Нелиевские анзацы и точные решения нелинейного спинорного уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

С использованием условной симметрии нелинейного уравнения Дирака получены новые анзацы для спинорного поля, редуцирующие это уравнение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен новый класс точных решений нелинейного уравнения Дирака, содержащий три произвольных функции.

1. В [1–3] предложено естественное обобщение лиевского подхода к построению точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Оно основано на выделении из всего множества решений таких подмножеств, которые обладают более широкой симметрией, чем множество в целом. Для этого необходимо к заданному уравнению дописать дополнительные условия (уравнения) с тем, чтобы полученная система ДУЧП обладала более широкой симметрией, чем исходное уравнение и, кроме того, была совместной.

В настоящей работе, используя эту идею, построим семейство новых точных решений следующего нелинейного спинорного уравнения

$$\{i\gamma_\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\}\psi = 0, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентная комплексная функция-столбец, $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$, γ_μ — матрицы Дирака размерности 4×4, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$, $\lambda, k = \mathrm{const}$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 0 до 3.

2. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\psi(x) = \exp\{f_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\}\varphi(\omega), \tag{2}$$

где $\varphi(\omega)$ — четырехкомпонентная функция-столбец; $f_{\mu\nu}(x)$ и $\omega = \omega(x)$ — скалярные действительные функции, которые выбираются так, чтобы подстановка выражения (2) в уравнение (1) приводила последнее к системе обыкновенных уравнений дифференциальных (ОДУ) для $\varphi(\omega)$.

Далее, опишем все анзацы (2), редуцирующие систему нелинейных спинорных ДУЧП (1) к ОДУ при условии, что функции $f_{\mu\nu}$, ω имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
&f_{00} = -f_{11} = -f_{22} = -f_{33} = \frac{1}{4}\theta_0(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{01} = -f_{10} = f_{13} = -f_{31} = \frac{1}{2}\theta_1(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{02} = -f_{20} = f_{23} = -f_{32} = \frac{1}{2}\theta_2(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{03} = f_{30} = f_{12} = f_{21} = 0, \quad \omega = \omega(x_0+x_3, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Подставляя анзац

$$\psi(x) = \exp\{\theta_0 + (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0+\gamma_3)\}\varphi(\omega) \tag{3}$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 7, С. 958–962.

в уравнение (1) и умножая полученное равенство слева на $\exp\{-\theta_0 - (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3)\}$, имеем

$$i[(\gamma_0+\gamma_2)\partial_\xi\theta_0 + \gamma_a\partial_a\theta_0 + \gamma_a\gamma_b(\partial_a\theta_b)(\gamma_0+\gamma_3) - 2\theta_a(\partial_a\theta_0)(\gamma_0+\gamma_3)]\varphi + \\ + i[(\gamma_0+\gamma_3)(\partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega) + \gamma_a\partial_a\omega]\dot{\varphi} - \lambda e^{\theta_0/k}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi = 0,$$

где $\xi = x_0 + x_3$, $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 2.

Отсюда заключаем, что анзац (3) редуцирует исходное ДУЧП к ОДУ, если выполняются следующие нелинейные уравнения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \partial_\xi\theta_0 - 2\theta_a\partial_a\theta_0 - \partial_a\theta_a = e^{\theta_0/k}f_1(\omega),\\
&2)\quad \partial_1\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_2(\omega),\\
&3)\quad \partial_2\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_3(\omega),\\
&4)\quad \partial_2\theta_1 - \partial_1\theta_2 = e^{\theta_0/k}f_4(\omega),\\
&5)\quad \partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega = e^{\theta_0/k}f_5(\omega),\\
&6)\quad \partial_1\omega = e^{\theta_0/k}f_6(\omega),\\
&6)\quad \partial_2\omega = e^{\theta_0/k}f_7(\omega).
\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) $f_1, \ldots, f_7$ — произвольные гладкие функции.

