие ДУЧП второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1+Q^2_{y_n}\right) R_{y_m} - (R_{y_n}Q_{y_m})Q_{y_m}\right] R_{y_my_l} +\\
&\qquad + \left[\left(1+R^2_{y_n}\right) Q_{y_m} - (R_{y_n}Q_{y_m})R_{y_m}\right] Q_{y_my_l} = 0.
\end{aligned}
$$

Эти соотношения на множестве решений системы (2.20) переписываются в виде

$$
\tau_m \left[\left(1+Q^2_{y_n}\right)^{1/2} R_{y_my_e} - \left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} Q_{y_my_e}\right] = 0,
\tag{2.22}
$$

где

$$
\tau_m = \left(1+Q^2_{y_n}\right)^{1/2} R_{y_m} - \left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} Q_{y_m}, \quad m = \overline{1,2}.
$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Рассматриваем уравнения (2.22) совместно с уравнением 3) из (2.20) как систему линейных алгебраических уравнений на $R_{y_1y_1}$, $R_{y_1y_2}$, $R_{y_2y_2}$

$$
\begin{aligned}
&R_{y_1y_1}Q_{y_2y_2} - 2R_{y_1y_2}Q_{y_1y_2} + R_{y_2y_2}Q_{y_1y_1} =\\
&\quad = (i\alpha)^{-1}\left[\left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q) + \left(1+Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R)\right] \equiv\\
&\quad \equiv 2(i\alpha)^{-1}\left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q),\\
&\left(1+Q^2_{y_n}\right)^{1/2} \tau_m R_{y_my_l} = \left(1+R^2_{y_n}\right)^{1/2} \tau_m Q_{y_my_l}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

На множестве решений системы ДУЧП (2.20) определитель системы линейных алгебраических уравнений (2.23) равен

$$
\Delta = -\left(1+Q^2_{y_n}\right) f(Q).
\tag{2.24}
$$

Далее необходимо рассматривать два случая $f(Q) \neq 0$, $f(Q) = 0$.

1. $f(Q) \neq 0$. Здесь имеется две принципиально различных возможности

а) $R_{y_n}Q_{y_n} \neq 0$, б) $R_{y_n}Q_{y_n} = 0$.

Пусть имеет место условие а). В силу уравнения 4) из (2.20)

$$\left(1+Q_{y_n}^2\right)\left(1+R_{y_m}^2\right) \neq n$$

и, следовательно, определитель системы (2.23) не равен нулю. Поэтому эта система имеет единственное решение, явный вид которого дается формулами

$$R_{y_n y_m} = \left(1+R_{y_l}^2\right)^{1/2}\left(1+Q_{y_l}^2\right)^{-1/2} Q_{y_n y_m}. \tag{2.25}$$

Из необходимых и достаточных условий совместности системы ДУЧП (2.25)

$$\frac{\partial R_{y_n y_m}}{\partial y_l} = \frac{\partial R_{y_l y_m}}{\partial y_n}, \quad l, m, n = 1, 2.$$

следуют такие соотношения:

$$\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}\left(1+Q_{y_n}^2\right)^{-1/2} \det\|Q_{y_n y_m}\| \times \\ \times\left[\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2} Q_{y_l} - \left(1+Q_{y_n}^2\right)^{1/2} R_{y_l}\right] = 0.$$

Если $\det\|Q_{y_n y_m}\| = 0$, то из (2.25) заключаем, что $\det\|R_{y_n y_m}\| = h(R, Q) = 0$. Но это невозможно в силу (2.19). Поэтому из необходимых и достаточных условий совместности системы (2.23) следуют такие уравнения на функции R, Q:

$$\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2} Q_{y_m} = \left(1+Q_{y_n}^2\right)^{1/2} R_{y_m}, \quad m = 1, 2.$$

откуда $R_{y_m} \equiv Q_{y_m}$, $m = 1, 2$.

Подставляя этот результат в (2.20), имеем

$$\begin{aligned} &1) \quad i\alpha \det\|R_{y_n y_m}\| = -2\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}\left(R_{y_m} R_{y_l} R_{y_m y_l}\right), \\ &2) \quad 1 + 2R_{y_n}^2 = 0. \end{aligned}$$

Но из второго уравнения этой системы следует, что $\det\|R_{y_n y_m}\| = 0$, откуда $h(R, Q) = \det\|Q_{y_n y_m}\| = 0$. Пришли к противоречию с условием (2.19).

Обратимся теперь к случаю б). Из условия $R_{y_n} Q_{y_n} = 0$ в силу четвертого уравнения системы (2.20) следуют три возможных случая

$$\begin{aligned} &\text{б.1)} \quad 1 + R_{y_n}^2 = 0, \quad 1 + Q_{y_n}^2 \neq 0; \\ &\text{б.2)} \quad 1 + R_{y_n}^2 \neq 0, \quad 1 + Q_{y_n}^2 = 0; \\ &\text{б.3)} \quad 1 + Q_{y_n}^2 = 1 + R_{y_n}^2 = 0. \end{aligned}$$

Пусть имеет место случай б.1). Так как условие $Q = \mathrm{const}$ противоречит (2.19), то, не умаляя общности, можно считать, что $Q_{y_2} \neq 0$. Разрешая соотношение $R_{y_n} Q_{y_n} = 0$ относительно R_{y_2} и подставляя полученный результат в уравнение $1 + R_{y_n}^2 = 0$, имеем

$$Q_{y_2}^2 + R_{y_1}^2 Q_{y_n}^2 = 0.$$

Из этого равенства следует, что $Q_{y_n} \neq 0$, откуда

$$R_{y_1} = iQ_{y_2}\left(Q_{y_n}^2\right)^{-1/2}, \quad R_{y_2} = -iQ_{y_1}\left(Q_{y_n}^2\right)^{-1/2}, \tag{2.26}$$

Из необходимого и достаточного условия совместности системы (2.26) получается такое уравнение на Q:

$$Q_{y_n}^2 Q_{y_m y_m} - Q_{y_n} Q_{y_m} Q_{y_n y_m} = 0. \tag{2.27}$$

Но из соотношений $1 + R_{y_n}^2 = 0$, $R_{y_n} Q_{y_n} = 0$ следует, что $R_{y_n} R_{y_m} Q_{y_n y_m} = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$f(Q) \equiv \left(1 + R_{y_n}^2 + Q_{y_n}^2\right) Q_{y_m y_m} - (R_{y_n} R_{y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) Q_{y_n y_m} = 0.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию с исходным предположением $f(Q) \neq 0$.

Пусть имеет место случай б.2). Если $R = \mathrm{const}$, то определитель матрицы $\| -R_{y_n y_m} + iQ_{y_n y_m} \|$ равен нулю, что противоречит условию (2.19). Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что $R_{y_2} \neq 0$. Разрешая соотношение $Q_{y_n} R_{y_n} = 0$ относительно Q_{y_2} и подставляя полученный результат в уравнение $1 + Q_{y_n}^2 = 0$, имеем

$$R_{y_2}^2 + Q_{y_1}^2 \left(R_{y_n}^2\right) = 0.$$

Из этого равенства следует, что $R_{y_n}^2 \neq 0$, откуда

$$Q_{y_1} = iR_{y_2} \left(R_{y_n}^2\right)^{-1/2}, \quad Q_{y_2} = -iR_{y_1} \left(R_{y_n}^2\right)^{-1/2}. \tag{2.28}$$

Система (2.28) совместна, если и только если $\partial Q_{y_1}/\partial y_2 = \partial Q_{y_2}/\partial y_1$ Из этого условия вытекает следующее двумерное ДУЧП на функцию $R(y_1, y_2)$:

$$R_{y_n}^2 R_{y_m y_m} - R_{y_n} R_{y_m} R_{y_n y_m} = 0. \tag{2.29}$$

Но из соотношений $1 + Q_{y_n}^2 = 0$, $R_{y_n} Q_{y_n} = 0$ следует, что $Q_{y_n} Q_{y_m} R_{y_n u_m} = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$f(R) \equiv \left(1 + R_{y_n}^2 + Q_{y_n}^2\right) R_{y_m y_m} - (R_{y_n y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) R_{y_n y_m} = 0.$$

Подставляя формулы (2.28) в третье уравнение системы (2.20) при $1 + Q_{y_n}^2 = 0$, $f(R) = 0$, имеем $\left(1 + R_{y_n}^2\right)^{1/2} f(Q) = 0$, что противоречит исходному предположению.

