О точных решениях нелинейного уравнения для спинорного поля

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.З. ЖДАНОВ

1. В настоящей работе построены широкие классы точных решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) для спинорного поля

$$[i\gamma\cdot\partial - m - \lambda(\bar{\psi}\psi)^k]\psi = 0, \tag{1}$$

где $\gamma\cdot\partial = \gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3$, $\partial_\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\nu = \overline{0,3}$, $\psi = \psi(x)$ — 4-х компонентная функция-столбец; $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$; m, k, λ — произвольные действительные постоянные; γ_μ — матрицы Дирака 4×4

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \overline{1,3} \tag{2}$$

σ_a — матрицы Паули 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для построения многопараметрических семейств точных решений системы (1) существенно используются ее симметрийные свойства и анзатц

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{4}$$

предложенный в [1, 2]. $A(x)$ — 4×4 матрица, $\varphi(\omega)$ — 4-х компонентная функция-столбец, зависящая от инвариантных переменных $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$. Явный вид матрицы $A(x)$ в новых переменных ω находится из условий [1–4]

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))A(x) = 0, \tag{5}$$

$$\xi^\mu(x)\partial_\mu\omega(x) = 0, \tag{6}$$

где

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x) \tag{7}$$

($\xi^\mu(x)$ — скалярные функции, $\eta(x)$ — матрицы размерности 4×4) суть операторы симметрии уравнения (1).

Как известно, максимальной в смысле Ли группой инвариантности уравнения (1) при $m \neq 0$ является группа Пуанкаре $P(1,3)$, генераторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} &P_0 = i\partial_0, \quad P_a = -i\partial_a, \\ &J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \left(S_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Современный групповой анализ: методы и приложения. Некоторые задачи современной физики, под ред. А.В. Флегонтова, Ленинград, Ленинградский институт информатики и автоматизации Академии наук СССР, 1990, С. 22–30.

При $m \neq 0$ и $k \neq 1/3$ система (1) допускает кроме операторов (8) еще и генератор масштабных преобразований

$$D = x^\mu P_\mu + \frac{i}{2k}. \tag{9}$$

А при $m = 0$, $k = 1/3$ уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3) \supset \{P(1,3), D\}$. Генераторы конформных преобразований имеют вид

$$K_\mu = 2x_\mu D - x^2 P_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu. \tag{10}$$

2. Описание анзатцов (4) для спинорного поля $\psi(x)$ с алгеброй инвариантности (8) сводится согласно (5), (6) к решению систем

$$(a^\mu P_\mu + c^{\mu\nu} J_{\mu\nu})A(x) = 0, \tag{11}$$

$$[A^\mu P_\mu + c^{\mu\nu}(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)]\omega(x) = 0, \tag{12}$$

a_μ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$ — произвольные постоянные.

Не вдаваясь в подробности этих довольно громоздких вычислений, приведем сразу окончательный результат в виде таблицы.

Таблица 1

№	Алгебра	Инвариантные переменные	Анзац
1	P_0	x_1, x_2, x_3	$\psi(x) = \varphi(x)$
2	P_3	x_0, x_1, x_2	$\psi(x) = \varphi(x)$
3	$P_0 + P_3$	$x_0 + x_1$, x_2, x_3	$\psi(x) = \varphi(x)$
4	J_{12}	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, x_0, x_3	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
5	J_{03}	$\left(x_0^2 - x_3^2\right)^{1/2}$, x_1, x_2	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\}\varphi(x)$
6	$J_{02} + J_{12}$	$x_0 + x_1$, $\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}$, x_3	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_2}{x_0+x_1}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$
7	$\alpha J_{23} - J_{01}$	$\left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2}$, $\alpha\ln(x_0 + x_1) +$ $+ \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}$, $\left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) -\right.$ $\left.- \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(x)$
8	$J_{23} -$ $- \frac{\epsilon}{2}(P_0 + P_1)$	$x_0 + x_1$, $\varepsilon(x_0 - x_1) + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}$, $\left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(x)$
9	$J_{12} + \alpha P_0$	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, $x_0 + \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, x_3	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
10	$J_{12} - \alpha P_3$	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, $x_3 + \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, x_0	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
11	$J_{01} - \alpha P_2$	$\left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2}$, $x_2 + \alpha\ln(x_0 + x_1)$, x_3	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\}\varphi(x)$
12	$J_{02} + J_{12} +$ $+ P_0 - P_1$	$x_0 - x_1 + (x_0 + x_1)x_2 + \frac{1}{6}(x_0 + x_1)^3$, $x_2 + \frac{1}{4}(x_0 + x_1)^2$, x_3	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(x_0 + x_1) \times\right.$ $\left.\times \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$
13	$J_{02} + J_{12} -$ $- \varepsilon P_3$	$x_0 + x_1$, $\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}$, $x_2 + \varepsilon(x_0 + x_1)x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)} \times\right.$ $\left.\times \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$

