Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійного хвильового рівняння

В.І. ФУЩИЧ, В.А. ТИЧИНІН

Some classes of exact solutions are obtained for a nonlinear wave equation. The method is suggested to construct a new solution of the nonlinear wave equation from two knows.

Нелінійні хвильові рівняння

$$F(u) \equiv u_{x_0x_0} - (C(u)x_{x_1})_{x_1} = 0 \tag{1}$$

зустрічаються при описанні поперечних коливань струн із змінною щільністю, поздовжніх коливань стержнів із змінним модулем пружності, при описанні багатьох інших процесів [1–5]. Груповий аналіз цього рівняння зроблений в [3]. Нижче одержані деякі класи точних розв'язків рівняння (1) за допомогою нелокального перетворення його до лінійного. Крім того, запропонований спосіб побудови нового розв'язку нелінійного рівняння по двох відомих розв'язках.

Нелінійне рівняння (1) зводиться до лінійного

$$L(\varphi) \equiv \varphi_{yy} - C(y)\varphi_{\tau\tau} = 0 \tag{2}$$

за допомогою нелокального перетворення [6]

$$A: \quad \begin{array}{l} x_0 = \varphi_\tau, \quad x_1 = \varphi_y(\alpha, \beta = \tau, y), \\ u = y, \quad \delta \equiv \det \|\varphi_{\alpha\beta}\| \neq 0. \end{array} \tag{3}$$

Це перетворення переводить (1) в $PL(\varphi)$

$$F(u) \xrightarrow{A} PL(\varphi). \tag{4}$$

Оператор P має вигляд

$$\begin{aligned} P = {} & \left[\varphi_{y\tau}^3 + 2\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}(\varphi_{yy} - C(y)\varphi_{\tau\tau}) - C(y)\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}^2\right]\partial_\tau + \\ & + \left[C(y)\varphi_{\tau\tau}^3 - \varphi_{y\tau}^2\varphi_{\tau\tau}\right]\partial_y + (\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau\tau} - \varphi_{\tau\tau}\varphi_{y\tau\tau})(\varphi_{yy} + C(y)\varphi_{\tau\tau}) + \\ & + 2\left[C(y)\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}\varphi_{\tau\tau\tau} - \varphi_{y\tau}^2\varphi_{y\tau\tau}\right] - C'(y)\varphi_{\tau\tau}^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Побудувавши розв'язки лінійного (2), знаходимо розв'язки нелінійного рівняння (1). Розглянемо декілька випадків.

1. Якщо $C(u) = (au+b)^{-4}$, a, b — довільні сталі, розв'язок лінійного рівняння має вигляд [2]

$$\varphi(y,\tau) = (ay+b)\left[f\left(\frac{1}{ay+b} + a\tau\right) + g\left(\frac{1}{ay+b} - a\tau\right)\right]. \tag{6}$$

Розв'язок нелінійного рівняння (1) задається виразом

$$x_0 = a(au+b)(f+g), \quad x_1 = a\left[f + g - \frac{1}{au+b}(f'+g')\right]. \tag{7}$$

Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1990, № 5, С. 32–36.

Тут f і g — довільні функції, штрих означає похідну за відповідним аргументом.

2. $C(u) = u^{-2}$, $k_i(s)$ — довільні функції параметра s $(i = 1, 2)$. За розв'язком лінійного рівняння (2) [2]

$$\varphi(y,\tau) = y^s \left[k_1(s)e^{\sqrt{s(s-1)\tau}} + k_2(s)e^{-\sqrt{s(s-1)}\tau}\right] \tag{8}$$

знаходимо розв'язок (1)

$$s^{-2}x_1^2u^{2(1-s)} - s^1(s-1)^{-1}x_0^2u^{-2s} = 4k_1(s)k_2(s). \tag{9}$$

Аналогічно будуються розв'язки у випадках, коли $C(u)$ дорівнюють

$$u^k, \quad \exp u, \qquad \left(u^2+1\right)^{-2}\exp(-4\,\mathrm{arctg}\,u),$$
$$(1+u)^{2(A-1)}(1-u)^{-2(A+1)}, \quad u^{-4}\exp\left(-2u^{-1}\right).$$