Следует отметить, что в силу произвольности $\varphi(\omega)$ при подстановке выражений

$$\omega(x), \quad \theta_\alpha(x) \tag{5}$$

и

$$h(\omega(x)), \quad \theta_\alpha + h_\alpha(\omega(x)), \tag{6}$$

где $h, h_\alpha \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\alpha = \overline{0,2}$, в формулу (3) получаем один и тот же анзац для поля $\psi(x)$. В этом смысле решения системы ДУЧП (4) вида (5), (6) эквивалентны.

Система (4) содержит семь уравнений для четырех функций ω, θ_α, т.е. является переопределенной. Именно это обстоятельство позволяет построить ее общее решение.

Теорема. *Общее решение системы нелинейных ДУЧП (4), определяемое с точностью до введенного выше отношения эквивалентности, задается одной из следующих формул:*

$$\begin{aligned}
&1)\quad \theta_0 = k\ln w_1, \quad \theta_1 = (2w_1)^{-1}(\dot{w}_1x_1 + \dot{w}_2),\\
&\qquad \theta_2 = (2w_1)^{-1}((2k-1)\dot{w}_1x_2 + w_3), \quad \omega = w_1x_1 + w_2;\\
&2)\quad \theta_0 = -k\ln(x_1 + w_1),\\
&\qquad \theta_a = w_3\left[(x_1+w_1)^2 + (x_2+w_2)^2\right]^{k-1}(x_a + w_a) + \frac{1}{2}\dot{w}_a, \quad a = 1,2,\\
&\qquad \omega = (x_1+w_1)(x_2+w_2)^{-1};\\
&3)\quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = R(x_1+ix_2, x_0+x_3) + R(x_1-ix_2, x_0+x_3) + w_1x_1,\\
&\qquad \theta_2 = R(x_1+ix_2, x_0+x_3) - R(x_1-ix_2, x_0+x_3) + w_2x_1, \quad \omega = x_0 + x_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — произвольные гладкие функции от x_0+x_3, R — произвольная аналитическая по первой переменной функция.

Приведем основные этапы доказательства, опуская громоздкие промежуточные выкладки.

Вначале интегрируется переопределенная система уравнений 2, 3, 6, 7 из (4). Сделав замену $\theta = e^{-\theta_0/k}$, перепишем эту систему в виде

$$\partial_a\theta = F_a(\omega), \quad \partial_a\omega = \theta^{-1}G_a(\omega), \quad F_a, G_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad a = 1, 2. \tag{8}$$

Из необходимых и достаточных условий совместности уравнений (8) $\partial_1\partial_2\theta = \partial_2\partial_1\theta$, $\partial_1\partial_2\omega = \partial_2\partial_1\omega$ следуют такие соотношения на $F_a(\omega)$, $G_a(\omega)$:

$$\dot F_1 G_2 = G_1 \dot F_2, \quad G_2\dot G_1 - G_1F_2 = G_1\dot G_1 - G_2F_1 \tag{9}$$

(точка обозначает производную по переменной ω).

Интегрирование системы ОДУ (9) существенно облегчается, если заметить, что определенное выше отношение эквивалентности (формулы (6), (7)) индуцирует отношение эквивалентности на множестве решений уравнений (9)

$$\begin{aligned} &F_a(\omega) \sim F_a(\tilde f_1(\omega)) - \dot{\tilde f}_2(\omega)G_a(\tilde f_1(\omega)),\\ &G_a(\omega) \sim (\dot{\tilde f}_1(\omega)\tilde f_2(\omega))^{-1}G_a(\tilde f_1(\omega)),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\tilde f_1, \tilde f_2 \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\dot{\tilde f}_1 \tilde f_2 \neq 0$.

Интегрируя систему ДУЧП (8), (9), устанавливаем, что ее общее решение, определяемое с точностью до отношений эквивалентности (6), (7), (10), задается одной из формул вида

$$\begin{aligned} &1)\quad F_1 = G_1 = 1, \quad F_2 = G_2 = 0, \quad \theta = w_1^{-1}, \quad \omega = w_1x_1 + w_2;\\ &2)\quad F_1 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = \omega, \quad G_2 = -\omega^{-2}, \quad \theta = x_1 + w_1,\\ &\qquad \omega = (x_1 + w_1)(x_2 + w_2)^{-1};\\ &3)\quad F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad \omega = \xi, \quad \theta = 1;\\ &4)\quad F_1 = F_2 = 0, \quad G_1, G_2 \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad \omega = \xi,\\ &\qquad \theta = G_1(\xi)x_1 + G_2(\xi)x_2 + w_3.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — произвольные гладкие действительные функции от ξ.