Обратимся теперь к случаю б.3). Разрешая соотношения $1 + R_{y_n}^2 = 0$, $1 + Q_{y_n}^2 = 0$, $R_{y_n} Q_{y_n} = 0$ относительно R_{y_n}, имеем

$$R_{y_1} = \pm iQ_{y_2}, \quad R_{y_2} = \pm iQ_{y_1}, \quad 1 + Q_{y_n}^2 = 0.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\det \|R_{y_n y_m}\| = \det \|Q_{y_n y_m}\| = h(R, Q) = 0$$

что противоречит условию (2.19).

2. $f(Q) = 0$. Если $f(Q) = 0$, то из уравнений (2.20) в силу (2.19) следует, что $\alpha = 0$. Если же $f(R) \neq 0$, то замена

$$R \to Q, \quad Q \to R \tag{2.30}$$

сводит этот случай к уже рассмотренному (здесь используется симметрия уравнений относительно преобразования (2.30).

Таким образом, требование совместности переопределенной системы ДУЧП с необходимостью приводит к условию $\alpha = 0$. Аналогичный результат имеет место и для системы (2.21). Следовательно, из требования совместности переопределенной системы ДУЧП (2.14) с необходимостью вытекает, что $\alpha = \beta = 0$.

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу: необходимым условием совместности системы уравнений (1.38) является равенство нулю параметров α, β.

2. Совместность системы ДУЧП (1.42). Как и в предыдущем случае, прежде чем исследовать совместность уравнений (1.42), упростим их о помощью следующей локальной замены переменных:

$$\begin{aligned} &z_n = v_n\left(1+v_m^2+w^2\right)^{-1/2}, \\ &G(z) = w\left(1+v_m^2+w^2\right)^{-1/2}, \quad P(z) = \Phi\left(1+v_m^2+w^2\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Замена (2.31) не определена при $w = i\left(1+v_m^2\right)^{1/2}$, однако это равенство невозможно, поскольку в силу формул (1.15), (1.16) оно влечет за собой равенство $u_0 = 0$, что противоречит исходному предположению.

Совершив в (1.42) замену переменных (2.31), после громоздких вычислений приходим к системе двумерных ДУЧП для определения функций $G(z_1, z_2)$, $P(z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} 1)\quad & \left[1+(1-z_n^2)G_{z_m}^2 + 2GG_{z_n}z_n - G^2\right]\Delta G - z_n z_m G_{z_n z_m} - \\ & - 2GG_{z_n}G_{z_n z_m}z_m + (z_n^2-1)G_{z_m}G_{z_l}G_{z_m z_l} = 0, \\ 2)\quad & \left[1+(1-z_n^2)G_{z_m}^2 + 2GG_{z_n}z_n - G^2\right]\Delta P - z_n z_m P_{z_n z_m} - \\ & - 2GG_{z_n}P_{z_n z_m}z_m + (z_n^2-1)G_{z_m}G_{z_l}P_{z_m z_l} = \\ & = -\alpha(1-z_n^2-G^2)^{-1/2}\left[1+G_{z_n}^2 - (z_nG_{z_n}-G)^2\right], \\ 3)\quad & |G_{z_n z_m}| = 0, \\ 4)\quad & |P_{z_n z_m}| = 0, \\ 5)\quad & P_{z_1 z_1}G_{z_2 z_2} + P_{z_2 z_2}G_{z_1 z_1} - 2P_{z_1 z_2}G_{z_1 z_2} = 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\Delta = \frac{\partial}{\partial z_1^2} + \frac{\partial}{\partial z_2^2}$.

Из третьего и четвертого уравнений системы (2.32) следует, что существуют такие дважды непрерывно-дифференцируемые функции R, Q, для которых [12, 15]

$$G_{z_2} = R(G_{z_1}), \quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}). \tag{2.33}$$

Подставляя соотношения (2.33) в пятое уравнение из (2.32), имеем

$$P_{z_1 z_1}Q_{z_1 z_1}(\dot{R} - \dot{Q})^2 = 0. \tag{2.34}$$

Далее необходимо отдельно рассмотреть следующие возможности:

I. $P_{z_1 z_1}G_{z_1 z_1} \neq 0$.
II. $P_{z_1 z_1} = G_{z_1 z_1} = 0$.
III. $P_{z_1 z_1} = 0, \quad G_{z_1 z_1} \neq 0$.
IV. $P_{z_1 z_1} \neq 0, \quad G_{z_1 z_1} = 0$.

В случае I из (2.34) немедленно следует, что $\dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1})$. Если $\ddot{Q} \neq 0$, то в силу (2.33) имеем цепочки равенств

$$P_{z_1z_1} = \ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1},$$
$$P_{z_1z_2} = \dot{Q}P_{z_1z_1} = \dot{R}\ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1},$$
$$P_{z_2z_2} = \dot{Q}^2P_{z_1z_1} = \dot{R}^2\ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1}.$$

С учетом этих соотношений система ДУЧП (2.32) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
&1)\quad \delta \equiv (1+\dot{R}^2)(1-G^2) - (z_1+z_2\dot{R})^2 + (1-z_n^2)(\dot{R}G_{z_1} - R)^2 + \\
&\qquad + 2G(z_1\dot{R} - z_2)(\dot{R}G_{z_1} - R) = 0,\\
&2)\quad \ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}\delta G_{z_1z_1} = -\alpha(1-z_n^2-G^2)^{-1/2}\times\\
&\qquad \times\left[1+G_{z_1}^2 + R^2 - (z_1G_{z_1} + z_2R - G)^2\right],\\
&3)\quad G_{z_2} = R(G_{z_1}),\\
&4)\quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}),\\
&5)\quad \dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}).
\end{aligned}\tag{2.35}$$

Из первых двух уравнений системы (2.35) следует, что

$$\alpha\left[1+G_{z_1}^2 + R^2 - (z_1G_{z_1} + z_2R - G)^2\right] \equiv \alpha\left[1 + G_{z_n}^2 - (z_nG_{z_n} - G)^2\right] = 0.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$1 + G_{z_n}^2 + (z_nG_{z_n} - G)^2 = 0.$$

В переменных v_n, $w(v_1, v_2)$ это соотношение имеет вид

$$1 + w_{v_n}^2 + (v_nw_{v_n} - w)^2 = 0. \tag{2.36}$$

Подставляя равенство (2.36) в (1.42), получаем следующую систему ДУЧП на функции w, Φ:

$$\begin{aligned}
&1)\quad (v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})w_{v_nv_m} = 0,\\
&2)\quad \det\|w_{v_nv_m}\| = 0,\\
&3)\quad (v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_nv_m} = 0,\\
&4)\quad \det\|\Phi_{v_nv_m}\| = 0,\\
&5)\quad \Phi_{v_1v_1}w_{v_2v_2} + \Phi_{v_2v_2}w_{v_1v_1} - 2\dot{\Phi}_{v_1v_2}w_{v_1v_2} = 0.
\end{aligned}\tag{2.37}$$

Из (2.36), (2.37) вытекает, что определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию, источником которого является предположение о том, что $\alpha \neq 0$. Следовательно, параметр α с необходимостью равен нулю.

