Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

The conditional symmetry of the nonlinear heat conduction equation has been studied. Some exact solutions of the equations are obtained.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $u_0 = \partial u/\partial x_0$, $u_{11} = \partial^2 u/\partial x_1^2$, $F(u)$ — гладкая функция, нелинейно зависящая от u.

В работах [1, 2] при помощи метода С. Ли [3] исследована инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности. Из результатов этих работ следует, что уравнение (1) может быть инвариантно только относительно следующих операторов:

$$\partial_0,\ \ \partial_1,\ \ G = e^{x_0}(\partial_1 + m x_1 u \partial_u),\ \ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + M(u)\partial_u,\ \ X = e^{x_0} u\partial_u, \tag{2}$$

где $m = \mathrm{const}$, $M(u)$ — некоторая заданная функция.

В настоящей работе исследована условная инвариантность (более подробно см. [4]) уравнения (1). Операторы условной инвариантности использованы для редукции исходного уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также для нахождения его точных решений.

Пусть

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{3}$$

где A, B, C — гладкие функции своих аргументов, дифференциальный оператор первого порядка, действующий на многообразии (x,u).

Теорема 1. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно (см. [4]) относительно оператора (3), если функции A, B, C удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

Случай I. $A \neq 0$ (не умаляя общности, можно положить $A = 1$).

$$\begin{aligned} &B_{uu} = 0,\ \ C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u),\ \ 3B_uF = 2(C_{1u} + B_uC) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1),\\ &CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2CB_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и везде ниже индекс внизу возле функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Случай II. $A = 0$, $B = 1$.

$$CF_u - C_uF = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}. \tag{5}$$

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 7, С. 24–27.

Теорема 2. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (3) в предположении, что $A = 1$, $B_u \neq 0$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2, \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}. \tag{6}$$

При этом оператор (3) имеет вид

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}u\partial_1 + \frac{3}{2}(\lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 5.7.2 из [4], а теорема 2 является результатом решения системы (4) при $B_u \neq 0$.

Используем оператор (7) для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (6) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Уравнение (6) локальными преобразованиями можно свести к одному из следующих “канонических” уравнений:

$$\begin{array}{llll} 1. & u_0 + u_{11} = \lambda(u^3 - u), & 2. & u_0 + u_{11} = \lambda(u^3 - 3u + 2), \\ 3. & u_0 + u_{11} = \lambda u^3, & 4. & u_0 + u_{11} = \lambda(u^3 + u). \end{array} \tag{8}$$

Анзацы, полученные при помощи оператора (7), для каждого на уравнений (8) соответственно имеют вид

$$\begin{array}{ll} 1. & 2\,\mathrm{arcth}\,u + \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = -\ln(1 - u^{-2}) + 3\lambda x_0; \\ 2. & -\dfrac{4}{9}\ln\dfrac{u+2}{u-1} - \dfrac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \\ & \omega = \dfrac{2}{9}\ln\dfrac{u+2}{u-1} - -\dfrac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0; \\ 3. & \dfrac{2}{u} + \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = -\dfrac{1}{u^2} - 3\lambda x_0; \\ 4. & 2\,\mathrm{arctg}\,u - \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = -\ln(1 + u^{-2}) - 3\lambda x_0. \end{array} \tag{9}$$

Анзацы (9) редуцируют соответствующие уравнения (8) к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$1.\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - \dot{\varphi}, \quad 2.\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - 3\dot{\varphi} + 2, \quad 3.\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3, \quad 4.\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 + \dot{\varphi}. \tag{10}$$

