О новой математической модели процессов теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, А.С. ГАЛИЦЫН, А.С. ПОЛУБИНСКИЙ

Для математического описания процессов теплопроводности и диффузии предложено новое дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка $Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0$, где $L_2 = L_1 L_1$, L_1 — классический оператор теплопроводности, инвариантное относительно группы Галилея. Установлено интегральное представление решения краевой задачи, изучены решения задачи Коши и типа бегущей волны, а также решения со степенным и степенным граничным режимом с обострением.

В настоящей статье для описания тепловых и диффузионных процессов предложено новое дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, инвариантное относительно группы Галилея. При определенном задании параметров предложенная модель более адекватно, чем классическое уравнение параболического типа, описывает эти процессы и позволяет исследовать их специальные режимы.

1. Введение. Математическая теория теплопроводности распределенных систем основана на классическом линейном уравнении параболического типа

$$L_1 u \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2 \nabla^2) u(x,t) = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varkappa > 0$ — физическая константа, характеризующая среду, ∇^2 — оператор Лапласа. В нем постулированы такие жесткие условия на процессы, как бесконечная скорость распространения возмущений, линейная зависимость потока от градиента поля и энергии от температуры.

При нарушении этих условий уравнение (1) не вполне корректно описывает процессы тепломассопереноса и приводит к ряду известных парадоксов [1–3]. В связи с этим для описания процессов с конечной скоростью ряд авторов предложил вместо (1) использовать уравнение гиперболического типа [2, 4]

$$(\partial/\partial t + \tau_r \partial^2/\partial t^2 - \varkappa^2 \nabla^2) u(x,t) = 0, \tag{2}$$

где τ_r — время релаксации теплового потока (малый параметр). Замена уравнения (1) на (2) является принципиальной, но трудно объяснимой с теоретико- группповой точки зрения. Дело в том, что требование инвариантности уравнения относительно той или иной группы преобразований позволяет из множества уравнений, пригодных для математического описания физического процесса, выделить только такие, которые обладают соответствующими симметрийными свойствами и, таким образом, отражают основные физические законы сохранения. В связи с этим необходимо отметить, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразований Галилея $x'_a = x_a + v_a t$, v_a, $a = 1, 2, 3$, — скорость инерциальной системы отсчета

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 2, С. 237–245.

K' относительно системы K, а это означает, что для него выполняется фундаментальный классический принцип относительности Галилея (описанию линейных и нелинейных параболических уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, посвящены работы [5, 6]. В то же время для гиперболического уравнения (2) должен выполнятся принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна (более подробно см., например, [5]). Однако все известные математические модели для описания процессов тепломассопереноса, основанные на дифференциальных уравнениях второго порядка по временной переменной, не инвариантны относительно преобразований Галилея, причем для большинства из них не выполняются ни принцип Галилея, ни принцип Пуанкаре–Эйнштейна.

В статье [5] указано на одно естественное обобщение уравнения (12)

$$Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0, \qquad L_2 = L_1 L_1, \tag{3}$$

где α_1 и α_2 — некоторые вещественные параметры.

Уравнение (3) инвариантно относительно группы Галилея $G(1,3)$ поэтому предположим, что оно может быть использовано для описания тепловых и диффузионных процессов, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются.

Уравнение (3) в дальнейшем будем называть бипараболическим уранением теплопроводности.

2. Определяющие соотношения. Уравнение (3) может быть получено из уравнения сохранения энергии

$$\partial e/\partial t = \operatorname{div} \vec{q} = 0, \tag{4}$$

если задать энергию e и поток q соотношениями

$$\begin{aligned} &e = e_0 + c_v(u - u_0) + \nu\varphi(\partial u/\partial t, \nabla^2 u), \\ &\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} u - \mu \operatorname{grad} \psi(\partial u/\partial t, \nabla^2 u), \end{aligned} \tag{5}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, c_v — теплоемкость, ν и μ — отличные от нуля постоянные параметры, φ и ψ — некоторые скалярные функции. Очевидно, что при $\nu = \mu = 0$ соотношения (5) приводят к классическому уравнению (1).