Пусть теперь $\ddot{Q} = 0$ или $Q = \lambda_0P_{z_1} + \lambda_1$, где $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}^1$. Так как $\dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}) = \lambda_0$, то $R = \lambda_0G_{z_1} + \lambda_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}^1$. Следовательно, функции P, G удовлетворяют соотношениям вида

$$P_{z_2} = \lambda_0P_{z_1} + \lambda_1, \quad G_{z_2} = \lambda_0G_{z_1} + \lambda_2. \tag{2.38}$$

Легко видеть, что при $\lambda_0 \neq \pm i$ соотношения (2.38) с помощью вращений из группы $O(2)$ могут быть приведены к виду

$$P_{z_1} = \lambda_1, \quad G_{z_1} = \lambda_2$$

или $P_{z_1z_1} = G_{z_1z_1} = 0$. Но эти равенства противоречат предположению I.

Если $\lambda_0 = i$, то общее решение системы (2.38) может быть записано в виде

$$P = \frac{1}{2}\mu_1 z^* + f(z), \quad G = \frac{1}{2}\mu_2 z^* + g(z),$$

где f, g — произвольные гладкие функции; $\mu_n = -i\lambda_n$, $z = z_1 + iz_2$, $z^* = z_1 - iz_2$.

Подставляя эти выражения в уравнения 1), 2) из (2.32), имеем

$$\begin{aligned} &\ddot{g}(z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2) = 0, \\ &\ddot{f}(z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2) = \alpha \left[1 - zz^* - \left(\frac{1}{2}\mu_2 z^* + g\right)^2\right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \left[1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Так как по условию I $G_{z_1z_1} \neq 0$, то $\ddot{g} \neq 0$. Следователъно, выполнено равенство

$$z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2 = 0, \tag{2.40}$$

причем $\mu_2 \neq 0$. Разрешая (2.41) относительно функции $g(z)$, имеем

$$g(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{z}\right). \tag{2.41}$$

Функция (2.41) тождественно удовлетворяет равенству

$$1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2 = 0,$$

из которого вытекает справедливость соотношения

$$1 + G_{z_n}^2 - (z_n G_{z_n} - G)^2|_{G = \frac{1}{2}\mu_2 z^* + g(z)} = 1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2 = 0.$$

Возвращаясь к переменным v_n, $w(v_1, v_2)$, переписываем это равенство в виде

$$1 + w_{v_n}^2 + (v_n w_{v_n} - w)^2 = 0.$$

Из полученного соотношения в силу уравнений (1.42) следует, что определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что случай $\lambda_0 = -i$ также приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь случай II. Подставляя в уравнения 3),4) из (2.32) равенства $P_{z_1z_1} = 0$, $G_{z_1z_1} = 0$, имеем

$$P_{z_1z_2} = G_{z_1z_2} = 0,$$

откуда

$$P = \lambda_1 z_1 + f(z_2), \quad G = \lambda_2 z_1 + g(z_2). \tag{2.42}$$

В (2.42) $f, g \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции; $\lambda_n \in \mathbb{C}^1$.

Подставляя выражения (2.42) в остальные уравнения системы (2.32), убеждаемся в том, что пятое уравнение выполняется тождественно, а первое и второе представляются в виде

$$\begin{aligned} &1) \quad \ddot{g}\left[(1 + \lambda_2^2)(1 - z_2^2) - g^2\right] = 0, \\ &2) \quad \ddot{f}\left[(1 + \lambda_2^2)(1 - z_2^2) - g^2\right] = -\alpha\left[1 - z_n^2 - (\lambda_2 z_1 + g)^2\right]^{-1/2} \times \\ &\qquad \times \left[1 + \lambda_2^2 + \dot{g}^2 - (z_2\dot{g} - g)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Если $\alpha \neq 0$, то необходимым условием совместности системы (2.43) является требование, чтобы правая часть уравнения 2) не зависела от z_1. Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях z_1, имеем

$$1+\lambda_2^2=0, \quad g=0.$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$1+G_{z_n}^2-(z_nG_{z_n}-G)^2|_{G=\lambda_2 z_1+g(z_2)}=1+\lambda_2^2+\dot{g}^2-(z_2\dot{g}-g)^2=0,$$

откуда в силу уравнений (1.42) вытекает равенство нулю определителя (1.39). Итак, мы пришли к противоречию, источником которого является предположение о том, что $\alpha \neq 0$. Следовательно, параметр α с необходимостью равен нулю.

Обратимся к случаю III. При $G_{z_1z_1} \neq 0$, $P_{z_1z_1}=0$ из четвертого и пятого уравнений системы ДУЧП (2.32) следует, что

$$P_{z_1z_2}=P_{z_2z_2}=0.$$

Подстановка полученных результатов в уравнение 2) из (2.32) приводит к такому соотношению

$$\alpha\left[1+G_{z_n}^2-(z_nG_{z_n}-G)^2\right]=0.$$

Второй сомножитель не равен нулю, так как в противном случае определитель (1.39) равен нулю, что невозможно. Следовательно, $\alpha=0$.

Нам осталось рассмотреть случай IV. При $G_{z_1z_1}=0$, $P_{z_1z_1}\neq 0$ из третьего и пятого уравнений система (2.32) вытекают такие соотношения:

$$G_{z_1z_2}=G_{z_2z_2}=0,$$

откуда

$$G=\lambda_nz_n+\lambda_0, \quad \lambda_n,\lambda_0\in\mathbb{C}^1. \tag{2.44}$$

Кроме того, из четвертого уравнения систему (2.32) следует существование дважды непрерывно-дифференцируемой функции $Q(P_{z_1})$ такой, что

$$P_{z_2}=Q(P_{z_1}). \tag{2.45}$$

Подставляя полученные результаты в уравнения 1), 2) из (2.32), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}&\Big\{(1+\dot{Q}^2)\left[1-(\lambda_nz_n+\lambda_0)^2\right]-(z_1+z_2\dot{Q})^2+(1-z_n^2)(\lambda_1\dot{Q}-\lambda_2)^2+\\&\quad+2(\lambda_nz_n+\lambda_0)(z_1\dot{Q}-z_2)(\lambda_1\dot{Q}-\lambda_2)\Big\}P_{z_1z_1}=\\&\quad=-\alpha\left[1-z_n^2-(\lambda_nz_n+\lambda_0)^2\right]^{-1/2}(1+\lambda_n^2-\lambda_0^2),\end{aligned} \tag{2.46}$$

причем множитель $1+\lambda_n^2-\lambda_0^2$ отличен от нуля, так как в противном случае определитель (1.39) равен нулю, что невозможно.

Используя вращения из группы $O(2)$, выражение (2.44) можно преобразовать к виду

$$\text{а)}\ \ G=\lambda z_1+\lambda_0, \quad \text{при}\ \ \lambda_n^2\neq 0; \tag{2.47а}$$

б) $G = \lambda(z_1 + i\lambda_2) + \lambda_0, \quad \text{при} \quad \lambda_n^2 = 0;$ (2.47б)

Пусть G задается формулой (2.47а). Подставляя $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$ в (2.46), имеем

$$\begin{aligned}&\Big\{(1+\dot{Q}^2)\left[1-(\lambda z_1+\lambda_0)^2\right]-(z_1+z_2\dot{Q})^2+\\&\quad+\lambda^2(1-z_n^2)\dot{Q}^2+2\lambda(\lambda z_1+\lambda_0)(z_1\dot{Q}-z_2)\dot{Q}\Big\}P_{z_1z_1}=\\&\quad=-\alpha\left[1-z_n^2-(\lambda z_1+\lambda_0)^2\right]^{-1/2}(1+\lambda^2-\lambda_0^2).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Совершим в ДУЧП (2.45), (2.48) преобразование Эйлера [17]

$$\begin{aligned}&y_1=P_{z_1},\quad y_2=z_2,\quad H=z_1P_{z_1}P_{z_1}-P,\quad H_{y_1}=z_1,\quad H_{y_2}=-P_{z_2},\\&H_{y_1y_1}=(P_{z_1z_1})^{-1},\quad H_{y_1y_2}=-P_{z_1z_2}(P_{z_1z_1})^{-1},\\&H_{y_2y_2}=-\det\|P_{z_nz_m}\|(P_{z_1z_1})^{-1}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

