

Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

The conditional invariance of the nonlinear heat equation is investigated and its exact solutions are constructed.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + uu_{11} = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x) \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_0 = \partial_0 u = \frac{\partial u}{\partial x_0}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

Известно, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является алгебра с базисными операторами: $P_0 = \partial_0$, $P_1 = \partial_1$, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$, $D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial_u$.

В работе, следуя методам [1–3], изучена условная инвариантность уравнения (1). Операторы условной инвариантности используются для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), а также для построения его точных решений.

Рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка

$$Q = A(x, u)\partial_0 + B(x, u)\partial_1 + C(x, u)\partial_u, \quad (2)$$

действующий в пространстве $(x_0, x_1, u) \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 1. Уравнение (1) Q -условно инвариантно относительно оператора (2) при $A \neq 0$ (не теряя общности, положим $A = 1$), если функции B , C удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$B_{uu} = 0, \quad (3)$$

$$uC_{uu} = 2(BB_u + uB_{u1}), \quad (4)$$

$$B_0 + uB_{11} - CBu^{-1} - 2uC_{u1} + 2BB_1 - 2B_uC = 0, \quad (5)$$

$$C_0 + uC_{11} - C^2u^{-1} + 2B_1C = 0. \quad (6)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.7.2 из [2].

Решая систему уравнений (3)–(6), находим явный вид оператора Q :

$$Q = b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3D_1 + b_4D_2 + b_5P_0 + b_6P_1,$$

где $b_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 6}$; $Q_1 = x_1\partial_0 + u\partial_1$, $Q_2 = x_1^2\partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u$.

Теорема 2. Уравнение (1) Q -условно инвариантно относительно оператора $Q = \partial_1 + C(x, u)\partial_u$, если $C(x, u)$ удовлетворяет условию

$$C_0 + u(C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}) + C_1C + C^2C_u = 0. \quad (7)$$

Для того чтобы выписать оператор Q в явном виде, необходимо решить нелинейное уравнение (7). Решить это уравнение в общем случае трудно. Нам удалось найти некоторые его частные решения и, таким образом, имеем следующие операторы:

$$Q_3 = \sqrt{x_0}\partial_1 + \sqrt{2u}\partial_u, \quad Q_4 = \sqrt{2x_0}\partial_1 + L(u)\partial_u, \\ Q_5 = \partial_1 + \ln u\partial_u, \quad Q_6 = x_0\partial_1 + x_1\partial_u,$$

где L_u — решение уравнения $uL'' + L' = L^{-1}$.

Теперь по операторам Q_i , $i = \overline{1,6}$ построим анзацы, с помощью которых редуцируем уравнение (1) и найдем его точные решения (табл. 1).

Таблица 1		
Операторы	Анзацы	Редуцированные ОДУ
Q_1	$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
Q_2	$\frac{2ux_0}{x_1} - x_1 = \varphi(\frac{u}{x_1})$	$\varphi'' = 0$
Q_3	$u = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0) \right)^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
Q_4	$\int L^{-1}(u)du = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
Q_5	$\int \frac{du}{\ln u} = x_1 + \varphi(x_0)$	$\varphi' + 1 = 0$
Q_6	$u - \frac{x_1^2}{2x_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$

