Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики

В.И. ФУЩИЧ, В.И. ЧОПИК, П.И. МИРОНЮК

The conditional invariance of the nonlinear acoustics equations is investigated. Using the conditional symmetry the Khokhlov–Zabolotskaja equation is reduced to the differential equations with smaller dimension and its exact solutions are obtained.

1. Рассмотрим уравнение

$$u_{01} - (f(u)u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0,$$
$$f(u) \neq \text{const}, \quad u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ij} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1}$$

частным случаем которого является известное уравнение нелинейной акустики ограниченных звуковых пучков (уравнение Хохлова–Заболотской) [1]:

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{2}$$

В [2] методом Ли найдена симметрия уравнения (2) и показано, что симметрия (2) есть бесконечномерная алгебра. Из этой алгебры можно выделить конечную замкнутую подалгебру с операторами

$$Q_{\mu+1} = \partial_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad Q_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad Q_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2,$$
$$Q_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad Q_8 x^\mu \partial_\mu, \tag{3}$$

$$Q_9 = ux_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2u\partial_u, \quad Q_{10} = x_0\partial_1 - \partial_u. \tag{4}$$

Условную инвариантность одномерного уравнения акустики вида $u_{00} = uu_{11}$ исследовано в [3].

В данной работе изучается условная симметрия уравнений (1), (2). Для этого используем понятия, введенные в [4, 5].

Сначала опишем дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$f(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{5}$$

которые имеют более широкую симметрию, чем алгебра, порождаемая операторами (3), (4).

Теорема 1. *Для того, чтобы уравнение (5) допускало алгебру Ли, порождаемую (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы (5) имело вид*

$$u_0u_1 - uu_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0. \tag{6}$$

Исследуем максимальную (в смысле Ли) симметрию этого уравнения.

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 9, С. 25–28.

Теорема 2. *Уравнение (6) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a^i(u)Q_i, \quad i = \overline{1,16}, \tag{7}$$

где $a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, Q_j, $j = \overline{1,10}$, имеют вид (3), (4),

$$Q_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + 2ux_0)\partial_2, \quad Q_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2ux_0)\partial_3, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} Q_{13} = 4x_0Q_8 - a(\boldsymbol{x}, u)\partial_1, \quad Q_{14} = 2x_2Q_8 + a(\boldsymbol{x}, u)\partial_2, \\ Q_{15} = 2x_3Q_8 + a(\boldsymbol{x}, u)\partial_3, \quad Q_{16} = 4(ux_0 + x_1)Q_8 - a(\boldsymbol{x}, u)(\partial_0 - u\partial_1), \\ a(\boldsymbol{x}, u) \equiv 4ux_0^2 + 4x_0x_1 - x_2^2 - x_3^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство теорем проводится по схеме, изложенной в [5].

2. Перейдем к изучению условной инвариантности уравнений (2). Наложим на решения уравнения (2) дополнительное условие (6). Тогда имеет место

Теорема 3. *Уравнение (2) при дополнительном условии (6) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a^iQ_i, \quad i = \overline{1,12}, \tag{10}$$

где $a^i = a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, Q_i заданы формулами (3), (4), (8).

Для уравнения (1) справедлива

Теорема 4. *Уравнение (1) при произвольной функции $f(u)$ инвариантно относительно 8-мерной алгебры Ли с базисными операторами Q_i ($i = \overline{1,8}$) вида (3).*

Если на решения уравнения (1) наложить дополнительное условие

$$u_0u_1 - f(u)u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0, \tag{11}$$

то имеет место

Теорема 5. *Уравнение (1) при условии (11) допускает бесконечномерную алгебру Ли с оператором*

$$X = a^iR_i, \quad i = \overline{1,12},$$

где $a^i \equiv a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, а для R_i имеем $R_j = Q_j$, $j = \overline{1,8}$ (см. (3)),

$$\begin{gathered} R_9 = 4x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2\frac{f}{f'}\partial_u, \quad R_{10} = f'(u)x_0\partial_1 - \partial_u, \\ R_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + 2f(u)x_0)\partial_2, \quad R_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2f(u)x_0)\partial_3. \end{gathered} \tag{12}$$

Для доказательства теорем 3–5 необходимо использовать алгоритм С. Ли [5].

Замечание. Система (1), (11) заменой $v = f(u)$ сводится системе уравнений (2), (6).

3. Используя приведенные теоремы, можно провести редукцию и найти точные решения системы (2), (6) и тем самым получить решение уравнения (2).

