Об одном обобщении метода С. Ли

В.И. ФУЩИЧ

Предложено обобщение метода С.Ли решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В прошлом веке С. Ли заложил идейные основы мощного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). В последнее время классические идеи С. Ли необычайно бурно развиваются как в теоретическом, так и в прикладном направлении. Возрождение интереса к классическим подходам к ДУЧП обусловлено, видимо, тем, что существует огромное число статей и монографий по теоремам существования, однако слишком мало работ по конструктивным методам отыскания решений.

Современное математическое моделирование различных процессов квантовой физики, оптики, акустики, электродинамики, океанологии, гидродинамики, биофизики приводит нас к многомерным нелинейным ДУЧП, которые не могут быть решены линейными методами. Большинство из таких нелинейных моделей не могут рассматриваться как линейные модели плюс некоторая малая нелинейная добавка.

Лиевский подход к решению ДУЧП совершенно не связан с предположением о малости нелинейных членов. Для него важно лишь то, чтобы ДУЧП обладало нетривиальной группой инвариантности [1]. В этом случае многомерное ДУЧП может быть редуцировано к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), которые, во многих важных случаях, могут быть решены. Возникают естественные вопросы: как решить те ДУЧП, которые не обладают нетривиальной локальной симметрией? Как обобщить метод Ли?

В настоящей работе предложено обобщение классического метода С. Ли. Идея такого обобщения сформулирована в [2, 3].

Для конкретности рассмотрим два уравнения: нелинейное скалярное волновое и спинорное уравнения

$$p_\mu p^\mu u(x) + F(u, u^*, x)u = 0, \tag{1}$$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi(x) + F_1(\bar{\Psi}\Psi, x)\Psi(x) = 0, \tag{2}$$

$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, γ_μ — матрицы Дирака, u — комплекснозначная скалярная функция, Ψ — четырехкомпонентный спинор, F, F_1 — произвольные гладкие функции, $x \in R(1,3)$ — пространство Минковского, u^* — комплексно-сопряженная функция, $\bar{\Psi}$ — дираковски-сопряженный спинор.

1. Предположим, что уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. В этом случае F не зависит от x [1]. Базисные элементы алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ этой группы инвариантности имеют вид

$$P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J_{\mu\nu} = \alpha_\mu p_\nu - \alpha_\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \tag{3}$$

Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, С. 4–9.

Лиевский алгоритм построения решений ДУЧП состоит в следующем. Решения (1) ищем в виде следующего анзаца [1, 3]:

$$u = f(x)\varphi(\omega), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{4}$$

Симметрийные свойства уравнения (1) дают возможность отыскать в явном виде функции $f(x)$ и новые переменные ω_1, ω_2, ω_3, при которых четырехмерное уравнение (1) редуцируется к трехмерному ДУЧП для функции φ. Повторяя этот процесс, т.е. построив анзацы вида (4) для трехмерного, а затем для двумерного ДУЧП, приходим к ОДУ.

Идея обобщения метода Ли основана на следующем наблюдении [2, 3]. Если не вдаваться в детали исследования групповых свойств уравнения и процесса редукции многомерного уравнения (1) к ОДУ, то метод Ли можно сформулировать весьма кратко. Присоединим к уравнению (1) следующее уравнение:

$$(a_{\mu\nu}J_{\mu\nu} + b_\mu P_\mu)u(x) = 0, \tag{5}$$

где $a_{\mu\nu}$, b_μ — произвольные константы.

Соотношение (5) является линейным ДУЧП первого порядка. Решая (5) и требуя, чтобы это решение удовлетворяло уравнению (1), построим решение исходного нелинейного уравнения (1). Решения уравнения (1), построенные указанным способом, совпадут с решениями, полученными по методу Ли.

Формула (5) указывает путь для обобщения лиевского метода решения ДУЧП. Он состоит в обобщении соотношения (5). Присоединим уравнению (1) следующее нелинейное уравнение первого порядка:

$$\{a_{\mu\nu}(x,u,\underset{1}{u})J_{\mu\nu} + b_\mu(x,u,\underset{1}{u})P_\mu\}u(x) = F_2(x,u,\underset{1}{u}), \tag{6}$$

где $a_{\mu\nu}(x,u,\underset{1}{u})$, $b_\mu(x,u,\underset{1}{u})$, $F_2(x,u,\underset{1}{u})$ — некоторые гладкие функции x, u, $\underset{1}{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$.

Если существуют решения уравнения (6) при некоторых фиксированных функциях $a_{\mu\nu}$, b_μ, F_2, которые удовлетворяют (1), то такие решения не могут быть получены с помощью метода Ли. Очевидно, что решение уравнения (6) может быть решением (1), если уравнения (1) и (6) совместны. Поэтому необходимо исследовать совместность системы (1), (6). В общей постановке это очень трудная проблема. Однако, при конкретном выборе $a_{\mu\nu}$, b_μ, F_2 эта задача может быть решена. Так, например, если

$$a_{\mu\nu} = 0, \quad b_\mu(x,u,\underset{1}{u}) = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad F_2 = 1, \tag{7}$$

задача о совместности уравнений (1) и (6) полностью решена [4] , т.е. указан явный вид функций F, при которых система (1), (6) совместна.

