Редукция и точные решения уравнения Гамильтона–Якоби

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Проведена классификация с точностью до эквивалентности подалгебр алгебры $AC(1,4)$, являющейся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. С использованием подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ построены анзацы, редуцирующие уравнение Гамильтона–Якоби к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены широкие классы точных решений уравнения Гамильтона–Якоби. Исследуется также зависимость между уравнениями Гамильтона–Якоби и эйконала.

Введение

В настоящей работе изучается уравнение Гамильтона–Якоби

$$u_t + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0, \tag{1.1}$$

где $u = u(t, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, m — постоянная (масса частицы). Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.1) является конформная алгебра $AC(1,4)$, являющаяся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. Это позволяет использовать подалгебры алгебры $AC(1,4)$ для редукции и нахождения точных решений уравнения (1.1). Работа состоит из 7 параграфов. В § 1 выделяются подалгебры алгебры $AC(1,4)$, которые позволяют находить вещественные решения уравнения (1.1), а также исследуется зависимость между уравнением Гамильтона–Якоби и релятивистским уравнением Гамильтона

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \tag{1.2}$$

В § 2 проведена классификация подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-еквивалентности. Две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются $C(1,4)$-эквивалентными, если с точностью до $C(1,4)$-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами. В § 3 для каждой подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ находится полная система ее инвариантов. Это позволяет в §§ 4–7 построить анзацы, редуцирующие уравнение (1.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений получены широкие классы точных решений уравнения (1.1).

§ 1. Алгебра инвариантности уравнения Гамильтона–Якоби

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения Гамильтона–Якоби является конформная алгебра $AC(1,4)$ [1], обладающая базисом

$$J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad P_a = \partial_a, \quad P_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u),$$

Препринт 90.41, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, 40 с.

$$P_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - m\partial_u), \quad D = -(t\partial_0 + x^a\partial_a + u\partial_u),$$
$$J_{04} = t\partial_0 - u\partial_u, \quad J_{0a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$
$$J_{a4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$
$$K_0 = -\sqrt{2}\left[\left(t^2 + \frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2} + \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_4 = \sqrt{2}\left[\left(t^2 - \tfrac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t - \tfrac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\tfrac{m}{2}\vec{x}^{\,2} - \tfrac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_a = -2x_aD + \left(\frac{2}{m}tu - \vec{x}^{\,2}\right)P_a,$$

где $\vec{x}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $(a, b = 1, 2, 3)$.

Алгебра $AC(1,4)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,4) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \supset\!\!\!\!+ AO(1,4)$, где $AO(1,4) = \langle J_{\mu\nu} \,|\, \mu,\nu = 0,1,\ldots,4\rangle$, расширенную алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = AP(1,4) \supset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, а также оптическую алгебру $AOpt(3)$, обладающую базисом

$$S_1 + T_1 = -\sqrt{2}\left\{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_0 + tx^a\partial_a + \frac{m}{2}\vec{x}^2\partial_u\right\},$$
$$Z_1 = -J_{04} - D = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + 2u\partial_u,$$
$$C_1 = J_{04} - D = 2t\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3,$$
$$T_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\partial_0, \quad M_1 = -\sqrt{2}m\partial_u, \quad P_a = \partial_a,$$
$$G_a = J_{0a} + J_{a4} = -\sqrt{2}(t\partial_a + mx_a\partial_u), \quad J_{ab}.$$

В предлагаемой работе полалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ используются для редукции и поиска точных решений уравнения (1.1). Уравнение (1.1) неинвариантно относительно преобразования Ψ: $t \to -t$, $x_a \to x_a$, $u \to u$, а потому неинвариантно относительно группы $C(1,4)$. Это означает, что подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ следует изучать с точностью до G_1-эквивалентности, где G_1 — собственный нормальный делитель группы $C(1,4)$, причем $G_1 \lambda \{\Psi\} = C(1,4)$. При этом две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются G_1-эквивалентными, если с точностью до G_1-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами. Эта задача эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности, которую мы и будем в дальнейшем рассматривать. Исходя из этого, проводим вначале классификацию подалгебр, алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности, выписываем редуцированные уравнения, соответствующие этим подалгебрам, и находим, где это возможно, точные решения уравнения (1.1). Преобразование Ψ легко учесть в окончательном результате, подействовав, если это необходимо, на редуцированные уравнения или найденные решения уравнения (1.1).