При ее составлении мы воспользовались тем, что алгебра Пуанкаре $P(1,3)$ имеет только 13 одномерных неэквивалентных подалгебр [5, 6]. Кроме того, в [6] построены соответствующие инвариантные переменные. В таблице 1 [7] приведены $P(1,3)$-неэквивалентные анзатцы для спинорного поля.

Здесь $\alpha \neq 0$ — произвольная постоянная; $\varepsilon = \pm 1$.

Выписанные в таблице 1 анзатцы 1–13 представляют собой полный набор $P(1,3)$-неэквивалентных анзатцев для спинорного поля. Они непереводимы в друг друга с помощью операции группового размножения решений.

Подстановка анзатцев 1–13 из таблицы в уравнение (1) редуцирует его к системам ДУЧП для функции $\varphi(\omega)$, зависящей уже от 3-х переменных ω_1, ω_2, ω_3. В этих уравнениях можно совершить прямую редукцию к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или к системам ДУЧП с двумя независимыми переменными. Результат имеет вид (выписаны только некоторые из систем):

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \gamma_1\varphi_{\omega_1} + iF\varphi = 0,\\
&(3)\quad (\gamma_0+\gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
&(4)\quad \gamma_2\left(\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\varphi\right) + iF\varphi = 0,\\
&(5)\quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
&(6)\quad (\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\varphi\right) + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0,\\
&(7)\quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi + \gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3}\right) + iF\varphi = 0,\\
&(8)\quad \left[\varepsilon(\gamma_0-\gamma_1) + \frac{\gamma_2}{\omega_3}\right]\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3}\right) + iF\varphi = 0,\\
&(11)\quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi + [\gamma_2 + \alpha(\gamma_0+\gamma_1)]\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
&(12)\quad \gamma_2\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В (13) уравнению n (нумерация слева) соответствует анзатц № n из таблицы 1.

Для уравнений (13) нетрудно найти некоторые частные решения. Применяя к ним операцию группового размножения решений [1–4], в итоге получим следующие семейства многопараметрических решений система (1) [7]:

$$\psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma\cdot a)(a\cdot y)\}\,\chi, \tag{14}$$

$$\psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma\cdot d)(d\cdot y)\}\,\chi, \tag{15}$$

$$\psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma\cdot b)(b\cdot y)\}\exp\{i(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)f(a\cdot y+d\cdot y)\}\,\chi, \tag{16}$$

$$\psi(x) = (\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\exp\{-[m(\gamma\cdot b)(b\cdot y)+f(a\cdot y+d\cdot y)]\}\,\chi, \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\,\mathrm{arctg}\,\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\exp\{i(\gamma\cdot b)g(\omega)\}\,\chi,\\
&\quad \omega = \left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]^{1/2},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d)\ln(c\cdot y+d\cdot y)\right\}\times\\
&\quad\times\exp\left\{\gamma\cdot a\left[i\varkappa+\frac{1}{2}(\gamma\cdot c+\gamma\cdot d)a\cdot y\right]\right\}\chi,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{b\cdot y}{2(a\cdot y + d\cdot y)}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\right\}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\times \\ \times\exp\left\{-i[m(\gamma\cdot c)c\cdot y + f(a\cdot y+d\cdot y)]\right\}\chi, \tag{20}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot y}{c\cdot y} - \frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot d)\ln(a\cdot y+d\cdot y)\right\}\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{\omega}}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\exp\left\{-im(\gamma\cdot c)\omega\right\}\chi, \quad \omega = \left[(b\cdot y)^2+(c\cdot y)^2\right]^{1/2}, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot y}{c\cdot y}\right\}\exp\left\{i\gamma\cdot cg(\omega)\right\}\times \\ \times\exp\left\{i(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)f(a\cdot y+d\cdot y\right\}\chi, \quad \omega = \left[(b\cdot y)^2+(c\cdot y)^2\right]^{1/2}, \tag{22}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot d)(\gamma\cdot a)\ln(a\cdot y+d\cdot y)\right\}\exp\Big\{i[(\gamma\cdot b)+\alpha(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)]\times \\ \times\left[\varkappa-\frac{i}{2}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\right][b\cdot y+\alpha\ln(a\cdot y+d\cdot y)]\Big\}\chi, \tag{23}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)(\gamma\cdot b)(a\cdot y+d\cdot y)\right\}\times \\ \times\exp\left\{i\varkappa(\gamma\cdot b)\left(b\cdot y+\frac{1}{4}(a\cdot y+d\cdot y)^2\right)\right\}\chi. \tag{24}$$