Обратим внимание на нелинейности в правых частях уравнений (10) и сравним их с нелинейностями исходных уравнений (8). Мы видим, что анзацы (9) позволили не только редуцировать уравнения (8), но и существенно изменили их нелинейные правые части, когда вместо функции u появилась функция $\dot{\varphi}$. Это позволяет проинтегрировать уравнения (10) и представить их общие решения при помощи элементарных функций:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \varphi(\omega) = -2\,\mathrm{arcth}\sqrt{c_1 e^{\omega} + 1} + c_2, & 2.\ \ln\left[c_1 - \dfrac{3}{2}(\varphi + 2\omega)\right] = \ln c_2 - \dfrac{3}{2}(\varphi - \omega), \\ 3.\ \varphi(\omega) = 2\sqrt{c_1 - \omega} + c_2, & 4.\ \varphi(\omega) = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{c_1 e^{\omega} - 1} + c_2, \end{array} \tag{11}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Используя формулы (9) и (11), находим решения уравнений (8) соответственно:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \operatorname{arcth} u + \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}c_1 e^{3\lambda x_0}+1} = \frac{1}{2}(c_2 - \sqrt{2\lambda}x_1);\\
&2.\ u = -\frac{2c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right) + 9\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1 + c_1 - 3}{c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right) - 9\lambda x_0 - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1 - c_1};\\
&3.\ u = \frac{\sqrt{2/\lambda}(x_1+c_1)}{3(x_0+c_2) - \frac{1}{2}(x_1+c_1)^2};\\
&4.\ \operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}c_1 e^{-3\lambda x_0}-1} = \frac{1}{2}(c_2 + \sqrt{2\lambda}x_1).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Отметим также, что и в предположении $B_u = 0$ для уравнения (1) можно найти операторы вида (3), не входящие в алгебру (2). Эти результаты представим в виде таблицы.

Таблица 1

Вид функции $F(u)$	F — решение уравнения $F''F = 2$	F — решение уравнения $F''F = 2(F'-1)$	$F(u) = \lambda u^3$
Оператор Q	$2\sqrt{x_0}\partial_1 + F(u)\partial_u$	$x_1\partial_1 + F(u)\partial_u$	$x_1^2\partial_0 + 3x_1\partial_1 + 3u\partial_u$
Анзац	$F'(u) = \varphi(x_0) + \frac{x_1}{\sqrt{x_0}}$	$F'(u) = x_1^2\varphi(x_0) + 1$	$u = x_1\varphi(\omega)$, $\omega = x_0 - \frac{x_1^2}{6}$
Редуцированное уравнение	$\varphi' + \frac{1}{2x_0}\varphi = 2$	$\varphi' - 2\varphi + 2\varphi^2 = 0$	$\varphi'' = 9\lambda\varphi^3$
Решение редуцированного уравнения	$\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$\varphi = \frac{1}{1+c_1e^{-2x_0}}$	$\int_0^\omega \frac{d\tau}{\sqrt{c_1+\tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}(\omega + c_2)$
Решение уравнения (1)	$F'(u) = \frac{x_1+c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$F'(u) = \frac{x_1^2}{1+c_1e^{-2x_0}} + 1$	$\int_0^{u/x_1} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1+\tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\left(x_0 - \frac{x_1^2}{6} + c_2\right)$

Замечание. Полученные результаты легко переносятся на случай произвольного количества переменных $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in R_{1+n}$ в уравнений (1).

В заключение приведем некоторые результаты, полученные нами для уравнения

$$u_0 + u_{11} = F(u, u_1). \tag{13}$$

Теорема 3. *Уравнение*

$$u_0 + uu_1 + u_{11} = \lambda(u)u_1^3, \tag{14}$$

где $\lambda(u)$ — произвольная дифференцируемая функция, Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1. \tag{15}$$

Теорема 4. *Уравнение*

$$u_0 + u_{11} = uu_1(1 - uu_1)(2 - uu_1) \qquad (16)$$

Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + \partial_u. \qquad (17)$$

При $\lambda(u) = 0$ уравнение (14) является уравнением Бюргерса. Анзац, получаемый при помощи оператора (15),

$$x_0 u - x_1 = \varphi(u), \qquad (18)$$

редуцирует уравнение (14) к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \lambda(u). \qquad (19)$$

Анзац

$$\frac{1}{2}u^2 - x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = u - x_0, \qquad (20)$$

полученный при помощи оператора (17), редуцирует уравнение (16) к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 + 1. \qquad (21)$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$\ln\left[\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi + \omega + c_2)\right] = -\frac{3}{2}(\varphi - \omega - c_1). \qquad (22)$$

Из формул (20) и (22) находим решение уравнения (16)

$$\ln\left\{\sin\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(u+1)^2 - 2(x_0+x_1) + c_2\right]\right\} = -\frac{3}{4}\left[(u-1)^2 + 2(x_0 - x_1) + c_1\right]. \qquad (23)$$

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.

2. Дородницын В.А., Князева И.В, Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Дифференц. уравнения*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.

3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.