Так как мы ищем только вещественные решения уравнения (1.1), то достаточно ограничиться рассмотрением лишь тех подалгебр $L \subset AC(1,4)$, которые с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности не содержат P_0 и $P_0 + P_4$. Действительно, пусть, например, $P_0 \in L$. Поскольку $P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u)$, то полная система инвариантов алгебры $\langle P_0\rangle$ состоит из функций mx_0-u, x_1, x_2, x_3. Любое решение уравнения (1.1), инвариантное относительно L, инвариантно и относительно $\langle P_0\rangle$ и потому имеет вид $u=mx_0-f(x_1,x_2,x_3)$. Но тогда $2m^2+(\nabla u)^2=0$, и мы приходим к противоречию. Аналогично рассматривается случай $P_0+P_4\in L$.

Уравнение (1.1) тесно связано с релятивистским уравнением Гамильтона. Чтобы установить эту связь между двумя уравнениями, рассмотрим пространства $X_t\times U$ и $X\times V$, где и $X=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\}$ и $X_t=\{(t,x_1,x_2,x_3)\}$ — пространства, представляющие независимые переменные, а $U=\{u\}$ и $V=\{v\}$ пространства зависимых переменных. Отображение $\theta:(t,\vec{x},u)\to(x_0,\vec{x},v)$, определенное с помощью формул

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{u}{m}\right),\quad x_a=x_a,\quad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{u}{m}\right),$$

является отображением пространства $X_t\times U$ на пространство $X\times V$. В предположении, что $\frac{\partial v}{\partial x_0}+1\neq 0$, подстановка θ переводит уравнение (1.2) в уравнение (1.1). Аналогично, отображение $\theta_1:(x_0,\vec{x},v)\to(t,\vec{x},u)$, определенное с помощью формул

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+v),\quad x_a=x_a,\quad u=\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-v),$$

является отображением пространства $X\times V$ на пространство $X_t\times U$, и если $m+u_t\neq 0$, то подстановка θ_1 переводит уравнение (1.1) в (1.2). Так как $\theta\theta_1$ — тождественное преобразование пространства $X\times V$, а $\theta_1\theta$ — тождественное преобразование пространства $X_t\times U$, то $\theta_1=\theta^{-1}$.

Исследуем зависимость между уравнениями (1.1) и (1.2) более подробно. С этой целью рассмотрим пространства $X_t\times U\times U^{(1)}$ и $X\times V\times V^{(1)}$, координаты которых представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные первого порядка от зависимых переменных. Выделим в $X_t\times U\times U^{(1)}$ открытое подпространство M_1, состоящее из тех векторов $(t,\vec{x},u,u_0,u_1,u_2,u_3)$ у которых $u_0+m\neq 0$, а в $X\times V\times V^{(1)}$ — открытое подпространство M_2, состоящее из тех векторов $(x_0,\vec{x},v,v_0,v_1,v_2,v_3)$, у которых $v_0+1\neq 0$. Покажем, что отображение $\theta:X_t\times U\to X\times V$ можно продолжить до отображения $\hat{\theta}:M_1\to M_2$.

Возьмем произвольную функцию $u=f(t,\vec{x})$, и пусть

$$\Gamma_f=\{(t,\vec{x},f(t,\vec{x}))\mid(t,\vec{x})\in\Omega\}\subset X_t\times U$$

— ее график, где Ω — область определения функции f. Отображение θ переводит Γ_f в

$$\theta\cdot\Gamma_f=\{x_0,\vec{x},v)=\theta(t,\vec{x},v)\mid(t,\vec{x},u)\in\Gamma_f\}.$$

Множество $\theta\cdot\Gamma_f$ в общем случае не является графиком какой-либо однозначной функции $v=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Однако, поскольку $m+u_t\neq 0$, то результат преобразования $\theta\cdot\Gamma_f=\Gamma_{\hat{f}}$ является графиком некоторой однозначной гладкой функции $v=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Докажем это. Действительно, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-v)-u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+v),x_1,x_2,x_3\right)=0. \tag{1.3}$$

Найдем производную по v:

$$-\frac{m}{\sqrt{2}} - u_t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(m + u_t).$$