Положим в (5) $\varphi = \partial u/\partial t - a\frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $\psi = b\partial u/\partial t - \frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $a, b = \mathrm{const} > 0$. Тогда из (4) получим эволюционное уравнение четвертого порядка по пространственным переменным и второго порядка по t

$$c_v\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u\right) + \nu\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{a\lambda}{c_v} + \frac{b\mu}{\nu}\right)\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u + \frac{\lambda}{c_v}\frac{\mu}{\nu}\nabla^2\nabla^2 u\right] = 0. \tag{6}$$

Заданием параметров a, b, μ и ν из (6) можно получить несколько новых уравнений теплопроводности, содержащих как частный случай классическое уравнение (1). Для нас наибольший интерес представляет уравнение, следующее из (6) и принимающее вид (3), где $\varkappa^2 = \lambda/c_v$, причем $L_1 \equiv \partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2$, $L_2 \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2)(\partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2)$. Оно очевидно, соответствует определяющим соотношениям для энергии и потока

$$e = e_0 + c_v(u - u_0) + \nu L_1 u, \qquad \vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} u - \mu \operatorname{grad} L_1 u.$$

3. Фундаментальное решение оператора L. Фундаментальным решением бипараболического уравнения (3) назовем обобщенную функцию $G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$LG \equiv \alpha_1 L_1 G + \alpha_2 L_2 G = 4\pi\delta(\vec{R})\delta(\tau), \tag{7}$$

где δ — дельта-функция, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$, $\tau = t - t_0$, $x \in E_n$. Представляя G в виде интеграла Фурье

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n} e^{i(\vec{R}\cdot\vec{\sigma})} g(\vec{\sigma},\tau)d\sigma,$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in E_n$, из (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\alpha_2 g'' + (2\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)g' + \varkappa^2\sigma^2(\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)g = 4\pi\delta(\tau),$$

решение которого имеет вид

$$g(\vec{\sigma},\tau) = \frac{4\pi}{\alpha_1}\left(1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}\right)e^{-\varkappa^2\sigma^2\tau}\Theta(\tau),$$

где $\Theta(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Следовательно, при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 < \infty$

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \frac{4\pi\Theta(\tau)}{\alpha_1}\frac{1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}}{(2\varkappa\sqrt{\pi\tau})^n}e^{-\frac{R^2}{4\varkappa^2\tau}}, \tag{8}$$

а в случае, когда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$

$$G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \frac{4\pi\Theta(\tau)}{(2\varkappa\sqrt{\pi\tau})^n}\tau e^{\frac{-R^2}{4\varkappa^2\tau}}. \tag{9}$$

Пусть $Q(\vec{R},\tau)$ — фундаментальное решение классического оператора L_1 [1]. Сравнивая его с (8) и (9), видим, что

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}}{\alpha_1}Q(\vec{R},\tau), \quad G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \tau Q(\vec{R},\tau).$$

Поскольку $\frac{1-e^{-\alpha_1\tau/\alpha_2}}{\alpha_1\tau/\alpha_2} \to 1$ при $\frac{\alpha_1\tau}{\alpha_2} \to 0$, то

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\alpha_1\to 0}{\to} \frac{\tau}{\alpha_2}Q(\vec{R},\tau) = \frac{1}{\alpha_2}G_{0,1}(\vec{R},\tau)$$

и, кроме того,

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\tau\to 0}{\to} G_{0,1}(\vec{R},\tau), \quad G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} Q(\vec{R},\tau).$$

Следовательно, при достаточно малых τ фундаментальное решение оператора L ведет себя по τ как фундаментальное решение оператора L_2, а для достаточно больших τ его характер определяется поведением фундаментального решения оператора L_1. Дальнейший асимптотический анализ фундаментального решения оператора L при $\tau \to \infty$ показывает, что для $\vec{R} \neq 0$

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\alpha_1 = \operatorname{sgn}\alpha_2, \\ \infty, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\alpha_1 \neq \operatorname{sgn}\alpha_2, \end{cases}$$

причем

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad n = 1, \\ 1/\varkappa, & \text{если} \quad n = 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