Скористаємося для побудови розв'язків (2) розділенням змінних, тобто розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді

$$\varphi(y,\tau) = h(\tau)\cdot g(y). \tag{10}$$

Це призводить до таких результатів:

$$g'' - \varkappa C(y)g = 0, \tag{11}$$

$$h'' - \varkappa h = 0, \tag{12}$$

($\varkappa$ — стала, $C(y)$ — довільна функція),

$$\begin{aligned} &h^1(\tau) = C_1\,\mathrm{ch}\,\tau\sqrt{\varkappa} + C_2\,\mathrm{sh}\,\tau\sqrt{\varkappa}, \quad \varkappa > 0,\\ &h^2(\tau) = C_1 + C_2\tau, \quad \varkappa = 0,\\ &h^3(\tau) = C_1\cos\tau\sqrt{|\varkappa|} + C_2\sin\tau\sqrt{|\varkappa|}, \quad \varkappa < 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо $C(u) = \lambda u^k$, де λ — довільний дійсний параметр, відповідні розв'язки лінійного рівняння такі:

1) при $k = -2$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{|4\varkappa\lambda + 1|}$

$$\begin{aligned} &g^1(y) = C_3y^{\frac{1}{2}+r} + C_4y^{\frac{1}{2}-r}, \quad 4\varkappa\lambda + 1 > 0,\\ &g^2(y) = C_3\sqrt{y} + C_4\sqrt{y}\ln y, \quad 4\varkappa\lambda + 1 = 0,\\ &g^3(y) = C_3\sqrt{y}\cos(r\ln y) + C_4\sqrt{y}\sin(r\ln y), \quad 4\varkappa\lambda + 1 < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\varphi^1(y,\tau) = h^3(\tau)g^1(y), \quad \lambda > 0, \quad \varkappa < 0, \tag{14а}$$

$$\varphi^2(y,\tau) = h^1(\tau)g^3(y), \quad \lambda < 0, \quad \varkappa > 0, \tag{14б}$$

$$\varphi^3(y,\tau) = h^2(\tau)g^1(y), \quad -\infty < \lambda < +\infty, \quad \varkappa = 0, \tag{14в}$$

$$\varphi^4(y,\tau) = h^3(\tau)g^2(y), \quad \lambda > 0, \quad \varkappa = -(4\lambda)^{-1}, \tag{14г}$$

$$\varphi^5(y,\tau) = h^1(\tau)g^2(y), \quad \lambda < 0, \quad \varkappa = -(4\lambda)^{-1}, \tag{14д}$$

2) при $k \neq -2$ розв'язки рівняння (11) можуть бути виражені через функції Бесселя [7] ($i^2 = -1$):

$$g(y) = \sqrt{y} Z_\beta \left(\frac{2i}{k+2} \sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}} \right), \quad \left(\beta = \frac{1}{k+2} \right), \tag{15}$$

C_3, C_4 — довільні сталі, $Z_\beta(x) = C_3 J_\beta + C_4 Y_\beta$ — циліндричні функції, J_β, Y_β — Бесселеві функції першого та другого роду відповідно. Розв'язки лінійного рівняння (2) мають вигляд

$$\varphi^6(y,\tau) = h^1(\tau)\sqrt{y} Z_\beta(\gamma^+), \quad \gamma^+ \equiv \frac{2i}{k+2}\sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}}, \tag{16а}$$

$$\varphi^7(y,\tau) = h^3(\tau)\sqrt{y} Z_\beta(\gamma^-), \quad \gamma^- \equiv \frac{-2}{k+2}\sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}}, \tag{16б}$$