Подставляя выражения для функций $\omega(x)$, $\theta_0(x) = -k\ln\theta(x)$ в остальные уравнения системы (4), получаем четыре системы ДУЧП для определения функций $\theta_a(x)$. Интегрируя первые три из них, получаем формулы (7). Четвертая система несовместна.

Подставляя выражения (7) в формулу (3), получаем три класса анзацев для спинорного поля $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} &1)\quad \psi(x) = w_1^k \exp\bigl\{(2w_1)^{-1}[((2k-1)\dot w_1x_2 + w_3)\gamma_2 +\\ &\qquad\quad + (\dot w_1x_1 + \dot w_2)\gamma_1](\gamma_0 + \gamma_3)\bigr\}\varphi(w_1x_1 + w_2);\\ &2)\quad \psi(x) = (x_1 + w_1)^{-k}\exp\left\{w_3\bigl[(x_1+w_1)^2 + (x_2+w_2)^2\bigr]^{k-1}\gamma_a(x_a + w_a)\,\times\right.\\ &\qquad\quad \left.\times\,(\gamma_0+\gamma_3) + \frac{1}{2}\dot w_a\gamma_a(\gamma_0+\gamma_3)\right\}\varphi\left((x_1+w_1)(x_2+w_2)^{-1}\right);\\ &3)\quad \psi(x) = \exp\bigl\{[(R + R^* + w_1x_1)\gamma_1 + (iR - iR^* + w_2x_1)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3)\bigr\}\,\times\\ &\qquad\quad \times\,\varphi(x_0 + x_3),\end{aligned} \tag{12}$$

которые редуцируют нелинейное уравнение Дирака (1) к системам ОДУ

$$
\begin{aligned}
&1)\quad i\gamma_1\dot\varphi=\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi;\\
&2)\quad i(\gamma_2-\omega\gamma_1)\dot\varphi=\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi;\\
&3)\quad i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi=\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Общее решение системы 1 из (13) задается следующей формулой [4]:

$$\varphi(\omega)=\exp\left\{i\lambda(\chi\bar\chi)^{1/2k}\gamma_1\omega\right\}\chi,$$

где χ — постоянный четырехкомпонентный столбец. Подставляя это выражение в анзац 1 из (12), получаем новое семейство точных решений нелинейного спинорного уравнения (1), содержащее три произвольных функции

$$
\begin{aligned}
\psi(x)=w_1^k\exp&\left\{(2w_1)^{-1}[(\dot w_1x_1+\dot w_2)\gamma_1+((2k-1)\dot w_1x_2+w_3)\gamma_2]\times\right.\\
&\left.\times(\gamma_0+\gamma_3)\right\}\exp\left\{i\lambda\gamma_1(\bar\chi\chi)^{1/2k}(w_1x_1+w_2)\right\}\chi.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Заметим, что анзацы (12) неинвариантны относительно трехпараметрических подгрупп группы симметрии уравнения (1) (в данном случае — это расширенная группа Пуанкаре [4]) и, следовательно, не могут быть получены в рамках традиционного подхода С. Ли [5].

3. Покажем теперь, что нелиевские анзацы (12) можно построить, используя условную инвариантность нелинейного уравнения Дирака (1).

Определение. *Уравнение (1) условно-инвариантно относительно операторов*

$$Q_\tau=\xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu+\eta_\tau(x),\quad \tau=\overline{1,N},\tag{15}$$

где $\xi_{\tau\nu}(x)$ — действительные скалярные функции, $\eta_\tau(x)$ — переменные (4×4)-матрицы, если система ДУЧП

$$
\begin{aligned}
&\left\{i\gamma_\mu\partial_\mu-\lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\right\}=0,\\
&Q_\tau\psi=0,\quad \tau=\overline{1,N},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

инвариантна в смысле Ли относительно однопараметрических групп преобразований, генерируемых операторами Q_τ.