В формулах (14)–(24) введены обозначения: χ — постоянный спинор, $\varkappa = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k + m$, $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$; δ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные постоянные, причем

$$a^2 \equiv a_\mu a^\mu = b^2 = c^2 = -d^2 = -1, \quad a\cdot b = b\cdot c = c\cdot d = d\cdot a = a\cdot c = b\cdot d = 0, \tag{25}$$

$f(\omega)$ — произвольная дифференциальная функция,

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{k-1}(\bar{\chi}\chi)^k\omega^{1-k} + m\omega, & k\neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi)\ln\omega + m\omega, & k = 1. \end{cases} \tag{26}$$

Отметим, что решения (14)–(24) аналитичны по m.

3. Как уже было сказано, при $m = 0$ симметрия уравнения (1) расширяется до $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), D\}$. $\tilde{P}(1,3)$-неэквивалентные анзатцы (4) для спинорного поля ψ построены в [8], и с их помощью найдены многопараметрические семейства решений уравнения (1) с $m = 0$. Выпишем некоторые из них:

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b+\gamma\cdot d)(b\cdot y+d\cdot y)\right\}\times \\ \times\exp\left\{\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^k(\gamma\cdot a)\left(2a\cdot y+\theta(b\cdot y+d\cdot y)^2\right)\right\}\chi, \tag{27}$$

$$\psi(x) = \left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\times \\ \times\exp\left\{i\gamma\cdot b\frac{\lambda}{k-1}(\bar{\chi}\chi)^k\left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]^{\frac{k-1}{2}}\right\}\chi, \quad k\neq 1, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\psi(x)=\left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\times\\ \times\exp\left\{i\lambda(\gamma\cdot b+\theta\gamma\cdot a)\left[\ln\left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]+2\theta\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right]\right\}\chi,\quad k=1.\end{gathered}\tag{29}$$

В формулах (27)–(29) $y_\mu=x_\mu+\delta_\mu$, δ_μ, θ — произвольные постоянные; a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — постоянные, удовлетворяющие условиям (25).

Отметим следующую особенность семейств решений (14)–(24) и (27)–(29): они являются соответственно $P(1,3)$-, $\tilde{P}(1,3)$-неразмножаемыми (понятие неразмножаемых решений введено в работе [9]), т.е. такими, размножение которых с помощью преобразований группы симметрии не выводит из данного семейства.

4. При $k=1/3$ и $m=0$ решения уравнения (1) можно искать не только с помощью операторов (8), (9), но и с помощью операторов K_μ (10). Конформно инвариантный анзатц (4) имеет вид [3, 4]

$$\psi(x)=\frac{\gamma\cdot x}{(x^2)^2}\,\varphi\left(\frac{b\cdot x}{x\cdot x}\right).\tag{30}$$

Подстановка (30) в (1) с $m=0$ и $k=1/3$ приводит к системе ОДУ, для которой находится общее решение. Размножив его с помощью трансляций, придем к $C(1,3)$-неразмножаемому семейству решений

$$\psi(x)=\frac{\gamma\cdot y}{(y^\nu y_\nu)^2}\exp\left\{i\lambda\frac{(\bar\chi\chi)^{1/3}}{\beta^\nu\beta_\nu}\left(\frac{\beta\cdot y}{y^\nu y_\nu}+\theta\right)\right\},\quad \beta^\nu\beta_\nu\neq 0,\tag{31}$$

где $y_\nu=x_\nu+\delta_\nu$; δ_ν, β_ν, θ — произвольные постоянные.