Таблица 2		
Операторы	Анзацы	Редуцированные уравнения
$x_a\partial_0 + nu\partial_a$	$x_0 + \frac{\mathbf{x}^2}{2n} = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
$\alpha_a\alpha\mathbf{x}\partial_0u\partial_a$	$x_0u - \frac{(\alpha\mathbf{x})^2}{2} = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
$\alpha_a(\alpha\mathbf{x})^2\partial_0 + 2(\alpha\mathbf{x})u\partial_a + 2\alpha_a u^2\partial_u$	$\frac{2ux_0}{\alpha\mathbf{x}} - \alpha\mathbf{x} = \varphi(\frac{u}{\alpha\mathbf{x}})$	$\varphi'' = 0$
$\sqrt{x_0}\partial_a + \alpha_a\sqrt{2u}\partial_u$	$u = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\mathbf{x}}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0) \right)^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\sqrt{2x_0}\partial_a + \alpha_a L(u)\partial_u$	$\int L^{-1}(u)du = \frac{\alpha\mathbf{x}}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\partial_a + \alpha_a \ln u\partial_u$	$\int \frac{du}{\ln u} = \alpha\mathbf{x} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + 1 = 0$
$nx_0\partial_a + x_a\partial_u$	$u - \frac{\mathbf{x}^2}{2nx_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$
$x_0\partial_a + \alpha_a\alpha\mathbf{x}\partial_u$	$u - \frac{(\alpha\mathbf{x})^2}{2x_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденную функцию φ в соответствующий анзац, получаем решения уравнения (1)

$$u = \frac{x_1^2 + a}{2x_0}, \quad \int \frac{du}{\ln u} = x_1 - x_0, \quad uL'(u) = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}},$$

где $Q = \text{const.}$

Замечание 1. Используя лиевскую симметрию уравнения (1), можно установить формулу разложения его решений $u = \varkappa^2 f(\theta^2 x_0 + a_0, \theta \varkappa x_1 + a_1)$, где $\varkappa$, θ , a_0 , a_1 — произвольные постоянные.

Замечание 2. Полученные результаты можно обобщить на случай, когда $x = (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ и вместо уравнения (1) рассмотреть уравнение

$$u_0 + u\Delta u = 0. \quad (8)$$

В табл. 2 α — постоянный единичный вектор. Отметим, что операторы O_1 и Q_6 были обобщены двумя разными способами.

Аналогично, как и для одномерного уравнения, получим решения уравнения (8):

$$u = \frac{\mathbf{x}^2 + c}{2nx_0}, \quad u = \frac{(\alpha\mathbf{x})^2 + c}{2x_0}, \quad \int \frac{du}{\ln u} = (\alpha\mathbf{x}) - x_0,$$

$$uL'(u) = \frac{\alpha\mathbf{x}}{\sqrt{2x_0}}, \quad c = \text{const.}$$

В заключение приведем следующий результат:

Теорема 3. Уравнение

$$u_0 + \nabla(e^u \nabla u) + \lambda e^{-u} = 0, \quad (9)$$

где $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \mathbf{x}) \in R^{1+n}$, инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n)$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a,$$

$$J_{0a} = \left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right) \partial_a + \frac{x_a}{\lambda n} \partial_0, \quad D = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \partial_u,$$

$$K_0 = 2 \left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right) D - \left[\left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)^2 - \frac{x_a x_a}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right] \partial_0, \quad (10)$$

$$K_a = -2 \frac{x_a}{\lambda n} D - \left[\left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)^2 - \frac{x_a x_a}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right] \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n},$$

при дополнительном условии

$$u_0 + \frac{n}{2} e^u (\nabla u)^2 + \frac{\lambda}{2} e^{-u} = 0. \quad (11)$$

В формулах (10) по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система уравнений (9), (11) конформно инвариантна. Локальной заменой $x_0 = (y_0 - w)/\sqrt{2}$, $x_a = \sqrt{\lambda n/2} y_a$, $u = \ln(\lambda w/\sqrt{2})$ данная система сводится к системе уравнений Даламбера – Гамильтона:

$$\square w = \frac{n}{w}, \quad (12)$$

$$w_\nu w^\nu = 1,$$

где $w = w(y)$, $y = (y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $\nu = \overline{0, n}$, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial y_\nu}$, $w^\nu = g^{\mu\delta} w_\nu$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор с сигнатурой $(+, -, \dots, -)$.

Поскольку система уравнений (12) конформно инвариантна (см. [4]), то теорема доказана.

1. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
2. Фущич В.И., Штельень В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А.*, 1988, № 9, 17–21.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.