Иначе говоря, уравнение (1) обладает условной симметрией, если множество его решений содержит непустое подмножество, не совпадающее со всем множеством, которое имеет нетривиальную симметрию.

Укажем в явном виде операторы Q_τ, $\tau=\overline{1,3}$, такие, что (14) удовлетворяет системе (16). Для этого необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений для функций $\xi_{\tau\mu}$, η_τ:

$$
\begin{aligned}
&\xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu\omega(x)=0,\\
&\eta_\tau=-\left[\xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu\exp\{\theta_0(x)+\gamma_a\theta_a(x)(\gamma_0+\gamma_3)\}\right]\times\\
&\qquad\times\exp\{-\theta_0(x)-\gamma_a\theta_a(x)(\gamma_0+\gamma_3)\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь ω, θ_0, θ_1, θ_2 — скалярные функции, определяемые формулами 1 из (7), $\tau=\overline{1,3}$.

Решая уравнения (17), имеем

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_3), \quad Q_2 = w_1\partial_2 + \frac{1}{2}(1-2k)\dot{w}_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3),\\
&Q_3 = \frac{1}{2}w_1(\partial_0+\partial_3) - \dot{w}_1(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) - \dot{w}_2\partial_2 - k\dot{w}_1 + \\
&\quad + (2w_1)^{-1}[(2\dot{w}_1\dot{w}_2 - w_1\ddot{w}_2)\gamma_1 + 2(w_3\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3) + \\
&\quad + (2w_1)^{-1}(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Очевидно, что операторы Q_2, Q_3 не являются линейными комбинациями генераторов расширенной группы Пуанкаре и, следовательно, не принадлежат алгебре Ли группы симметрии уравнения (1). Подействовав первыми продолжениями операторов Q_τ на нелинейное ДУЧП (1), получаем соотношения

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Q}_1 L = 0,\\
&\tilde{Q}_2 L = 2(2k-1)\dot{w}_1\gamma_2 Q_1\psi + 2k\dot{w}_1\omega_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_2\psi + \\
&\quad + \frac{1}{2}(2k-1)\dot{w}_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)L,\\
&\tilde{Q}_3 L = 2w_1^{-1}[(w_1\ddot{w}_1 - 2w_1^2)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2) + (w_1\ddot{w}_2 - 2\dot{w}_1\dot{w}_2)\gamma_1 + \\
&\quad + 2(w_1\dot{w}_3 - w_3\dot{w}_1)\gamma_2]Q_1\psi + 2w_1^{-2}[(1-k)(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)x_2 + w_1\dot{w}_3 - \\
&\quad - w_3\dot{w}_1]Q_2\psi + 2\dot{w}_1 w_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_3\psi - \{\dot{w}_1 + (2w_1)^{-1}(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)\times \\
&\quad \times(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3) + (2w_1)^{-1}[(2\dot{w}_1\dot{w}_2 - w_1\ddot{w}_2)\gamma_1 + \\
&\quad + 2(w_3\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3)\}L,
\end{aligned}
$$

где символом $\tilde{Q}_a$ обозначено первое продолжение оператора Q_a, $L = i\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\psi$.

Кроме того, выполнены коммутационные соотношения вида $[Q_1, Q_2] = [Q_1, Q_3] = 0$, $[Q_2, Q_3] = -2\dot{w}_1 Q_2$. Из этого следует, что нелинейное уравнение Дирака (1) условно инвариантно относительно операторов (18).

Аналогичным образом можно показать, что анзацы 2, 3 из (12) тоже получаются с использованием условной симметрии уравнения (1).

В заключение отметим, что анзацы (12) редуцируют к системам ОДУ более общие нелинейные спинорные уравнения

$$
\left\{i\gamma_\mu\partial_\mu - (\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\left[\tilde{f}_1\left(\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1}\right) + \tilde{f}_2\left(\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1}\right)\gamma_4\right]\right\}\psi = 0,
$$

где $\tilde{f}_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1)$.

1. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.* 1987, **39**, № 1, 116–123.
3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions of nonlinear spinot equations, *Phys. Repts.*, 1989, **172**, № 4, 123–174.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.