4. Интегральные формулы. Пусть $\Omega \in E_n$ — односвязная область с достаточно гладкой границей $\Gamma, \vec{n}$ — орт внешней конормали к Γ, $\Omega_T = \{x \in \Omega, 0 < t < T\}$ — цилиндр высоты $t > 0$ в пространстве $E_{n+1} = E_n \times (-\infty < t < \infty)$, $L_{P,t} \equiv \alpha_1 1 L_1 + \alpha_2 L_2$, $M_{P,t} = \alpha_1 \bar{L}_1 + \alpha_2 \bar{L}_2$, где $\bar{L}_2 = \bar{L}_1 \bar{L}_1$, $\bar{L}_1 = -\partial/\partial t - \varkappa^2 \nabla^2$, т.е. оператор $M_{P,t}$ сопряжен в смысле Лагранжа с оператором $L_{P,t}$ (индекс P указывает на то, что оператор ∇^2 действует по координатам точки $P \in \Omega$). Обозначим через $C^{2k,k}(\bar{\Omega}_T)$, где целое число $k \geq 1$, множество всех непрерывных в Ω_T функций $u(x,t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, у которых существуют непрерывные в Ω_T производные $\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n+l}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n} \partial t^l} u$ при всех целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$ и $l, m_1 + \cdots + m_n + 2l \leq 2k$.

Тогда для любых $u, v \in C^{4,2}(\Omega_T)$ при $0 \leq t < T$ имеет место формула

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \int_\Omega (v L_{P_0,\tau} u - u M_{P_0,\tau} v) d\omega_0 = \alpha_1 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) d\omega_0 - \\ &\quad - \alpha_1 \varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Omega (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\omega_0 + \alpha_2 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right) d\omega_0 - \\ &\quad - 2\alpha_2 \varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 u + u \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 v \right) d\omega_0 + \\ &\quad + \alpha_2 \varkappa^4 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v \nabla^2 \nabla^2 u - u \nabla^2 \nabla^2 v \right) d\omega_0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя формулы Грина–Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \int_\Omega (v L_{P_0,\tau} u - u M_{P_0,\tau} v) d\omega_0 = \int_\Omega \Big[\alpha_1 uv + \alpha_2 \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \\ &\quad + 2\alpha_2 \varkappa^2 (\nabla u \cdot \nabla v) \Big]_{\tau=0}^{\tau=t} d\omega_0 - \alpha_1 \varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial n_0} - u \frac{\partial v}{\partial n_0} \right) d\gamma_0 - \\ &\quad - \alpha \varkappa^4 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \nabla \left(v \nabla \frac{\partial u}{\partial n_0} - u \nabla \frac{\partial v}{\partial n_0} \right) d\gamma_0 - \\ &\quad - 2\alpha \varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \left[v \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \varkappa^2 \nabla_\Gamma^2 u \right) + u \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \varkappa^2 \nabla_\Gamma^2 v \right) \right] d\gamma_0, \end{aligned} \tag{10}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, ∇_Γ^2 — сужение ∇^2 на границу.

Формулу (10) будем называть интегральной формулой типа Грина для бипараболического оператора L. При решении начально-граничных задач для уравнения (3) она играет ту же роль, что и аналогичная формула для оператора теплопроводности L_1 [7], к которой она сводится при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. В частности, (10) позволяет указать корректные для оператора L граничные и начальные условия. Из формулы (10) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ сразу же вытекает соответствующая формула для оператора L_2.

5. Интегральное представление решения краевой задачи. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu(x,t) = f(x,t), \tag{11}$$

и используем формулу (10), полагая $v = G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R}, t-\tau)$ (индексы при G в дальнейшем опускаем). Поскольку фундаментальное решение удовлетворяет условию причинности $G(\vec{R}, t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, то $LG(\vec{R}, t-\tau) = 0$ и $MG(\vec{R}, t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. Кроме того, можно показать, что

$$\begin{aligned} &\int_\Omega G(\vec{R},0)u(P_0,t)d\omega_0 = \int_\Omega G(\vec{R},0)\frac{\partial u(P_0,t)}{\partial\tau}d\omega_0 = \\ &\qquad = \int_\Omega (\nabla G(\vec{R},0)\nabla u(P_0,t))d\omega_0 = 0, \\ &\int_\Omega \frac{\partial G(\vec{R},0)}{\partial\tau}u(P_0,t)d\omega_0 = -\frac{4\pi}{\alpha_2}u(x,t). \end{aligned}$$