В новых переменных y_n, $H(y_1, y_2)$ уравнение (2.45) линеаризуется

$$H_{y_2} = -Q(y_1),$$

откуда

$$H = -Q(y_1)y_2 + Z(y_1), \tag{2.50}$$

где $Z(y_1) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя выражение (2.50) в ДУЧП (2.48), записанное в переменных y_n, $H(y_1, y_2)$, имеем

$$\begin{aligned}&(-\ddot{Q}_{y_2}+\ddot{Z})^{-1}\Big[1+(1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2-\dot{Z}^2-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\Big]=\\&=-\alpha\Big[1-y_2^2-(y_2\dot{Q}-\dot{Z})^2(1+\lambda^2)+2\lambda_0\lambda(y_2\dot{Q}-\dot{Z})-\lambda_0^2\Big]^{-1/2}(1+\lambda^2-\lambda_0^2).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Предположим, что величина

$$\Delta = 1 + (1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2 - \dot{Z}^2 - (\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2$$

не равна нулю. Тогда в силу независимости функций Q, Z от y_2, необходимым условием расщепления уравнения (2.15) попеременной y_2 является требование, чтобы выражение под корнем было точным квадратом. Непосредственный подсчет показывает, что детерминант этого выражения в точности равен Δ. Следовательно, при $\Delta \neq 0$, уравнение (2.15) не имеет решений. Из этого заключаем, что необходимым условием совместности уравнения (2.51) является равенство

$$1 + (1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2 - \dot{Z}^2 - (\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2 = 0. \tag{2.52}$$

Сравнивая (2.52) и (2.51), приходим к выводу, что $\alpha = 0$.

Пусть теперь G задается формулой (2.47б). Переходя в уравнении (2.46) при $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = i\lambda$ к новым переменным y_n, $H(y_1, y_2)$ согласно формул (2.49) и подставляя в полученное соотношение выражение (2.50), имеем

$$\begin{aligned}&(-\ddot{Q}_{y_2}+\ddot{Z})^{-1}\Big[(1+\dot{Q}^2)(1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2)-\dot{Z}^2+\\&\quad+\lambda^2(\dot{Q}-i)^2(1-\dot{Z}^2)+2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)\dot{Q}\dot{Z}(\dot{Q}-i)\Big]=\\&\quad=-\alpha\Big[1-y_2^2-(\dot{Q}_{y_2}-\dot{Z})^2-(\lambda_{y_2}(i-\dot{Q})+\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\Big]^{-1/2}(1-\lambda_0^2),\end{aligned} \tag{2.53}$$

причем $1 - \lambda_0^2 \neq 0$.

Предположим, что величина

$$\tilde{\Delta} = (1+\dot{Q}^2)[1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2] - \dot{Z}^2 + \\ + \lambda^2(\dot{Q}-i)^2)(1-\dot{Z}^2) + 2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)\dot{Q}\dot{Z}(\dot{Q}-i) \tag{2.54}$$

отлична от нуля. Тогда, в силу независимости функций Q, Z от y_2, необходимым условием расщепления уравнения (2.53) по y_2 является требование, чтобы выражение под корнем было точным квадратом. Непосредственный подсчет показывает, что детерминант этого выражения равен $\tilde{\Delta}$. Отсюда заключаем, что необходимым условием совместности уравнения (2.53) является равенство $\tilde{\Delta}=0$. Сравнивая это соотношение с (2.53), приходим к выводу, что $\alpha = 0$.

Таким образом, доказано, что переопределенная система ДУЧП (2.32) (а, следовательно, и (1.38)) может быть совместной только тогда, когда $\alpha = 0$.

Ввиду того, что среди всех редуцированных систем уравнений (1.38), (1.40)–(1.44), только системы (1.38), (1.40) содержат числовые параметры α, β, из всего вышеизложенного вытекает следующее утверждение: необходимым условием совместности уравнений (1.2) является такое соотношение:

$$F(u) = N(u+c)^{-1}, \tag{2.55}$$

где $c \in \mathbb{C}^1$ — произвольная константа, $N = 0, 1, 2, 3$.

Но равенство (2.55) является также и достаточным условием совместности системы ДУЧП (1.2), так как последняя имеет при $F(u)$ вида (2.55) следующие решения:

$$N=0, \quad u = -c + x_0;$$
$$N=1, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2};$$
$$N=2, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2};$$
$$N=3, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2}.$$

Подставляя (2.55) в (2.2) и совершая замену переменных, обратную к (1.1), приходим к ДУЧП вида (1а,б), где функции $F_1(u)$, $F_2(u)$ задаются выражениями (2.1). Теорема доказана.

§ 3. Интегрирование уравнений Даламбера–Гамильтона

В основе предлагаемого нами подхода к интегрированию переопределенной системы ДУЧП (1.2) также лежит метод нелокальных (контактных) преобразований. Явный вид используемых контактных преобразований существенно зависит от ранга r матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$, поэтому следует отдельно исследовать каждый из случаев $r = 1, 2, 3$.

I. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$. Как было установлено в §§ 1, 2, при таком условии система (1.2) совместна, если и только если $F(u) = 3(u+c)^{-1}$, причем ее общее решение задается следующими формулами:

$$u + c = x_0(1+v_a^2)^{1/2} + x_a v_a + \Phi(v_1, v_2, v_3), \tag{3.1}$$

где $v_a = v_a(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями

$$x_a + x_0 v_a (1+v_b^2)^{1/2} + \Phi_{v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3}, \tag{3.2}$$

а скалярная функция $\Phi(v)$ удовлетворяет переопределенной системе ДУЧП (1.38).

В предыдущем параграфе система ДУЧП (1.38) с помощью локальной замены переменных (2.2) была приведена к виду (2.3). Далее следует отдельно исследовать две возможности:

1) $\operatorname{rank} \|p_{z_a z_b}\| = 1$,
2) $\operatorname{rank} \|p_{z_a z_b}\| = 2$,

Пусть имеет место 1). Если $p_{z_3 z_3} = 0$, то из формул (2.5) сразу же следует, что $p_{z_3 z_n} = p_{z_n z_m} = 0$, $n, m = 1, 2$, откуда

$$p(z) = c_a z_a + c_0, \quad c_\mu \in \mathbb{C}^1. \tag{3.3}$$

Если $p_{z_3 z_3} \neq 0$, то система (2.3) после преобразования Эйлера (2.7) переписывается в виде (2.8), причем $\alpha = 0$. Общее решение уравнений (2.8) задается формулой (2.9), где $R_n(y_3)$, $Q(y_3)$ — произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие, согласно (2.10), следующему соотношению:

$$1 + \dot{R}_n^2 - \dot{Q}^2 = 0, \tag{3.4}$$

причем функции $\ddot{R}_n$, $\ddot{Q}$ одновременно не равны нулю.

Возвращаясь по формулам (2.7) к переменным z_n, $p(z)$, имеем

$$p(z) = R_n(\tau) z_n + \tau z_3 - Q(\tau), \tag{3.5}$$

где $\tau = \tau(z_1, z_2)$ определяется из соотношения

$$z_3 + \dot{R}_n(\tau) z_n - \dot{Q}(\tau) = 0, \tag{3.6}$$

$R_n(\tau), Q(\tau) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие (3.4).

Переписывая формулы (3.3)–(3.6) в переменных v_a, $\Phi(v)$, имеем следующие классы точных решений системы (1.38):

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Phi(v) = c_a v_a + c_0 (1 + v_a^2)^{1/2};\\
&2) \quad \Phi(v) = R_n(\tau) v_n + \tau v_3 - (1 + v_a^2)^{1/2} Q(\tau),\\
&\qquad 0 = \dot{R}_n(\tau) v_n + v_3 - (1 + v_a^2)^{1/2} \dot{Q}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $c_\mu \in \mathbb{C}^1$ — произвольные константы, $R_n(\tau)$, $Q(\tau)$ — произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие соотношению (3.4).