Другие решения конформно инвариантного спинорного уравнения (1) можно получить, например, из (27), (28) при $k=1/3$ с помощью формул размножения [3, 4]

$$\begin{gathered}\psi_{II}(x)=\frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x,c)}\psi_I(x),\\ x'_\mu=\frac{x_\mu-c_\mu x^2}{\sigma(x,c)},\quad \sigma(x,c)=1-2cx+c^2x^2.\end{gathered}\tag{32}$$

Эти формулы означают, что $\psi_{II}(x)$ будет решением нашего уравнения, если только $\psi_I(x)$ является его решением.

Приведем еще одну формулу размножения решений уравнения (1) с $m=0$ и $k=1/2$. Для этого воспользуемся тем фактом, что редуцированное уравнение (1)

$$(\gamma_0+\gamma_3)\varphi_{\omega_1}+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+\gamma_2\varphi_{\omega_3}+i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2}\varphi=0\tag{33}$$

обладает бесконечной симметрией. Тогда для него получаем

$$\begin{gathered}\varphi_{II}(\omega)=\Phi_0^{-1}(\omega_1)\exp\left\{\Phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0+\gamma_3)-\frac{1}{2}\dot\Phi_2(\omega_1)\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)-\right.\\ \left.-\frac{1}{2}\dot\Phi_0(\omega_1)\Phi_0(\omega_1)[\gamma_1(\omega_2+\Phi_1(\omega_1))+\gamma_2(\omega_3+\Phi_2(\omega_1))](\gamma_0+\gamma_3)\right\}\times\\ \times\varphi_1\left(\int\Phi_0(\omega_1)d\omega_1,\Phi_0^{-1}(\omega_1)(\omega_2+\Phi_1(\omega_1)),\Phi_0^{-1}(\omega_1)(\omega_3+\Phi_3(\omega_1))\right),\end{gathered}$$

где $\omega_1 = x_0 + x_3$, $\omega_2 = x_1$, $\omega_3 = x_2$; Φ_0, Φ_1, Φ_2 — произвольные дифференцируемые функции.

В заключение отметим, что приведенные в таблице 1 анзатцы не исчерпывают всех возможных анзатцев, редуцирующих уравнение (1) по независимым и зависимым переменным [10]. Так, анзатц

$$\psi(x) = \left[f(u) + ig(u)\left(\gamma_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)\right]\chi, \tag{34}$$

где f, g и $u = u(x)$ скалярные дифференцируемые функции, χ — постоянный спинор, приводит (1) к следующей системе ДУЧП:

$$\frac{df}{du} = gF, \quad F \equiv \lambda\left(f^2 + \varepsilon g^2\right)^k + m,$$
$$\varepsilon\frac{dg}{du} = -fF - \frac{N}{u}g, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

при этом функция u удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \varepsilon, \quad \Box u = \frac{N}{u}, \tag{35}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $N = -2, -1, 0, \ldots, 3$.

Обобщая результат Коллинза [11], выпишем решение системы (35)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = -1, \quad N = -2: \quad u(x) = \left[(ay)^2 + (by)^2 + (cy)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = -1, \quad N = -1: \quad u(x) = \left[(ay)^2 + (by)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = -1, \quad N = 0: \quad u(x) = ay + F(by + dy),\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 0: \quad u(x) = dy,\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 1: \quad u(x) = \left[(dy)^2 - (ay)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 2: \quad u(x) = \left[(dy)^2 - (ay)^2 - (by)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 3: \quad u(x) = \sqrt{y_\nu y^\nu},
\end{aligned}$$

где $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$; δ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (25), F — произвольная дифференцируемая функция.

Описание решений уравнения (1) вида (34) будет посвящена отдельная работа.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О симметриях и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen V.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continious subgroups of the fundamental groups of physics, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
6. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.

7. Фущич В.И., Штелень В.М., О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Теор. мат. физика*, 1987, **72**, № 1, 35–44.
8. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного поля, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.
9. Фущич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 4–19.
10. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
11. Collins C.B., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–187.