В результате интегральное представление начально-граничной задачи для уравнения (11) принимает вид

$$\begin{aligned} 4\pi u(x,t) = &\int_\Omega \Bigg[\alpha_1 G(\vec{R},t)u(P_0,0) - \alpha_2\frac{\partial G(\vec{R},t)}{\partial\tau}u(P_0,0) + \\ &+ \alpha_2 G(\vec{R},t)\frac{\partial u(P_0,0)}{\partial\tau} - 2\alpha_2\varkappa^2 G(\vec{R},t)\nabla^2 u(P_0,0)\Bigg]d\omega_0 + \\ &+ 2a_2\varkappa^2\int_\Gamma G(\vec{R},t)\frac{\partial u(P_0,0)}{\partial n_0}d\gamma_0 + \alpha_1\varkappa^2\int_0^t d\tau\int_\Gamma\left(G\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)d\gamma_0 + \\ &+ \alpha_2\varkappa^4\int_0^t d\tau\int_\Gamma \nabla\left(G\nabla\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\nabla\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)d\gamma_0 + \\ &+ 2\alpha_2\varkappa^2\int_0^t d\tau\int_\Gamma\left[G\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau} - \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 u\right) + u\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial G}{\partial\tau} + \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 G\right)\right]d\gamma_0 + \\ &+ \int_0^t d\tau\int_\Omega f(P_0,\tau)G(\vec{R},t-\tau)d\omega_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из представления (12) следует, что в задаче типа Коши начальные условия для уравнения (3) задаются в виде

$$u = \varphi_0(x), \quad \partial u/\partial t - 2\varkappa^2\nabla^2 u = \varphi_1(x), \quad t = 0, \quad x \in E_n. \tag{13}$$

6. Одномерная задача типа Коши. Приняв во внимание (13), рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &Lu \equiv \alpha_1\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \\ &u(x,0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2\varkappa^2\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Применив к ней преобразование Фурье, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\alpha_2\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + (2\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)\frac{d\hat{u}}{dt} + (\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)\varkappa^2\sigma^2\hat{u} = 0, \quad t > 0,$$

с начальными данными $\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\psi}(\sigma)$, $d\hat{u}(\sigma,0)/dt+2\varkappa^2\sigma^2\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\varphi}(\sigma)$, где знаком “ ˆ ” обозначается образ Фурье, σ — вещественный параметр преобразования. Решение этой задачи получено в виде

$$\hat{u}(\sigma,t)=\left\{\left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}\right)\varkappa^2\sigma^2\right]\hat{\psi}(\sigma)+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}\right)\hat{\varphi}(\sigma)\right\}e^{-\varkappa^2\sigma^2t}.$$

Поскольку $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}\hat{u}(\sigma,t)d\sigma$, то после соответствующих вычислений получаем окончательный результат

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'-\\-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{4\varkappa t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\left[1-\frac{(x-x')^2}{2\varkappa^2t}\right]e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'.\end{gathered}\tag{15}$$

Если $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=0$, то из (15) следует известное [1, 2] решение задачи Коши для уравнения $L_1u=0$ при условии $u(x,0)=\psi(x)$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'.\tag{16}$$

Если $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=1$, то аналогично (15) получается решение задачи типа Коши для уравнения $L_2u=0$ при условиях (14)

$$\begin{gathered}u_2(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'+\frac{\sqrt{t}}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'-\\-\frac{1}{4\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\left[1-\frac{(x-x')^2}{2\varkappa^2t}\right]e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2t}}dx'.\end{gathered}\tag{17}$$