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда система ДУЧП (2.3) после преобразования Эйлера (2.15) принимает вид (2.16). Общее решение уравнений (2.16) задается формулой (2.17), где $R(y_1, y_2)$, $Q(y_1, y_2)$ — произвольные решения одной из систем ДУЧП (2.20), (2.21) при $\alpha = 0$, такие, что $\det \|iQ_{y_n y_m} - y_3 R_{y_n y_m}\| \neq 0$. В силу последнего условия величины $1 + R_{y_n}^2$, $1 + Q_{y_n}^2$ одновременно не равны нулю и, следовательно, обе системы ДУЧП (2.20), (2.21) при $\alpha = 0$ эквивалентны системе трех уравнений вида

$$\begin{aligned}
&1) \quad (1 + Q_{y_n}^2)(1 + R_{y_m}^2) - (R_{y_n} Q_{y_n})^2 = 0,\\
&2) \quad (1 + Q_{y_n}^2 + R_{y_n}^2)\Delta Q - (R_{y_n} R_{y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) Q_{y_n y_m} = 0,\\
&3) \quad (1 + Q_{y_n}^2 + R_{y_n}^2)\Delta R - (R_{y_n} R_{y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) R_{y_n y_m} = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя соотношение (2.22), нетрудно показать, что третье уравнение из (3.8) является следствием первых двух. Система ДУЧП

$$\begin{aligned} &1)\quad (1+Q_{y_n}^2)(1+R_{y_m}^2)-(R_{y_n}Q_{y_n})^2=0,\\ &2)\quad (1+Q_{y_n}^2+R_{y_n}^2)\Delta Q-(R_{y_n}R_{y_m}+Q_{y_n}Q_{y_m})Q_{y_ny_m}=0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

согласно теоремы Коши–Ковалевской [10, 18] находится в инволюции, и ее общее решение записывается через три произвольные функции от одной переменной.

Возвращаясь согласно формул (2.15), (2.2) к переменным v_a, $\Phi(v)$, получаем следующий класс решений системы (1.38) (при $\alpha=\beta=0$):

$$\Phi(v)=y_nv_n+R(y_1,y_2)v_3-i(1+v_a^2)^{1/2}Q(y_1,y_2), \tag{3.10}$$

где $y_n=y_n(v)$ определяются из соотношений

$$v_n+v_3R_{y_n}-i(1+v_a^2)^{1/2}Q_{y_n}=0, \tag{3.11}$$

а $R,Q\in C^2(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^1)$ — произвольные решения системы ДУЧП (3.9), удовлетворяющие условию (2.19).

Таким образом, в случае, когда ранг матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$ равен трем, общее решение уравнений Даламбера–Гамильтона (1.2) с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается неявными формулами (3.1), (3.7), (3.10).

II. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\|=2$. Согласно результатов §§ 1, 2, система (1.2) совместна, если и только если $F(u)$ задается одной из формул

$$F(u)=N(u+c)^{-1},\quad N=0,1,2,$$

причем ее общее решение имеет вид

$$u+c=x_0(1+v_n^2+w^2)^{1/2}+x_nv_n+x_3w+\Phi, \tag{3.12}$$

где $v_n=v_n(x)$ — гладкие функции, определяемые соотношениями

$$x_n+x_3w_{v_n}+x_0(v_n+ww_{v_n})(1+v_n^2+w^2)^{-1/2}+\Phi_{v_n}=0,\quad n=1,2, \tag{3.13}$$

а скалярные функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1,v_2)$ удовлетворяют одной из систем ДУЧП (1.40)–(1.42).

1. $F(u)=0$. В этом случае функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1v_2)$ удовлетворяют системе уравнений (1.40). Эта система согласно теоремы Коши–Ковалевской [10, 18] находится в инволюции, и ее общее решение выражается через три произвольные функции одной переменной.

2. $F(u)=(u+c)^{-1}$. При таком условии функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1v_2)$ удовлетворяют переопределенной системе ДУЧП (1.41). Проинтегрируем сначала первые два уравнения этой системы, совершив в них следующую замену независимых переменных:

$$v_1=R\cos\varphi,\quad v_2=R\sin\varphi. \tag{3.14}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} &1)\quad 1+w_R^2+R^{-2}w_\varphi^2+(R_{w_R}-w)^2=c,\\ &2)\quad (R^{-1}w_{R\varphi}-R^{-2}w_\varphi)^2+w_{RR}(R^{-2}w_{\varphi\varphi}+R^{-1}w_R)=0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $w_R=\partial w/\partial R$, $w_\varphi=\partial w/\partial\varphi$ и т.д.

Дописывая к системе (3.15) два ДУЧП, который получаются из 1) дифференцированием по переменным R, φ, приходим к системе четырех уравнений на $w = w(R, \varphi)$. Исключая из этой системы функции w_φ, $w_{\varphi R}$, $w_{\varphi\varphi}$, имеем

$$\{R[R(Rw_R - w) + w_R]w_{RR}\}^2 = 0. \tag{3.16}$$

Если выполнено равенство

$$R(R_{w_R} - w) + w_R = 0,$$

то $w = \lambda(\varphi)(1 + R^2)^{1/2}$, где $\lambda(\varphi) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подстановка полученного соотношения в первое уравнение системы (3.15) дает такое условие $\lambda^2 = -1$. Но тогда $1 + v_n^2 + w^2 \equiv 1 + R^2 + \lambda^2(1 + R^2) = 0$, что невозможно.

Следовательно, ДУЧП (3.16) эквивалентно уравнению $w_{RR} = 0$, общее решение которого дается формулой

$$w = \lambda_1 R + \lambda_2, \tag{3.17}$$

где $\lambda_n = \lambda_n(\varphi) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Подставляя (3.17) в уравнение 1) из (3.15) и расщепляя полученное соотношение по степеням R, приходим к системе ОДУ на $\lambda_n(\varphi)$

$$1 + \lambda_n^2 + \dot\lambda_1^2 = 0, \quad \dot\lambda_2 = 0.$$

Общее решение выписанной системы дается одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = i(1 + c_2^2)^{1/2} R \sin(\varphi + c_1), \quad \lambda_2 = c_2; \\ &\lambda_1 = c_1 \exp(\pm i\varphi), \quad \lambda_2 = \pm i. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Подстановка выражений (3.18) в (3.17) дает общее решение система ДУЧП (3.15), которое в исходных переменных v_n может быть представлено в виде

$$w = \lambda_n v_n + \lambda_3, \tag{3.19а}$$

где λ_n, λ_3 — произвольные комплексные постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\lambda_n^2 + \lambda_3^2 + 1 = 0. \tag{3.19б}$$

Подставляя (3.19а) в третье и четвертое уравнения системы (1.41), приходим к следующей системе ДУЧП на $\Phi(v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} 1)\quad &\left[1 + v_n^2 + (\lambda_n v_n + \lambda_3)^2\right] \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = \\ &\qquad = (v_n \Phi_{v_n} - \Phi)[(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m}], \\ 2)\quad &\lambda_3[(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m}] = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Если справедливо равенство

$$(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m} = 0,$$

то, в силу условия $1 + v_n^2 + w^2 \neq 0$, из первого уравнения системы (3.20) вытекает, что

$$\det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0.$$

Легко видеть, что при этом определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию. Следовательно, $\lambda_3 = 0$, и система (3.20) сводится к одному уравнению

$$\left[1 + v_n^2 + (\lambda_n v_n)^2\right] \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = (v_n \Phi_{v_n} - \Phi)\lambda_n \lambda_m \Phi_{v_n v_m}. \tag{3.21}$$

Далее необходимо отдельно рассмотреть два случая

а) $\det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0$,

б) $\det \|\Phi_{v_n v_m}\| \neq 0$.