По условию $m + u_t \neq 0$. Поэтому уравнение (1.3) определяет в некоторой окрестности точки (x_0, x_1, x_2, x_3, v) v как однозначную функцию $\hat{f}$ от x_0, x_1, x_2, x_3. Функция $\hat{f}$ называется образом f при отображении θ и обозначается $\hat{f} = \theta \cdot f$ [3]. Отметим также, что если $u_t = 0$, то уравнение Гамильтона–Якоби не имеет действительных решений. Поэтому следует предполагать, что $u_t \neq 0$ и $m + u_t \neq 0$. При таком предположении из допущения $v_0 - 1 = 0$ вытекает, что $v_0 = 1$. В то же время из уравнения (1.3) получаем $1 + v_0 = 0$, т.е. $v_0 = -1$. Таким образом, $v_0 + 1 \neq 0$. Продолжение $\hat{\theta} : M_1 \to M_2$ отображения θ определяется так, что оно преобразует производные функции $u = f(t, \vec{x})$ в соответствующие производные преобразованных функций $v = f(x_0, \vec{x})$. Продолженное действие отображения θ определено корректно. Действительно, пусть $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_1^0, u_2^0, u_2^0, u_3^0)$ — заданная точка в M_1. Выберем произвольную гладкую функцию $u = f(t, \vec{x})$, определенную в окрестности точки $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, график которой лежит в M_1 и которая имеет данные производные u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0 в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$. Преобразованная функция $\theta \cdot f$ определена в окрестности соответствующей точки $(x_0^0, \vec{x}^{\,0}, v^0) = \theta(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0)$. Мы определим теперь действие продолженного преобразования $\hat{\theta}$ на точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ вычисляя производные преобразованной функции $\theta \cdot f$ в точке $(x_0^0, \vec{x}^{\,0})$. Пользуясь цепным правилом, получаем, что это определение зависит лишь от производных функции f в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, т.е. от самой точки $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, и, следовательно, не зависит от выбора функции f, представляющей точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$.

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.2) является конформная алгебра $\hat{A}C(1,4)$ [4], реализующаяся следующими операторами:

$$\hat{P}_\alpha = \partial_\alpha, \quad \hat{J}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad \hat{D} = -x^\alpha \partial_\alpha,$$
$$\hat{K}_\alpha = -2(g^{\alpha\beta} x_\beta)\hat{D} - (g^{\beta\nu} x_\beta x_\nu)\partial_\alpha,$$

где $x_4 = u$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta, \nu = 0, 1, \ldots, 4)$. Пусть Δ_1 и Δ_2 — многообразия, которые определяются уравнениями (1.1) и (1.2) соответственно, M_1' — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_1, для которых $u_t + m \neq 0$, а M_2' — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_2, для которых $u_0 + 1 \neq 0$. Очевидно, $M_1' = M_1 \cap \Delta_1$, $M_2' = M_2 \cap \Delta_2$, в силу выше изложенного $\hat{\theta}$ отображает M_1' на M_2'. Инвариантность уравнения (1.1) относительно группы $G_1 = \exp AC(1,4)$ означает, что многообразие Δ_1 инвариантно относительно действия продолженной группы $\tilde{G}_1$. Аналогично, многообразие Δ_2 инвариантно относительно продолженной группы $\tilde{G}_2$, где $G_2 = \exp \hat{A}C(1,4)$. Отсюда вытекает, что если $g_1 \in \tilde{G}_1$, то $\hat{\theta} g_1 \hat{\theta}_1 \in G_2$ и обратно, если $g_2 \in \tilde{G}_2$, то $\hat{\theta}_1 g_2 \hat{\theta} \in \tilde{G}_1$. Таким образом, отображение θ индуцирует изоморфизм $\varphi_\theta : X \to \theta X \theta_1$ алгебры $AC(1,4)$ на алгебру $\hat{A}C(1,4)$, который действует следующим образом:

$$P_0 \to -\hat{P}_0, \quad P_4 \to -\hat{P}_4, \quad J_{ab} \to \hat{J}_{ab}, \quad J_{a4} \to -\hat{J}_{a4}, \quad J_{04} \to \hat{J}_{04},$$
$$J_{0a} \to -\hat{J}_{0a}, \quad K_0 \to -\hat{K}_0, \quad K_4 \to -\hat{K}_4, \quad K_a \to \hat{K}_a.$$

Докажем, например, что $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$. Действительно, пусть $f(x_0, \vec{x}, v)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда

$$\theta_1 f(x_0, \vec{x}, v) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{u}{m}\right), \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{u}{m}\right)\right),$$

и, значит, $P_0 \cdot \theta_1 f(x_0, \vec{x}, v) = -\frac{\partial f}{\partial x_0}$. Следовательно, $\theta P_0 \theta_1 = -\frac{\partial}{\partial x_0} = -\hat{P}_0$, а потому $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$.