З (14а) одержуємо такий розв'язок рівняння (1):

$$\begin{aligned} \left(C_1^2 + C_2^2\right)^2 = \Bigg[& C_1 x_0 |\varkappa|^{-\frac{1}{2}} \left(g^1(u)\right)^{-1} - C_2 x_1 \left(C_3 \left(\frac{1}{2} + r \right) u^{r-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + C_4 \left(\frac{1}{2} - r \right) u^{-r-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \Bigg]^2 + \Bigg[C_2 x_0 |\varkappa|^{-\frac{1}{2}} \left(g^1(u)\right)^{-1} + \\ & + C_1 x_1 \left(C_3 \left(\frac{1}{2} + r \right) u^{r-\frac{1}{2}} + C_4 \left(\frac{1}{2} - r \right) u^{-r-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \Bigg]^2 . \end{aligned} \tag{17а}$$

Аналогічно будуються розв'язки (1) з (14б–д). За розв'язками (16а,б) лінійного рівняння (2) знаходимо такі розв'язки рівняння (1):

$$\begin{aligned} \left(C_2^2 \mp C_1^2\right)^2 = \Bigg\{ & C_2 x_0 \left[\sqrt{|\varkappa| u} Z_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \mp \\ & \mp C_1 x_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\gamma^\pm) + \sqrt{u} Z'_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \Bigg\}^2 \mp \\ & \mp \left\{ C_1 x_0 \left[\sqrt{|\varkappa| u} Z_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} - C_2 x_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\gamma^\pm) + \sqrt{u} Z'_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \right\}^2 . \end{aligned} \tag{18а,б}$$

Верхній знак відповідає (16а), нижній — (16б).

Нехай $g(y) = F(y, C_3, C_4)$ — деякий розв'язок рівняння (11) з визначеним $C(y)$, тоді розв'язки відповідного нелінійного рівняння (1) будуються за формулою

$$\left(C_1^2 \pm C_2^2\right)^2 = \left[\frac{C_2 x_0}{\sqrt{|\varkappa|} F(u)} \mp \frac{C_1 x_1}{F'(u)} \right]^2 \mp \left[\frac{C_1 x_0}{\sqrt{|\varkappa|} F(u)} - \frac{C_2 x_1}{F'(u)} \right]^2 , \tag{19}$$

де верхній знак відповідає $\varkappa > 0$, нижній — значенням $\varkappa < 0$. Якщо підставити $y = u$ в розв'язок лінійного рівняння (2)

$$\varphi^1(y,\tau) = [C_1 \operatorname{ch} \tau\sqrt{\varkappa} + C_2 \operatorname{sh} \tau\sqrt{\varkappa}] \cdot F(y, C_3, C_4),$$
$$\varphi^2(y,\tau) = \left[C_1 \cos \tau\sqrt{|\varkappa|} + C_2 \sin \tau\sqrt{|\varkappa|}\right] \cdot F(y, C_3, C_4),$$

і виключити потім параметр τ з одержаних рівнянь, приходимо до розв'язків (19).

Побудуємо новий розв'язок нелінійного рівняння (1) з відомих розв'язків u_1, u_2. Скористаємося для цього принципом суперпозиції розв'язків лінійного рівняння (2). В одному з простих розв'язків рівняння (1) з $C(u) = \lambda u^{-4}$ надамо параметру C значення C_1, $C_2 \neq C_1$. Одержуємо два різних розв'язки (1)

$$u_\alpha = -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha} \left(1 - \lambda^{\frac{1}{2}} C_\alpha^{-1} x_0^\alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{20}$$

Для (20) будуємо розв'язки лінійного рівняння (2)

$$\varphi_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{4} C_\alpha \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right]. \tag{21}$$

