О связи между решениями уравнений Дирака и Максвелла. Суперсимметрия уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, С.В. СПИЧАК

Formulae are obtained which allow constructing solutions of the Maxwell equations in vacuo via solutions of the Dirac equation and vice versa. The Dirac equation is shown to be invariant with respect to three different representations of the Poincaré algebra and three superalgebras. All the basic elements of these algebras and superalgebras are local.

В данной работе получены формулы, позволяющие строить по решениям безмассового уравнения Дирака (УД) решения уравнений Максвелла (УМ) для вакуума, и наоборот. Показано, что уравнение Дирака инвариантно относительно трех различных представлений алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$, соответствующих спинам $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\ 1, 0;\ 1, 1$, а также относительно трех различных супералгебр. Все базисные элементы этих алгебр и супералгебр локальны, т.е. дифференциальные операторы первого порядка.

Произвольное решение УД

$$i\gamma\partial\psi = 0, \quad i(\gamma)^T\partial\tilde{\psi} = 0, \tag{1}$$

где $\gamma\partial \equiv \gamma^\nu\partial_\nu$, γ^ν — матрицы Дирака 4×4; $\nu = \overline{0,3}$; $\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$, $x \in R(1,3)$, $\psi = \psi(x)$ — 4-компонентная комплекснозначная функция (столбец), $\tilde{\psi} = \gamma_0\psi^*$, представим, воспользовавшись обозначениями [1], в виде

$$\psi = \psi_{\text{real}} + i\psi_{\text{imag}} = \begin{pmatrix} -D_1 \\ D_3 \\ B_2 \\ -G \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} D_2 \\ -F \\ -B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Установим связь между решениями системы (1) и решениями УМ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Решения уравнения Максвелла (3) строятся по решениям (1) согласно следующим формулам:*

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t} G(\tau,x)d\tau + \boldsymbol{\nabla}\tilde{G}(t_0,x), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t} F(\tau,x)d\tau + \boldsymbol{\nabla}\tilde{F}(t_0,x), \tag{4}$$

Доклады АН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки, 1990, № 3, С. 36–40.

где $\tilde{G}(t_0,x)$, $\tilde{F}(t_0,x)$ — *решения уравнений Пуассона*

$$\Delta\tilde{G} = \frac{\partial G}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0}, \quad \Delta\tilde{F} = \frac{\partial F}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0}, \tag{5}$$

t_0 — *произвольная фиксированная точка,* $\boldsymbol{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$, $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что УД (1) в обозначениях (2) принимает вид УМ с токами

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla}G, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = -\partial_t G,\\ &\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{\Delta}F, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = -\partial_t F. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (4) в (3), получаем, учитывая (6),

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}G - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} \equiv 0,\\ &\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t}\Delta G(\tau,x)d\tau + \Delta\tilde{G}(t_0,x) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} +\\ &\qquad + \int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}d\tau + \Delta\tilde{G}(t_0,x) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0} + \Delta\tilde{G}(t_0,x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что каждая компонента УД (1) удовлетворяет волновому уравнению $\Delta G(\tau,x) = \frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}$, а также равенствами (5). Аналогично доказывается справедливость теоремы для второй пары УМ (3). Теорема доказана.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — *произвольные решения УМ (3),* F, G — *произвольные скалярные функции, удовлетворяющие волновому уравнению*

$$\Box F = \Box G = 0. \tag{7}$$

Тогда функция (2) с компонентами F, G

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t}G(\tau,x)d\tau - \boldsymbol{\nabla}\tilde{G}(t_0,x), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t}F(\tau,x)d\tau - \boldsymbol{\nabla}\tilde{F}(t_0,x), \tag{8}$$

где $\tilde{G}(t_0,x)$ *и* $\tilde{F}(t_0,x)$ *находятся из уравнений (5), является решением УД (1).*

Доказательство. Воспользуемся эквивалентностью УД (1) и системы (6). Подставив (8) в (6) и учитывая (3), (7), (5), находим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}G = \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}G - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\nabla}G \equiv 0,\\ &\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + \frac{\partial G}{\partial t} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \int_{t_0}^{t}\Delta G(\tau,x)d\tau - \Delta\tilde{G} + \frac{\partial G}{\partial t} \equiv 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется выполнимость второй пары уравнений системы (6). Теорема доказана.