2. Для спинорной системы (2), инвариантной относительно группы $P(1,3)$, уравнение типа (6) имеет вид

$$\{A_{\mu\nu}(x,\Psi^*,\Psi)J_{\mu\nu} + B_\mu(x,\Psi^*,\Psi)P_\mu\}\Psi = F_3(x,\Psi^*,\Psi)\Psi, \tag{8}$$

где $A_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$, B_μ — матрицы.

В том частном случае, когда $A_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}E$, $B_\mu = b_\mu E$, E — единичная матрица, решения уравнения (8), удовлетворяющие системе (2), будут совпадать с решениями, полученными по лиевскому методу. Во всех остальных случаях построенные решения (2), с использованием уравнения (8), дают новые решения. В частности, когда

$$A_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}, \quad B_\mu = 0, \tag{9}$$

получим решения, которые не могут быть построены лиевским методом.

3. В этом пункте приведем несколько задач, которые автору представляются важными для развития нелиевских методов решения ДУЧП.

3.1. Исследовать совместность и построить решения следующих скалярных уравнений:

$$\begin{gathered} p_\mu p^\mu u(x) = F(u, \underset{1}{u}, \Box u), \\ \lambda_1 (J_{\mu\nu}u)(J_{\mu\nu}u) + \lambda_2 (p_\mu u)(p^\mu u) + \lambda_3 (K_\mu u)(K^\mu u) = F_4(x, u), \\ K_\mu = 2x_\mu x_\nu p^\nu - x_\alpha x^\alpha p_\mu; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} p_\mu p^\mu u = F(x, \underset{1}{u}, \Box u), \\ \lambda_4 x_\mu x_\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \lambda_5 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = F_5(x, u, \underset{1}{u}), \end{gathered} \tag{11}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ — произвольные параметры.

3.2. Исследовать лиевскую и нелиевскую симметрии уравнений

$$\begin{gathered} p_\mu p^\mu u(x) = F(|u|)u, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_a} \frac{\partial \rho}{\partial x_a} + \lambda \right)^{1/2}, \quad \rho = u^* u. \end{gathered} \tag{12}$$

Рассмотреть случаи, когда параметр $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, $F = 0$ и $F = |u|^k$, $F = m^2$, m — действительный параметр.

3.3. Исследовать совместность и построить семейства частных решений спинорных систем ДУЧП

$$\begin{gathered} \gamma_\mu p^\mu \Psi + F_1(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0, \\ \lambda_1 (S_{\mu\nu} J_{\mu\nu})\Psi + \lambda_2 (\bar{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi) J_{\mu\nu} \Psi + \\ + \lambda_3 (\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi) P_\mu \Psi + \lambda_4 (\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi) K_\mu \Psi = F_6(\bar{\Psi}\Psi)\Psi, \\ K_\mu = 2x_\mu x_\alpha p^\alpha - x_\alpha x^\alpha p_\mu + 2S_{\mu\nu} x_\nu; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} p_\alpha p^\alpha \Psi + F_7(\bar{\Psi}\Psi, \overline{\gamma_\alpha p^\alpha \Psi} \cdot \gamma_\nu p^\nu \Psi)\Psi = 0, \\ \lambda_1 (S_{\mu\nu} J_{\mu\nu})\Psi + \lambda_2 \gamma_\mu p^\mu \Psi + \lambda_3 \gamma_4 \gamma_\mu p^\mu \Psi = F_8(\bar{\Psi}\Psi)\Psi; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} p_\alpha p^\alpha \Psi + F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0, \\ \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad j_\mu = \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi + \lambda_2 \bar{\Psi}\gamma_4 \gamma_\mu \Psi + \lambda_3 \bar{\Psi} p_\mu \Psi; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} p_\alpha p^\alpha \Psi + F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0, \\ \bar{\Psi}\gamma_\mu p^\mu \Psi = \lambda_4 F_{10}(\bar{\Psi}\Psi). \end{gathered} \tag{16}$$

3.4. Исследовать локальную и нелокальную симметрию уравнений Шредингера для двух частиц

$$
\begin{aligned}
&p_0 u(t,x,y) = \left\{\frac{1}{2m_1}p_k^2 + \frac{1}{2m_2}p_{k+3}^2 + V(t,x,y)\right\} u(t,x,y),\\
&p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad k=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Потенциал $V(t,x,y)$ удовлетворяет условиям

$$
p_k^2 V = \lambda_1 V, \quad p_{k+3}^2 V = \lambda_2 V, \tag{18}
$$

или

$$
\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta_x V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta_y V, \tag{19}
$$

или

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta_x V, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta_y V, \tag{20}
$$

или

$$
\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial V}{\partial x_a}\frac{\partial V}{\partial x_a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial V}{\partial y_a}\frac{\partial V}{\partial y_a} = 0, \tag{21}
$$

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — произвольные параметры.

3.5. Исследовать симметрию псевдодифференциального уравнения

$$
\begin{aligned}
p_0^2 u(t,x,y) = \Big\{ & p_k^2 + p_{k+3}^2 + m_1^2 + m_2^2 + \\
& + 2\left(p_k^2 + m_1^2\right)^{1/2}\left(2p_{k+3}^2 + m_2^2\right)^{1/2} \Big\} u(t,x,y).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений, в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alambert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.