Тоді

$$\varphi_3(y, \tau) = k_1 \varphi_1(y, \tau) + k_2 \varphi_2(y, \tau) = \frac{1}{4} (k_\alpha C_\alpha) \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \tag{22}$$

k_α $(\alpha = 1, 2)$ — довільні сталі. При цьому

$$\begin{aligned} x_0^\alpha &= \varphi_{\alpha,\tau}(y, \tau) = -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} C_\alpha \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \\ x_1^\alpha &= \varphi_{\alpha,y}(y, \tau) = -\frac{1}{4} C_\alpha \left[y^{-2} - \lambda^{-1} \tau^2 \right], \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} x_0^3 &= -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha) \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \\ x_1^3 &= -\frac{1}{4} (k_\alpha C_\alpha) \left[y^{-2} - \lambda^{-1} \tau^2 \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Внаслідок (3) з (24) будуємо розв'язок (1)

$$\begin{aligned} u_3 &= -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{x_0^3}{x_1^3} \left(1 + \lambda^{\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha)^{-1} x_0^3 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{k_1 x_0^1 + k_2 x_0^2}{k_1 x_1^1 + k_2 x_1^2} \left(1 + \lambda^{\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha^{-1} \left(k_1 x_0^1 + k_2 x_0^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Продиференціювавши розв'язок (20) по x_1^α та розв'язавши одержану систему відносно x_0^α та x_1^α, знаходимо

$$\begin{aligned} x_1^\alpha &= -\frac{1}{2} u_\alpha \cdot (u_{\alpha, x_1^\alpha})^{-1}, \\ x_0^\alpha &= \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} C_\alpha \pm \left[\frac{1}{4} \lambda^{-1} C_\alpha^2 - \frac{1}{2} \lambda^{-1} C_\alpha u_\alpha^3 (u_{\alpha, x_1^\alpha})^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тут $u_{\alpha, x_1^\alpha} \equiv \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1^\alpha}$ (підсумовування по α немає) та

$$x_0^2 = C_2 C_1^{-1} x_0^1 \equiv \theta\left(x_0^1 \right), \quad x_1^2 = C_2 C_1^{-1} x_1^1 \equiv \sigma\left(x_1^1 \right). \tag{27}$$

Підставляючи (26), (27) у праву частину (25), будуємо u_3

$$
\begin{gathered}
u_3\left(x_0^1, x_1^1\right) = -\lambda^{\frac{1}{4}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left[1+\lambda^{\frac{1}{2}}(k_\alpha C_\alpha)^{-1}\cdot\Lambda\right]^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}\times \\
\times\left[k_1u_1\left(x_0^1, x_1^1\right)u_{1,x_1^1}^{-1}\left(x_0^1, x_1^1\right)+k_2u_2\left(\theta\left(x_0^1\right),\sigma\left(x_1^1\right)\right)u_{2,x_1^2}^{-1}\left(\theta\left(x_0^1\right),\sigma\left(x_1^1\right)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \\
\Lambda\left(x_0^1, x_1^1\right) = \lambda^{-1}k_1\left[\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}C_1\pm\left(\frac{1}{4}C_1^2-\frac{1}{2}C_1u_1^3(x_0^1,x_1^1)u_{1,x_1^1}^{-1}(x_0^1,x_1^1)\right)\right]+ \\
+\lambda^{-1}k_2\left[\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}C_2\pm\left(\frac{1}{4}C_2^2-\frac{1}{2}C_2u_2^3\left(\theta\left(x_0^1\right),\sigma\left(x_1^1\right)\right)u_{2,x_1^2}^{-1}\left(\theta\left(x_0^1\right),\sigma\left(x_1^1\right)\right)\right)\right].
\end{gathered} \tag{28}
$$

1. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 1, New York, Acad. Press, 1965, 301 p.
2. Bluman G., Kumei S., On invariance properties of wave equations, *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 2, 307–318.
3. Ames W.F. Lohner R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, in Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Editor V. Lakshmikanthan, New York, Acad. Press, 1982, 1–6
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
5. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, Наука, 1984, 272 с.
6. Фущич В.И., Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Институт математики АН УССР, 1982, 48 с.
7. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1971, 576 с.