Замечание. При $F = G = 0$ из (8) следует $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$ и в этом случае решения УД (1) строятся по формуле (2) исключительно по решениям УМ (3).

Известно [2], что максимальной в смысле Ли группой инвариантности УД (1) является 23-параметрическая группа Ли G_{23}, содержащая 15-параметрическую конформную группу $C(1,3) \supset P(1,3)$ (подробно о конформной симметрии см. [3]) и 8-параметрическую группу G_8 матричных преобразований. (Отметим, что инвариантность УД (1) относительно группы $C(1,3)$ была установлена еще Дираком, а относительно G_8 — Паули и Тушеком (см., например, [4]).) Здесь уместно подчеркнуть, что когда говорят о релятивистской инвариантности (т.е. об инвариантности относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$) системы (1), то имеют в виду, что ψ-функция преобразуется по спинорному представлению

$$D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Однако оказывается, что инвариантность системы (1) относительно алгебры матричных преобразований AG_8 позволяет выделить еще два представления $AP(1,3)$, реализуемые на множестве решений этой системы:

$$D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D(0,0) \oplus D(0,0), \tag{10}$$

$$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Явный вид базисных элементов $AP(1,3)$ для представлений (9)–(11) соответственно, таков:

$$AP^{(k)}(1,3) = \langle P_\mu = \partial_\mu,\ J^{(k)}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S^{(k)}_{\mu\nu}\rangle, \quad k = 1,2,3, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} S^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} [\gamma^\mu,\gamma^\nu] & \hat{O}_4 \\ \hat{O}_4 & [\gamma^\nu,\gamma^\mu]^T \end{pmatrix}, \quad S^{(2)}_{\mu\nu} = S^{(1)}_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}, \\ S^{(3)}_{\mu\nu} = \{S^{(3)}_{01} = S^{(2)}_{01},\ S^{(3)}_{02} = S^{(2)}_{02},\ S^{(3)}_{03} = S^{(2)}_{03} - 2Q_{03},\ S^{(3)}_{12} = S^{(2)}_{12}, \\ S^{(3)}_{13} = S^{(2)}_{13} - 2Q_{13},\ S^{(3)}_{23} = S^{(2)}_{23} - 2Q_{23}\} \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $Q_{\mu\nu} \in AG_8$ задаются матрицами

$$\begin{gathered} Q_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -i\gamma^0\gamma^2 \\ i\gamma^0\gamma^2 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \quad Q_{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -\gamma^0\gamma^2 \\ -\gamma^0\gamma^2 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \\ Q_{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\gamma_5 & \hat{O}_4 \\ \hat{O}^4 & \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} I_4 & \hat{O}_4 \\ \hat{O}^4 & -I_4 \end{pmatrix}, \\ Q_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -\gamma^1\gamma^3 \\ -\gamma^1\gamma^3 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \quad Q_{23} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & \gamma^1\gamma^3 \\ -\gamma^1\gamma^3 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{14}$$

Операторы (12)–(14) действуют в пространстве 8-компонентных функций-столбцов $(\psi,\tilde{\psi})$, $\tilde{\psi} = \gamma_0\psi^*$.