В случае а) уравнение (3.21) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &1) \quad \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0, \\ &2) \quad v_n \Phi_{v_n} - \Phi = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Общее решение уравнения 2) из (3.22) задается формулой

$$\Phi = (v_n^2)^{1/2} \Psi(v_1 v_2^{-1}), \tag{3.23}$$

где $\Psi \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Непосредственная проверка показывает, что функция (3.23) тождественно удовлетворяет первому уравнению системы (3.22). Следовательно, формула (3.23) определяет общее решение системы ДУЧП (3.22).

Обратимся теперь к случаю б). Используя преобразования из группы $O(2)$, уравнение (3.21) с дополнительным условием (3.19б) можно привести к виду

$$(1 + v_2^2) \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = (\Phi - v_n \Phi_{v_n})\Phi_{v_1 v_1}. \tag{3.24}$$

Совершим в (3.24) преобразование Лежандра [11, 12]

$$\begin{aligned} &v_n = H_{y_n}, \quad \Phi_{v_n} = y_n, \quad \Phi = y_n H_{y_n} - H, \quad H_{y_1 y_1} = \delta^{-1} \Phi_{v_2 v_2}, \\ &H_{y_2 y_2} = \delta^{-1} \Phi_{v_1 v_1}, \quad H_{y_1 y_2} = -\delta^{-1} \Phi_{v_1 v_2}, \quad \delta = \det \|\Phi_{v_n v_m}\|, \end{aligned} \tag{3.25}$$

откуда

$$1 + H_{y_2}^2 + H H_{y_2 y_2} = 0. \tag{3.26}$$

Уравнение (3.26) интегрируется, его общее решение имеет вид

$$H = \left[-y_2^2 + \Psi_1(y_1) y_2 + \Psi_2(y_1)\right]^{1/2},$$

где $\Psi_n \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Возвращаясь согласно формул (3.25) к переменным v_n, $\Phi(v)$, получаем общее решение ДУЧП (3.24)

$$\Phi = v_n y_n - (\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{1/2}, \tag{3.27}$$

где $y_n = y_n(v_1 v_2)$ — гладкие функции, определяемые из соотношений

$$\begin{aligned} &v_1 - \frac{1}{2}(\dot{\Psi}_1 y_2 + \dot{\Psi}_2)(\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{-1/2} = 0, \\ &v_2 + \frac{1}{2}(2y_2 - \Psi_1)(\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{-1/2} = 0, \end{aligned}$$

$\Psi_n(y_1) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — производные функции.

3. $F(u) = 2(u+c)^{-1}$. В этом случае функции $w(v_1 v_2)$, $\Phi(v_1, v_2)$ определяются из системы ДУЧП (2.42) при $\alpha = 0$. Последняя с помощью локальной замены переменных (2.31) приводится к виду (2.32) при $\alpha = 0$.

Далее необходимо отдельно рассмотреть такие возможности

а) $P_{z_1 z_1} G_{z_1 z_1} \neq 0$;

б) $P_{z_1 z_1} = G_{z_1 z_1} = 0$;

в) $P_{z_1 z_1} = 0, \quad G_{z_1 z_1} \neq 0$;

г) $P_{z_1 z_1} \neq 0, \quad G_{z_1 z_1} = 0$.

Согласно результатов § 2, в случае а) система (2.32) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
&1)\quad (1+\dot{R}^2)(1-G^2) - (z_1 + z_2 \dot{R})^2 + (1 - z_n^2)(\dot{R} G_{z_1} - R)^2 + \\
&\qquad + 2G(z_1 \dot{R} - z_2)(\dot{R} G_{z_1} - R) = 0, \\
&2)\quad G_{z_2} = R(G_{z_1}), \\
&3)\quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}), \\
&4)\quad \dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}),
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

причем $\ddot{Q} \neq 0$.

Проинтегрируем уравнения 1), 2) с помощью преобразования Эйлера (2.49), где вместо функции $P(z)$ следует подставить $G(z)$. В новых переменных y_n, $H(y)$ уравнение 2) принимает вид

$$H_{y_2} = -R(y_1),$$

откуда

$$H = -R(y_1) y_2 + Z(y_1). \tag{3.29}$$

В (3.29) $Z \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Переписывая первое уравнение системы (3.28) в переменных y_n, $H(y)$ и подставляя в полученное соотношение формулу (3.29), имеем

$$1 + \dot{R}^2 - \dot{Z}^2 + (y_1 \dot{R} - R)^2 - (y_1 \dot{Z} - Z)^2 - (\dot{R} Z - \dot{Z} R)^2 = 0. \tag{3.30}$$

Возвращаясь к переменным z_n, $G(z)$, получаем общее решение уравнений 1), 2) системы ДУЧП (3.28)

$$G = y_1 z_1 + R(y_1) z_2 - z(y_1), \tag{3.31}$$

где $y_1 = y_1(z_1, z_2)$ — гладкая функция, определяемая неявным соотношением

$$z_1 + \dot{R}(y_1) z_2 - \dot{Z}(y_1) = 0, \tag{3.32}$$

а $R, Q \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, связанные равенством (3.30). Далее, поскольку $\ddot{Q} \neq 0$, то функция $\dot{Q} = \dot{Q}(P_{z_1})$ имеет обратную, которую обозначим символом A. С учетом этого факта уравнения 3), 4) переписываются в виде

$$P_{z_1} = A(\dot{R}(G_{z_1})), \quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}) = Q(A(\dot{R}(G_{z_1}))). \tag{3.33}$$

Необходимым и достаточным условием совместности переопределенной системы ДУЧП (3.33) является выполнение равенства

$$\partial P_{z_1}/\partial_{z_2} = \partial P_{z_2}/\partial z_1. \tag{3.34}$$

Так как, в силу уравнения 2) из (3.28), имеют место цепочки равенств

$$\partial P_{z_1}/\partial z_2 = \dot{A}(\dot{R}(G_{z_1}))\ddot{R}(G_{z_1})G_{z_1z_2} = \dot{A}(\dot{R}(G_{z_1}))\ddot{R}(G_{z_1})\dot{R}(G_{z_1})G_{z_1z_1},$$
$$\partial P_{z_2}/\partial z_1 = \underbrace{\dot{Q}(A(\dot{R}(G_{z_1})))}_{\dot{R}(G_{z_1})}\dot{A}(\dot{R}(G_{z_1}))\ddot{R}(G_{z_1})G_{z_1z_1},$$

то условие (3.34) выполнено, т.е. система ДУЧП (3.33) находится в инволюции. Ее общее решение может быть представлено в виде

$$P = \int A(\dot{R}(G_{z_1}))dz_1. \tag{3.35}$$

Таким образом, формулы (3.30)–(3.33), (3.35) задают общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, $P_{z_1z_1}G_{z_1z_1} \neq 0$.

Пусть имеет место случай б), т.е. $P_{z_1z_1} = G_{z_1z_1} = 0$. Тогда функции $P(z)$, $G(z)$ имеют вид (2.42), причем $f = f(z_2)$, $g = g(z_2)$ удовлетворяют системе ОДУ (2.43) при $\alpha = 0$. Эта система имеет два класса решений:

1) $g = c_1z_2 + c_2, \quad f = c_3z_2 + c_4;$
2) $g = (1 + \lambda_2^2)^{1/2}(1 - z_2^2)^{1/2}.$

Здесь $f \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, $c_1, \ldots, c_4, \lambda_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Подстановка полученных выражений в формулы (2.42) дает общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, $G_{z_1z_1} = P_{z_1z_1} = 0$, которое задается одним из следующих выражений:

$$\begin{aligned} &1) \quad G = c_nz_n + c_3, \quad P = c_{3+n}z_n + c_6;\\ &2) \quad G = (1 + c_1^2)^{1/2}(1 - z_2^2)^{1/2} + c_1z_1, \quad P = c_2z_1 + f(z_2), \end{aligned} \tag{3.36}$$

где $c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{C}^1$ — произвольные константы.