Пусть $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=\begin{cases}V, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$ $V=\mathrm{const}$. Тогда точные решения, соответствующие формулам (15)–(17), примут соответственно вид

$$u(x,t)=u_1(x,t)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}V\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{4\varkappa t\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2t}}+(a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2t}}\right],\tag{18}$$

$$u_1(x,t)=\frac{V}{2}\left[\operatorname{erf}\frac{a-x}{2\varkappa\sqrt{t}}+\operatorname{erf}\frac{a+x}{2\varkappa\sqrt{t}}\right],\tag{19}$$

$$u_2(x,t)=u_1(x,t)-\frac{V}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2t}}+(a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2t}}\right],\tag{20}$$

где $\operatorname{erf} z$ — функция ошибок [1, 2]. Сравнение результатов вычислений по этим формулам показало, что решения до некоторого фиксированого t_0 являются монотонно убывающими функциями по x; при $t>t_0$ для решений (18) и (20), в отличие от классического случая (19), характерно образование уединенной волны, движущейся в направлении оси x с монотонно убывающей по t амплитудой.

Отметим один новый момент, связанный с заданием начальных условий для оператора L. Решение (18) удовлетворяет неравенству $0\le u(x,t)\le V$. Если же в (14) задать вместо второго условия условие $\partial u(x,0)/\partial t=0$, то решение такой задачи будет отличаться от вида (18) лишь знаком при втором члене. В этом случае указанное неравенство не будет выполняться: существует такое t_0, что при $t > t_0$ на полуоси Ox решение принимает как положительные, так и отрицательные значения, причем $u(x,t) \to -0$ при $x \to \infty$. Это справедливо для любых сколь угодно малых значений $\alpha_2 > 0$.

7. Решения типа бегущей волны. Рассмотрим вначале одномерный вариант уравнения (3) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$

$$L_2 u \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2 \partial^2/\partial x^2)(\partial u/\partial t - \varkappa^2 \partial^2 u/\partial x^2) = 0 \tag{21}$$

и будем искать его автомодельные решения вида

$$u_A(x,t) = e^{\beta t}\varphi(\xi), \quad \xi = x - vt, \tag{22}$$

где v — скорость волны, β — коэффициент затухания. Функция $\varphi(\xi)$ определяется, очевидно, из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varkappa^4 \varphi^{\mathrm{IV}} + 2\varkappa^2 v \varphi^{\mathrm{III}} + (v^2 - 2\varkappa^2\beta)\varphi^{\mathrm{II}} - 2\beta v \varphi^{\mathrm{I}} + \beta^2 \varphi = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(\xi) = c_1 e^{r_1 \xi} + c_2 e^{r_2 \xi} + c_3 \xi e^{r_1 \xi} + c_4 \xi e^{r_2 \xi}, \tag{23}$$

где c_j, $j = \overline{1,4}$ — произвольные постоянные, r_1, r_2 вычисляются по формуле

$$r_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2}. \tag{24}$$

Тепловой поток в рассматриваемом случае задается в виде

$$q(\xi,t) = \mu e^{\beta t}[\varkappa^2 \varphi^{\mathrm{III}}(\xi) + v\varphi^{\mathrm{II}}(\xi) - \beta\varphi^{\mathrm{I}}(\xi)].$$

Среди множества функций (23) содержатся автомодельные решения, удовлетворяющие условиям $\varphi(\xi) > 0$, $\xi < 0$; $\varphi(0) = 0$; $\beta\varphi(0) - v\varphi^{\mathrm{I}}(0) - 2x^2\varphi^{\mathrm{II}}(0) = 0$; $q(0,t) = 0$. Они обеспечивают непрерывность начальных условий, следующих из (14), и потока в точке $\xi = 0$. Поэтому существуют решения уравнения (21) со всюду непрерывным тепловым потоком, которые при каждом $t \in (0,T)$ являются финитными по x: $u_A(x,t) = 0$ при $x \geq vt$. Это означает, что уравнение (21) пригодно для описания процессов с конечной скоростью распространения возмущений. Опуская громоздкие выкладки, приводим их окончательный вид