Инвариантность УД (1) относительно $AP^{(2)}(1,3)$ позволяет представить его в виде (2), (6), а относительно $AP^{(3)}(1,3)$ — в виде

$$\begin{gathered} \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial^\gamma B^\delta - \partial^\delta B^\gamma) = 0, \\ \partial_\alpha A^\alpha = \partial_\beta B^\beta = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\psi = \psi_{\rm real} + i\psi_{\rm imag} = \begin{pmatrix} -A^2 \\ -B^0 \\ -B^1 \\ B^3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -A^1 \\ A^3 \\ B^2 \\ -A^0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим три множества операторов симметрии системы (1)

$$SA^{(k)} = \{P_\mu,\ J^{(k)}_{\mu\nu},\ \Gamma_4,\ I;\ Q_{\mu\nu}\}, \tag{17}$$

где $J^{(k)}_{\mu\nu}$ определены в (12), (13); $\Gamma_4 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & \hat{O}_4 \\ \hat{O}_4 & \gamma^T_\mu \end{pmatrix}$, $Q_{\mu\nu}$ заданы в (14). Эти множества операторов образуют как алгебры Ли, так и супералгебры. Операторы P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$, Γ_4, I являются четными, а $Q_{\mu\nu}$ — нечетными в соответствующих супералгебрах. Для доказательства этого утверждения приведем коммутационные и антикоммутационные соотношения для операторов из $SA^{(k)}$ (17).

Операторы P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$; Γ_4, I коммутируют со всеми операторами из $SA^{(k)}$ (17). Для дальнейшего удобно ввести обозначения:

$$R_a = Q_{0a}, \quad T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}Q_{bc}, \quad N_a = J_{0a}, \quad M_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что выполняются соотношения:

$$\{R_a, R_b\} \equiv R_aR_b + R_bR_a = \frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad \{T_a, T_b\} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad \{R_a, T_b\} = \delta_{ab}\Gamma_4. \tag{19}$$

Операторы R_a, T_a из $SA^{(1)}$ коммутируют со всеми четными операторами $SA^{(1)}$. Для $SA^{(2)}$ имеем

$$\begin{gathered}
[P_\mu, R_a] = [P_\mu, T_a] = 0, \quad [N^{(2)}_a, R_b] = [R_a, R_b] = \varepsilon_{abc}T_c, \\
[N^{(2)}_a, T_b] = [R_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}R_c, \quad [M^{(2)}_a, R_b] = [T_a, R_b] = -\varepsilon_{abc}R_c, \\
[M^{(2)}_a, T_b] = [T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}T_c,
\end{gathered} \tag{20}$$

Супералгебра $SA^{(3)}$ изоморфна $SA^{(2)}$. Изоморфизм достигается заменой

$$R_3 \to R'_3 = -R_3, \quad T_1 \to T'_1 = -T_1; \quad T_2 \to T'_2 = -T_2. \tag{21}$$

В заключение отметим, что в случае, когда масса частицы $m \neq 0$, аналогичный результат о дуальной пуанкаре-инвариантности УД справедлив для системы из двух УД с m и $-m$, о чем подробно будет изложено в следующей публикации.

Также отметим, что операторы симметрии из $AP^{(2)}(1,3), AP^{(3)}(1,3)$ приводят к принципиально новым анзацам для ψ-функции, отличных от анзацев для спинорного поля ψ, описанных в [3].

Пример. Нетрудно проверить, что вектора $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{H} = -2\boldsymbol{\alpha}t$, где α — произвольные постоянные, являются решением уравнения Максвелла. Выберем функции F и G в виде $F = G = 3t^2 + \boldsymbol{x}^2$. С помощью (8), (5), (2) находим решение уравнения Дирака (1):

$$\psi = \begin{pmatrix} -[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_1 - 2tx_1] + i[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_2 - 2tx_2] \\ [(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_3 - 2tx_3] - i(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) \\ 2t(\alpha_2 + x_2) + 2it(\alpha_1 + x_1) \\ -(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) - 2it(\alpha_3 + x_3) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\bar{\psi}\psi = \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})^2 - 4t^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})$.

1. Ljolje K., Some remarks on variational formulations of physical fields, *Fortschr. Phys.*, 1988, **36**, № 1, 9–32.

2. Ибрагимов Н.Х., Об инвариантности уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1969, **185**, № 6, 1225–1228.

3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

4. Иваненко Д.Д. (ред.), Нелинейная квантовая теория поля, М., Изд-во иностр. лит., 1959, 464 с.