Рассмотрим теперь случаи в). Как было установлено в предыдущем параграфе функция $P(z)$ определяется таким соотношением:

$$P = c_nz_n + c_3, \quad c_a \in \mathbb{C}^1. \tag{3.37}$$

При этом уравнения 2), 4), 5) системы (2.32) удовлетворяются тождественно, а общее решение системы ДУЧП 1), 3) задается формулами (3.30)–(3.32).

Нам осталось проинтегрировать систему (2.32) при $G_{z_1z_1} = 0$, $P_{z_1z_1} \neq 0$. В этом случае функция $G(z)$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (2.47а,б). Для того, чтобы получить выражение для функции $P(z)$, необходимо переписать формулу (2.50) в переменных z_n, $P(z)$ согласно (2.49).

В результате имеем

$$P = y_1z_1 + Q(y_1)z_2 - Z(y_1), \tag{3.38}$$

где $y_1 = y_1(z_1, z_2)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$z_1 + \dot{Q}(y_1)z_2 - \dot{z}(y_1) = 0,$$

а $Q, Z \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие равенству (2.52) (если $G(z)$ задается формулой (2.47а)) либо равенству

$$\begin{aligned}(1+\dot{Q}^2)\Big[1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\Big] - \dot{Z}^2 + \lambda^2(\dot{Q}-i)^2(1-\dot{Z}^2) +\\ + 2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)(\dot{Q}-i)\dot{Q}\dot{Z} = 0\end{aligned} \tag{3.39}$$

(если $G(z)$ задается формулой (2.47б)).

Таким образом, мы доказали, что общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, задается формулами ((3.31), (3.35)), (3.36), ((3.37), (3.31)), ((2.47а,б), (3.38)). Для того, чтобы получить общее решение системы (1.42), следует в этих выражениях совершить замену переменных, обратную к (2.31),

$$\begin{aligned}&v_n = z_n(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2},\\ &w(v) = G(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2},\\ &\Phi(v) = P(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Мы не приводим соответствующие формулы из-за их громоздкости.

III. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$. Согласно результатов §§ 1, 2 система (1.2) совместна, если и только если $F(u)$ задается одной из формул

$$F(u) = N(u+c)^{-1}, \quad N = 0, 1,$$

причем ее общее решение, определяемое с точностью до $P(1,3)$-сопряженности, имеет вид

$$u(x) = x_0(1 + w_a^2(v))^{1/2} + x_a w_a(v) + \Phi(v), \tag{3.41}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, которая находится из соотношения

$$x_0 w_a \dot{w}_a (1 + w_b^2)^{-1/2} + x_a \dot{w}_a + \dot{\Phi} = 0, \tag{3.42}$$

а $\Phi = \Phi(v), w_a = w_a(v) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие одной из систем ОДУ (1.43), (1.44).

1. $F(u) = 0$. Вводя сферическую систему координат

$$\begin{aligned}&w_1 = \rho(v)\cos\varphi(v)\cos\theta(v),\\ &w_2 = \rho(v)\sin\varphi(v)\cos\theta(v),\\ &w_3 = \rho(v)\sin\theta(v),\end{aligned}$$

переписываем систему (1.43) в виде

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 = -(v^2-1)^{-2},\\ &\rho = (v^2-1)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Следовательно, общее решение уравнений (1.43) задается формулами

$$\begin{aligned}&w_1 = (v^2-1)^{1/2}\cos\varphi\cos\theta, \quad w_2 = (v^2-1)^{1/2}\sin\varphi\cos\theta,\\ &w_3 = (v^2-1)^{1/2}\sin\theta,\end{aligned} \tag{3.43$'$}$$

где $\varphi(v)$, $\theta(v)$ — произвольные гладкие функции, связанные соотношением (3.43).

2. $F(u) = (u+c)^{-1}$. Умножая первое уравнение системы (1.44) на $\dot{w}_a$ и суммируя полученное равенство по a, приходим к ОДУ на функцию $f(v) \equiv \dot{w}_a^2(v) - 1$

$$\dot{f} + 2vf^2 = 0,$$

откуда $f(v) = (v^2 + c_0)^{-1}$, $c_0 \in \mathbb{C}^1$. С учетом этого система (1.44) перепишется в виде

$$\ddot{w}_a = -(v^2 + c_0)^{-1}(v\dot{w}_a - w_a), \quad \ddot{\Phi} = -(v^2 + c_0)^{-1}(v\dot{\Phi} - \Phi), \tag{3.44а}$$

$$\dot{w}_a^2 = (v^2 + c_0)^{-1}, \quad w_a^2 = v^2 - 1, \tag{3.44б}$$

Согласно [19], общее решение ОДУ

$$(v^2 + c_0)\ddot{h}(v) + v\dot{h}(v) - h(v) = 0,$$

задается следующими формулами:

$$1) \quad c_0 \neq 0, \quad h = c_1 v + c_2(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \quad c_n \in \mathbb{C}^1,$$
$$2) \quad c_0 = 0, \quad h = c_1 v + c_2 v^{-1}, \quad c_n \in \mathbb{C}^1,$$

Пусть вначале $c_0 \neq 0$, тогда общее решение уравнений (3.44а) имеет вид

$$w_a(v) = c_a v + d_a(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \quad \Phi(v) = \lambda_1 v + \lambda_2(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \tag{3.45}$$

где $c_a, d_a, \lambda_n \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные. Подставляя (3.45) в соотношения (3.44б) и расщепляя полученные равенства по степеням величины v, имеем

$$c_a d_a = 0, \quad c_a^2 + d_a^2 = 1, \quad c_a^2 = 1 + c_0^{-2}. \tag{3.46}$$

Используя преобразования из группы вращений O(3), векторы $\vec{c}$, $\vec{d}$, удовлетворяющие (3.46), можно привести к виду

$$\vec{c} = c_0^{-1}(1 + c_a^2)^{1/2}(1, 0, 0), \quad \vec{d} = ic_0^{-1}(0, 1, 0). \tag{3.47}$$

Подставляя формулы (3.45), (3.47) в (3.41), (3.42), имеем

$$u(x) = (x_0 + \lambda_1)v + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2} v x_1 + i(v^2 + c_0^2)^{1/2}(x_2 - i\lambda_2 c_0)\right],$$
$$x_0 + \lambda_1 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2} x_1 + iv(v^2 + c_0^2)^{-1/2}(x_2 - i\lambda_2 c_0)\right] = 0.$$

С помощью сдвигов по переменным x_0, x_2 это решение приводится к виду

$$u(x) = v x_0 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2} v x_1 + i(v^2 + c_0^2)^{1/2} x_2\right], \tag{3.48}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая соотношением

$$x_0 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2} x_1 + iv(v^2 + c_0^2)^{-1/2} x_2\right] = 0.$$

Обратимся теперь к случаю $c_0 = 0$. При таком условии общее решение системы ОДУ (3.44а) имеет вид

$$w_a = c_a v + d_a v^{-1}, \quad \Phi = \lambda_1 v + \lambda_2 v^{-1}, \tag{3.49}$$

где $c_a, d_a, \lambda_n \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные.

Подстановка полученных выражений в (3.44б) дает систему алгебраических уравнений на c_a, d_a

$$c_a^2 = 1, \quad c_a d_a = -\frac{1}{2}, \quad d_a^2 = 0.$$

Общее решение этих соотношений о точностью до $O(3)$-сопряженности можно представить в виде

$$\vec{c} = (1, 0, 0), \quad \vec{d} = -\frac{1}{2}(1, i, 0). \tag{3.50}$$

Подставляя формулы (3.49), (3.50) в (3.41), (3.42), получаем следующий класс решений системы ДУЧП (1.2):

$$u(x) = (x_0 + x_1 + \lambda_1)v - \frac{1}{2}v^{-1}(x_1 + ix_2 - 2\lambda_2),$$
$$x_0 + x_1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}v^{-2}(x_1 + ix_2 - 2\lambda_2) = 0.$$

С помощью сдвигов по переменным x_0, x_2 это решение приводится к виду

$$u(x) = (x_0 + x_1)v - \frac{1}{2}v^{-1}(x_1 + ix_2), \tag{3.51}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$x_0 + x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + ix_2)v^{-2} = 0.$$

Таким образом, при условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$ общее решение системы ДУЧП (1.2) с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (3.43′), (3.48), (3.51).

