# Про редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння до двовимірних рівнянь

*В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО*

The condition of reduction of multidimensional wave equations to the two-dimensional equation is studied and the necessary conditions of compatibility and exact solutions of the resulting d'Alembert–Hamilton system are obtained.

**1.** Розв'язки нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u = F(u),$$
$$\Box \equiv \partial^2_{x_0} - \partial^2_{x_1} - \cdots - \partial^2_{x_n}, \quad u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

будемо шукати за допомогою анзаца [1–4]

$$u = \varphi(y, z), \tag{2}$$

де $y$, $z$ — нові змінні. Підстановка (2) в (1) приводить до рівняння

$$\varphi_{yy} y_\mu y_\mu + 2\varphi_{yz} z_\mu y_\mu + \varphi_{zz} z_\mu z_\mu + \varphi_y \Box y + \varphi_z \Box z = F(\varphi)$$
$$\left( y_\mu = \frac{\partial y}{\partial x_\mu},\ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \tag{3}$$

звідки одержуємо систему рівнянь:

$$y_\mu y_\mu = r(y, z), \quad y_\mu z_\mu = q(y, z), \quad z_\mu z_\mu = s(y, z),$$
$$\Box y = R(y, z), \quad \Box z = S(y, z). \tag{4}$$

Система (4) є умовою редукції багатовимірного хвильового рівняння (1) до двовимірного рівняння (3) за допомогою анзаца (2).

Така редукція становить інтерес, тому що розв'язки двовимірних рівнянь в частинних похідних, в тому числі і нелінійних, можуть бути досліджені більш повно, ніж розв'язки багатовимірних рівнянь.

Наприклад, нехай $y_\mu y_\mu = -z_\mu z_\mu = -1$, $z_\mu y_\mu = \Box y = \Box z = 0$. Тоді (3) має вигляд

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi).$$

Якщо $F(\varphi) = \sin\varphi$, то редуковане рівняння має солітонні розв'язки. Якщо $F(\varphi) = \exp\varphi$, воно має загальний розв'язок.

**2.** Сформулюємо необхідні умови сумісності системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох функцій.

Систему рівнянь (4), в залежності від знаку виразу $rs - q^2$, локальними перетвореннями можна звести до одного з чотирьох типів:

Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1990, № 8, С. 31–33.

1) еліптичний випадок: $rs - q^2 > 0$, $v = v(y, z)$ — комплекснозначна функція,

$$\begin{aligned}&\Box v = V(v, v^*), \quad \Box v^* = V^*(v, v^*),\\&v^*_\mu v_\mu = h(v, v^*), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad v^*_\mu v^*_\mu = 0\end{aligned} \tag{5}$$

(редуковане рівняння еліптичного типу);

2) гіперболічний випадок: $rs - q^2 < 0$, $v = v(y, z)$, $\omega = \omega(y, z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned}&\Box v = V(v, \omega), \quad \Box\omega = W(v, \omega),\\&\omega_\mu\omega_\mu = h(v, \omega), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad \omega_\mu\omega_\mu = 0\end{aligned} \tag{6}$$

(редуковане рівняння гіперболічного типу);

3) параболічний випадок: $rs - q^2 = 0$, $r^2 + s^2 + q^2 \neq 0$, $v(y, z)$, $\omega(y, z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned}&\Box v = V(v, \omega), \quad \Box\omega = W(v, \omega),\\&v_\mu\omega_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = \lambda\ (\lambda = \pm 1), \quad \omega_\mu\omega_\mu = 0\end{aligned} \tag{7}$$

(якщо $W \neq 0$, то редуковане рівняння параболічного типу);

4) рівняння першого порядку $r = s = q = 0$: $y \to v$, $z \to \omega$

$$\begin{aligned}&v_\mu v_\mu = \omega_\mu\omega_\mu = v_\mu\omega_\mu = 0,\\&\Box v = V(v, \omega), \quad \Box\omega = W(v, \omega).\end{aligned} \tag{8}$$

Аналіз сумісності системи Даламбера–Гамільтона

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = f(u) \tag{9}$$

в тривимірному просторі був проведений Коллінзом в [5]. Необхідні умови сумісності системи (9) для чотирьох незалежних змінних вивчались в роботі [6].

Сформулюємо необхідні умови сумісності систем (5)–(8).

**Теорема 1.** *Система (5) сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v, v^*)\partial_{v^*}\Phi}{\Phi}, \quad \partial_{v^*} \equiv \frac{\partial}{\partial v^*},$$

*де* $\Phi$ *довільна функція, для якої виконується умова*

$$(h\partial_{v^*})^{n+1}\Phi = 0.$$

**Теорема 2.** *Система (6) може бути сумісною тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v, \omega)\partial_\omega\Phi}{\Phi}, \quad W = \frac{h(v, \omega)\partial_0\Psi}{\Psi},$$

*де функції* $\Phi$, $\Psi$ *задовольняють умови*

$$(h\partial_v)^{n+1}\Psi = 0, \quad (h\partial_\omega)^{n+1}\Phi = 0.$$

**Теорема 3.** *Система (7) сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{\lambda\partial_v\Phi}{\Phi}, \quad \partial_v^{n+1}\Phi = 0, \quad W \equiv 0.$$

Система (8) сумісна у випадку $V = W \equiv 0$.

Доведення цих теорем проводиться із застосуванням лем, наведених в [6], та відомої теореми Гамільтона–Келі, згідно з якою матриця є коренем свого характеристичного полінома.

**Зауваження 1.** Рівняння (5) можна переписати для пари дійсних функцій $\omega = \operatorname{Re} v$, $\sigma = \operatorname{Im} v$. Проте в цьому випадку необхідні умови сумісності мають дуже громіздкий вигляд.

**Зауваження 2.** Перехід від (4) до (5)–(8) зручний тільки з точки зору дослідження сумісності. Знак виразу $rs - q^2$ може змінюватись для різних $y$, $z$ і перехід розглядається тільки в області, де цей знак постійний.

**3.** Наведемо явні розв'язки систем типу (4) і редуковані рівняння. Параметри $a_\mu$, $b_\mu$, $c_\mu$, $d_\mu$ $(\mu = \overline{0,3})$ задовольняють умови

$$
\begin{aligned}
&-a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = -1 \quad (a^2 \equiv a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_3^2),\\
&ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0;
\end{aligned}
$$

$y$, $z$ — функції від $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

1) $y = ax,\ z = dx,$
$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi);$$

2) $y = ax,\ z = \left((bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2\right)^{1/2},$
$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} - \frac{2}{z}\varphi_z = F(\varphi);$$

3) $y = bx + \Phi(ax + dx),\ z = cx,$
$$-\varphi_{zz} - \varphi_{yy} = F(\varphi);$$

4) $y = \left((bx)^2 + (cx^2)\right)^{1/2},\ z = ax + dx,$
$$-\varphi_{yy} - \frac{1}{y}\varphi_y = F(\varphi).$$


1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Grundland A., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–807.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Collins S.B., Complex potential equations. I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–187.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.