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_1\left(e^{-\frac{v}{\varkappa^2}\xi} - 1 - \dfrac{v}{\varkappa^2}\xi\right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{25}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_2 \xi \left(\dfrac{4r_2\varkappa^2 + v}{4r_1\varkappa^2 + v} e^{r_1\xi} - e^{r_2\xi}\right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \beta = -\dfrac{v^2}{8\varkappa^2}, \end{cases} \tag{26}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_3\Bigg[e^{r_2\xi} - e^{r_1\xi} + \dfrac{v(r_2 - r_1)}{4r_1\varkappa^2 + v}\xi e^{r_1\xi} + \dfrac{v\sqrt{v^2+4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2(v^2+8\beta\varkappa^2)}(\sqrt{v^2+4\beta\varkappa^2} - v)\xi \times \\ \qquad \times \left(e^{r_2\xi} - \dfrac{4r_2\varkappa^2 + v}{4r_1\varkappa^2 + v} e^{r_1\xi}\right)\Bigg], \quad \xi < 0, \\ 0, \qquad \xi \geq 0, \quad -\dfrac{v^2}{8\varkappa^2} < \beta < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Здесь c_s, $s=\overline{1,3}$ — произвольные постоянные, $r_{1,2}$ определяются по формуле (24). При $\xi<0$ решения $u_A(x,t)$, построенные в виде (22) с помощью (25)–(27), являются классическими, но они могут не иметь достаточную гладкость в точках фронта волны $X(t)=vt$, где обращаются в нуль.

Аналогичным образом можно показать, что среди решений общего бипараболического уравнения (3) содержится в точности три финитных решения, описывающих распространение возмущений с конечной скоростью.

Примеры финитных решений классических нелинейных уравнений теплопроводности второго порядка, обладающих подобными свойствами, рассмотрены в [8, 9].

8. Степенной граничный режим. Будем искать решения уравнения (21) при граничном условии [8] $u(0,t)=(1+t)^\alpha$, $\alpha=\mathrm{const}>0$, вида $u_A(x,t)=(1+t^\alpha)\varphi(\xi)$, $\xi=\frac{x}{\sqrt{1+t}}$. Нетрудно показать, что функция $\varphi(\xi)$ должна определяться из дифференциального уравнения

$$\left(\varkappa^2\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi}-(\alpha-1)\right)\left(\varkappa^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi\right)=0,$$

общее решение которого выражается через функции Эрмита и имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(\xi)={}&c_1H_{2\alpha}(i\xi/2\varkappa)+c_2H_{2\alpha-2}(i\xi/2\varkappa)+c_3e^{-\xi^2/4\varkappa^2}H_{-2\alpha-1}(\xi/2\varkappa)+\\&+c_4e^{-\xi^2/4\varkappa^2}H_{-2\alpha+1}(\xi/2\varkappa).\end{aligned}\tag{28}$$

Используя асимптотические представления функций Эрмита [10] и требуя ограниченности $\varphi(\xi)$ при $\xi\to\infty$, устанавливаем, что $c_1=c_2=0$ при $\alpha>1$ и $c_1=0$ при $0<\alpha<1$. При выполнении этих условий имеют место два случая: 1) $\varphi(\infty)=0$, если $\alpha\neq1$; 2) $\varphi(\infty)=1$, если $\alpha=1$.

Если, следуя [8], ввести координату фронта тепловой волны $\varkappa_\Phi(t)=\xi_\Phi(t)(1+t)^{1/2}$, то для финитности решения уравнения (21) необходимо, чтобы

$$\varphi(\xi_\Phi)=q(\xi_\Phi,t)=0,\tag{29}$$

где тепловой поток определяется формулой

$$q(\xi,t)=-\mu(1+t)^{\alpha-3/2}\left[(\alpha-1/2)\varphi'(\xi)-\frac{\xi}{2}\varphi''(\xi)-\varkappa^2\varphi'''(\xi)\right].$$

Рассмотрим указанные выше случаи отдельно.

А) Пусть $\alpha>1$. Зафиксировав в (28) $\xi=\xi_\Phi$ при $c_1=c_2=0$, для определения постоянных c_3 и c_4 получим однородную алгебраическую систему, определитель которой

$$\Delta\sim1/2\varkappa(\xi_\Phi/\varkappa)^{-4\alpha-3}[(\xi_\Phi/\varkappa)^4+4(\alpha+1)(\xi_\Phi/\varkappa)^2+12(2\alpha+1)^2]\tag{30}$$

отличен от нуля, что следует из асимптотического представления функций Эрмита для достаточно больших $\xi_\Phi/2\varkappa$. Следовательно, для принятых условий фронт волны не может находиться в конечной точке, и уравнение (21) описывает распространение возмущений с бесконечной скоростью.