Для примера рассмотрим оператор

$$X = \partial_0 - a(u)\partial_1, \tag{13}$$

который входит в алгебру (10) ($a(u)$ — произвольная функция). По этому оператору строим анзац [5]

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = a(u)x_0 + x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3. \tag{14}$$

Заметим, что этот анзац нельзя получить с помощью алгебры симметрии уравнения (2), поскольку это уравнение без дополнительного условия (6) неинвариантно относительно оператора (13). Подстановку (14) естественно назвать **условным анзацем** для уравнения (2). Подставляя (14) в (2), (6), получим редуцированную систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_{11}[a(\varphi) - \varphi] - \varphi_{22} - \varphi_{33} + [a'(\varphi) - 1]\varphi_1^2 = 0,\\ &[a(\varphi) - \varphi]\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\varphi_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad \varphi_{ii} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i^2}, \quad i = \overline{1,3},$$

которую можно решить, конкретизируя функцию $a(u)$.

Для иллюстрации рассмотрим два случая.

Пусть $a(u) \equiv u$. Система (15) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_{22} + \varphi_{33} = 0,\\ &\varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Общее решение системы (16) имеет вид:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Phi(\omega_1, \omega_2 \pm i\omega_3), \tag{17}$$

где Φ — произвольная гладкая функция.

Подставляя (17) в (14), получаем решение уравнения (2)

$$u = \Phi(ux_0 + x_1, x_2 \pm ix_3). \tag{18}$$

Пусть $a(u) \equiv u + 1$. Система (15) запишется как

$$\begin{aligned} &\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = 0,\\ &\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

В [6] найдено общее решение системы (19)

$$\Psi(\varphi) = l(\varphi)\omega_1 + m(\varphi)\omega_2 + n(\varphi)\omega_3, \tag{20}$$

где $\Psi(\varphi)$ — произвольная функция, функции $l(\varphi)$, $m(\varphi)$, $n(\varphi)$ удовлетворяют условию

$$l^2(\varphi) - m^2(\varphi) - n^2(\varphi) = 0, \qquad m^2(\varphi) + n^2(\varphi) \neq 0.$$

Выразив из (20) φ и подставив в (14), получим решение уравнения (2).

Операторы Q_{11}, Q_{12} из (8) порождают следующие конечные преобразования:

$$\begin{aligned}&x'_0 = \alpha(\boldsymbol{x}, u, a), \quad \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = \beta(\boldsymbol{x}, u, a),\\ &x'_3 = \gamma(\boldsymbol{x}, u, a), \qquad u' = u.\end{aligned} \tag{21}$$

В (21) для оператора Q_{11} выполняется

$$\begin{aligned}&\alpha(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[\frac{x_1 + 2x_0u}{\sqrt{u}}\operatorname{ch}(2\sqrt{u}a) + x_2\operatorname{sh}(2\sqrt{u}a)\right] - \frac{x_1}{2u},\\ &\beta(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{x_1 + 2x_0u}{\sqrt{u}}\operatorname{sh}(2\sqrt{u}a) + x_2\operatorname{ch}(2\sqrt{u}a), \quad \gamma \equiv 1,\end{aligned} \tag{22}$$

а для оператора Q_{12} соответственно

$$\begin{aligned}&\alpha(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[\frac{x_1 + 2x_0u}{\sqrt{u}}\operatorname{ch}(2\sqrt{u}a) + x_3\operatorname{sh}(2\sqrt{u}a)\right] - \frac{x_1}{2u},\\ &\beta \equiv 1, \quad \gamma(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{x_1 + 2x_0u}{\sqrt{u}}\operatorname{sh}(2\sqrt{u}a) + x_3\operatorname{ch}(2\sqrt{u}a).\end{aligned} \tag{23}$$

Отметим, что уравнение (2) без дополнительного условия (6) неинвариантно относительно операторов Q_{11}, Q_{12}. Система (2), (6) инвариантна относительно преобразований (22), (23). А это значит, что справедлива следующая формула размножения решений уравнения (2): если u_1 — решение системы (2), (6), то новое решение u_2 строится согласно формуле

$$u_2 = u_1\{\alpha(\boldsymbol{x}, u_2, a), x_1, \beta(\boldsymbol{x}, u_2, a), \gamma(\boldsymbol{x}, u_2, a)\}. \tag{24}$$

В (24) $\alpha(\boldsymbol{x}, u_2, a), \beta(\boldsymbol{x}, u_2, a), \gamma(\boldsymbol{x}, u_2, a)$ имеют вид (22), (23).

1. Руденко О.В., Солуян С.И., Теоретические основы нелинейной акустики, М., Наука, 1975, 320 с.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В., Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1986, 336 с.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики, *Докл. АН УССР*, 1988, № 10, 28–33.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1988, 336 с.
6. Collins C.B., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–187.