Нами получено полное описание решений системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона (1.2). В ряде случаев удается разрешить неявные соотношения, с помощью которых задаются решения, относительно функции $u(x)$ и тем самым построить решение уравнений (1.2) в явном виде.

В качестве примера рассмотрим решение системы ДУЧП (1.2), определяемое неявными формулами (3.1), (3.2), (3.7). Подставляя выражение $\Phi = c_a v_a + c_0(1 + v_b^2)^{1/2}$ в равенства (3.1), (3.2), имеем

$$u + c = \tilde{x}(1 + v_a^2)^{1/2} + \tilde{x}_a v_a, \quad \tilde{x}_a + \tilde{x}_0(1 + v_b^2)^{-1/2} = 0, \tag{3.52}$$

где $\tilde{x}_\mu = x_\mu + c_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$.

Разрешая последние три уравнения этой системы относительно функций $v_a = v_a(x)$, имеем

$$v_a(x) = -\tilde{x}_a(\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu)^{-1/2}, \quad a = \overline{1,3}.$$

Подставляя полученный результат в первое уравнение из (3.52), приходим к точному решению системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона

$$u + c = (\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu)^{1/2} \equiv [(x_\mu + c_\mu)(x^\mu + c^\mu)]^{1/2},$$

которое удовлетворяет уравнениям (1.2) при $F(u) = 3(u + c)^{-1}$.

Ниже приводятся некоторые другие классы точных решений системы уравнений Даламбера–Гамильтона, полученные аналогичным образом,

$$\underline{F(u) = 3(u+c)^{-1}}:$$

$$(u+c)^2 - \tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu = (\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) w\left((\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3)(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)^{-1}\right) - \\ - (\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2) \int^{(\tilde{x}_0+\tilde{x}_3)(\tilde{x}_1+i\tilde{x}_2)^{-1}} z\dot{w}(z)dz,$$

$$\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} = \\ = \tilde{x}_1 \cos\left\{\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} - \tilde{x}_0\right\} - \\ - \tilde{x}_2 \sin\left\{\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} - \tilde{x}_0\right\};$$

$$\underline{F(u) = 2(u+c)^{-1}}:$$

$$(u+c)^2 = \tilde{x}_0 - \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2, \quad -(u+c)^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2;$$

$$\underline{F(u) = (u+c)^{-1}}:$$

$$(u+c)^2 = [\tilde{x}_0 + w_1(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)]^2 - [\tilde{x}_3 + w_2(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)]^2, \\ -(u+c)^2 = [\tilde{x}_1 + w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3)]^2 + [\tilde{x}_2 + w_2(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3)]^2,$$

$$\underline{F(u) = 0}:$$

$$i(u+c) = \tilde{x}_1 \cos w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) + \tilde{x}_2 \sin w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) + w_2(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3), \\ \tilde{x}_1 \sin w(u + c + \tilde{x}_0) + \tilde{x}_2 \cos w(u + c + \tilde{x}_0) + i\tilde{x}_3 = 0, \\ \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 \sin w_1(i(u+c) + \tilde{x}_3) + \tilde{x}_2 \cos w_1(i(u+c) + \tilde{x}_3) + w_2(i(u+c) + \tilde{x}_3) = 0.$$

Здесь $\tilde{x}_\mu = x_\mu + c_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$; $c_\mu \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные; $w, w_1, w_2 \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

В заключение кратко остановимся на геометрических свойствах решений систему ДУЧП Даламбера–Гамильтона (1.2). Для этого нам понадобятся следующие обозначения: $S(u) = \{x \in R(1,3) : u(x) = 0\}$ — поверхность уровня решения $u = u(x)$ системы (1.2); $U = \|g_{\mu\nu} u_{x_\mu} x_\nu\|^3_{\mu,\nu=0}$; $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x)$, $\mu = \overline{0,3}$ — собственное значение матрицы U.

Поскольку определитель матрицы U равен нулю, то одно из ее собственных значений (скажем λ_0) равно нулю. Исходя из общей теории поверхностей, можно сказать, что величины λ_1, λ_2, λ_3 — это главные кривизны поверхности $S(u)$ (см., например, [7]).

Замечательным является то обстоятельство, что в рассматриваемом случае эти кривизны вычисляются в явном виде. Согласно [1, 2], на решениях системы (1.2) тождественно выполнены следующие равенства:

$$\operatorname{Tr} U^a = (-1)^{a-1}[(a-1)!]^{-1} F^{(a-1)}(u), \quad a = \overline{1,3}, \tag{3.53}$$

где $F^{(r)} \equiv d^r F/du^r$.

Подставляя в (3.53) выражение $F(u) = N(u+c)^{-1}$, имеем

$$\operatorname{Tr} U^a = N(u+c)^{-a}, \quad a = \overline{(1,3)}. \tag{3.54}$$

С другой стороны, из общей теории матриц известно, что собственные значения матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lambda_0^a + \lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a = \operatorname{Tr} U^a, \quad a = \overline{1,3}. \tag{3.55}$$

Из формул (3.54), (3.55) заключаем, что главные кривизны λ_a поверхности $S(u)$, удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a = Nc^{-a}, \quad a = \overline{1,3}.$$

общее решение которых задается формулами

$$\begin{aligned}
&1) \quad N = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\\
&2) \quad N = 1, \quad \lambda_1 = c^{-1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\\
&3) \quad N = 2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = c^{-1}, \quad \lambda_3 = 0;\\
&4) \quad N = 3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = c^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Таким образом, главные кривизны поверхностей уровня решений системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона постоянны и задаются формулами (3.56).

Следовательно, с геометрической точки зрения имеется четыре неэквивалентных типа решений системы (1.2).

1. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.
2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3-4, 113–115.
3. Бейтмен Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, М., Физматгиз, 1958, 179 с.
4. Картан Э., Семейства изопараметрических поверхностей в пространствах постоянной кривизны, Собр. соч., т. 2, 1431–1445.
5. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Труды физико-математического ин-та им. В.А. Стеклова*, 1934, **5**, 259–264.
6. Collins C.B., Complex potential equations. I. A tecknique for solution, *Proc. Camb. Ph. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.
7. Cieciura G., Grundland A., A certain class of solutions of the nonlinear wave equation, *Math. Phys.*, 1984, **25**, № 12, 3460–3469.
8. Фущич В.И., Жданов Р.З., Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения, Киев, Наук., думка, 1991, 250 с.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, **21**, № 1, L5–L9.
10. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, в 2 т., М.–Л., ГИТТЛ, 1951, 476 с., 544 с.
11. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, New York, Acad. Press, 1965, V. 1, 511 p., 1972, V. 2, 301 p.
12. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 53 с.

13. Жданов Р.З., О линеаризации и общем решении двухмерных нелинейных уравнений Дирака–Гейзенберга и Максвелла–Дирака, *Мат. физика и нелин. мех.*, 1989, вып. II, 43–46.
14. Lie S., Vorlesungen über continuerliche Gruppen, Leipzig, Teubner, 1893, 805 s.
15. Жданов Р.З., Об общем решении многомерного уравнения Монжа–Ампера, в сб. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 13–16.
16. Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, М., Наука, 1976, 285 с.
17. Фущич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З., Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа–Ампера, Дирака, Препринт № 85.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 27 с.
18. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, 1984, 270 с.
19. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.
20. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., Наука, 1967, 575 с.