Б) Пусть $0<\alpha<1$. Здесь для определения постоянных c_3 и c_4 в (28) при произвольном фиксированном c_2 получается неоднородная алгебраическая система, определитель которой при достаточно больших $\xi_\Phi/2\varkappa$ имеет вид (30) и отличен от нуля. Следовательно, постоянные c_s, $s=\overline{2,4}$, можно выбрать так, чтобы удовлетворялись равенства (29), и, таким образом, построить финитное решение уравнения (21), описывающее тепловую волну с конечной скоростью распространения возмущений.

9. Степенной граничный режим с обострением. Если граничная функция неограниченно возрастает за конечный промежуток времени ($u(0,t) \to \infty$ при $t \to T^-$), то тепловой режим называется режимом с обострением [8]. Ему, например, соответствует граничное условие

$$u(0,t) = (T-t)^{-\alpha}, \qquad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{31}$$

Будем искать решение уравнения (21) в виде

$$u_A(x,t) = (T-t)^{-\alpha}\varphi(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{T-t}}. \tag{32}$$

Можно показать, что функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\left(\varkappa^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi} - (\alpha+1)\right)\left(\varkappa^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha\varphi\right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = c_1 H_{-2\alpha}(\xi/2\varkappa) + c_2 H_{-2\alpha-2}(\xi/2\varkappa) + c_3 e^{\xi^2/4\varkappa^2} H_{2\alpha-1}(i\xi/2\varkappa) + \\ + c_4 e^{\xi^2/4\varkappa^2} H_{2\alpha+1}(i\xi/2\varkappa), \end{aligned} \tag{33}$$

причем ограниченное при $\xi \to \infty$ решение получается из (33) при $c_3 = c_4 = 0$. В этом случае полуширина волны [81 определяется формулой $X = \xi_\Phi (T-t)^{1/2}$, из которой следует, что $X \to 0$ при $t \to T^-$, т.е. поступающая в среду энергия сосредотачивается в зоне с сокращающимся эффективным размером. При этом тепловой поток записывается в виде

$$q(\xi,t) = -\mu(T-t)^{-\alpha-3/2}\left[(\alpha+1/2)\varphi'(\xi) + \frac{\xi}{2}\varphi''(\xi) - \varkappa^2\varphi'''(\xi)\right].$$

Для финитного решения вида (32) уравнения (21) должны, как и ранее, выполняться условия (29), поэтому для определения постоянных c_1, и c_2, из (33) при фиксированном $\xi = \xi_\Phi$ получаем однородную алгебраическую систему, определитель которой Δ должен быть равен нулю. Однако оказывается, что если в Δ воспользоваться асимптотическими представлениями функций Эрмита при больших $\xi_\Phi/2\varkappa$ приходим к равенству $12(\alpha+1)\varkappa^2 + \xi_\Phi^2 = 0$, которое невозможно ввиду $\alpha > 0$. Следовательно, фронт тепловой волны не может находиться в конечной точке ξ_Φ, и, таким образом, в режиме с обострением уравнение (21) описывает распространение возмущений с бесконечной скоростью (см. также [8]).

1. Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, в 2 т., М., Изд-во иностр. лит., 1958, Т. 1, 930 с.

2. Лыков А.В., Теория теплопроводности, М., Высш. шк., 1967, 599 с.

3. Толубинский Е.В., Теория процессов переноса, Киев, Наук. думка, 1969, 259 с.

4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Обобщенная термомеханика, Киев, Наук. думка, 1976, 310 с.

5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–22.
6. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
7. Положий Г.Н., Уравнения математической физики, М., Высш. шк., 1964, 560 с.
8. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 477 с.
9. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А., Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур), М., Наука, 1987, 352 с.
10. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики, М., Наука, 1984, 319 с.