Пусть H произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$, тогда $\varphi_\theta(H) = \hat{H}$ является подалгеброй алгебры $\hat{A}C(1,4)$, причем ранги алгебр H и $\hat{H}$ совпадают. Из предыдущих результатов вытекает, что если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов алгебры H, то $\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_s)$ — полная система инвариантов алгебры $\hat{H}$. Анзац $\omega_s = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$, соответствующие подалгебре H, редуцирует уравнение (1.1) к дифференциальному уравнению $F(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, содержащему только переменные $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$, функцию φ и частные производные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-1}$ от φ по переменным $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ соответственно. Анзац $\theta(\omega_s) = \varphi(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}))$, соответствующий подалгебре $\hat{H}$, редуцирует уравнение (1.2) к дифференциальному уравнению $F(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}), \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, имеющему тот же вид, что и предыдущее. Это утверждение вытекает из равенства

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1 = -\frac{4m}{(m + v_t)^2}\left(v_t + \frac{1}{2m}(\Delta v)^2\right)$$

и соотношений

$$u_0 = \frac{m - v_t}{m + v_t}, \quad u_a = \frac{\sqrt{2}}{m + v_t} v_a \quad (a = 1, 2, 3),$$

которые связывают производные функций $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $v = \theta u$.

§ 2. Подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$

В настоящем параграфе мы проводим классификацию подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности. Как уже отмечалось в § 1, мы рассматриваем лишь те подалгебры $L \subset AC(1,4)$, которые с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности не содержат P_0 и $P_0 + P_4$. При решении этой задачи используется классификация подалгебр конформной алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-сопряженности, изложенная в [5]. Положим $H_a = J_{0a} - J_{a4}$.

I. Подалгебры ранга 4 алгебры $AC(1,4)$:

1) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$; 2) $\langle J_{04}, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 3) $\langle G_3, J_{04}, P_1, P_2 \rangle$;
4) $\langle J_{03}, J_{0,4}, J_{34}, P_1, P_2 \rangle$,
5) $AO'(1,3) \oplus \langle P_3 \rangle$, где $AO'(1,3) = \langle J_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = 0, 1, 2, 4 \rangle$; 6) $AO(1,4)$;
7) $\langle J_{12}, D, P_3, P_4 \rangle$; 8) $\langle D, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 9) $\langle J_{04}, D, P_1, P_2 \rangle$;
10) $\langle J_{04} + \alpha D_1, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 11) $\langle J_{04}, J_{12}, D, P_3 \rangle$; 12) $\langle G_3, J_{04}, D, P_1 \rangle$;
13) $\langle G_3 + \alpha D, J_{04} + \beta D, P_1, P_2 \rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$; 14) $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3 \rangle$;
15) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D, P_1 \rangle$; 16) $AO(4) \oplus \langle D \rangle$; 17) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D \rangle$;
18) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D \rangle$; 19) $AO'(1,3) \oplus \langle D, P_3 \rangle$; 20) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, P_3 \rangle$;
21) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T, P_1, P_2 \rangle$; 22) $\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2 \rangle$;
23) $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_2, P_3 \rangle$;
24) $\langle Z_1, S_1 + T_1 + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \sqrt{2} P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2} G_3 \rangle$;
25) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1, Z_1 \rangle$;

26) $\langle P_0+K_0-2J_{12}-2J_{34}, P_1+K_1+2J_{02}, P_3+K_3+2J_{04}, J_{13}+J_{24}\rangle$;
27) $\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03}, -P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}, K_4-P_4\rangle$;
28) $\langle J_{12}-J_{34}+\alpha(P_0+K_0)\rangle\oplus\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle$ $(\alpha>0)$;
29) $\langle P_0+K_0\rangle\oplus AO(3)\oplus\langle K_4-P_4\rangle$;
30) $\langle P_0+K_0\rangle\oplus\langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\frac{\sqrt{3}}{2}(K_4-P_4), J_{23}+J_{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}(K_3-P_3)\rangle$;
31) $\langle P_0+K_0\rangle\oplus AO(4)$;
32) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1-P_1, K_2-P_2, K_3-P_3, K_4-P_4\rangle$;
33) $\langle P_1+K_1, P_2+K_2, J_{12}\rangle\oplus\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$;
34) $\langle P_1+K_1, P_2+K_2, J_{12}\rangle\oplus\langle K_3-P_3, K_4-P_4, J_{34}\rangle$.

II. Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle J_{04}, P_1, P_2\rangle$; 2) $\langle J_{04}, J_{12}, J_3\rangle$; 3) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$; 4) $\langle J_{04}+P_3, P_1, P_2\rangle$;
5) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq 0)$; 6) $\langle J_{04}, D, P_1\rangle$; 7) $\langle J_{12}+cJ_{04}, D, P_3\rangle$ $(c>0)$;
8) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$;
10) $\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha\geq 0)$; 11) $\langle J_{04}+D, J_{12}+M, P_3\rangle$;
12) $\langle P_1, P_2, P_4\rangle$; 13) $\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$;
16) $\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$; 18) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$;
19) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle$; 20) $\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha>0)$; 21) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$;
22) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha>0)$; 23) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2\rangle$;
24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$; 25) $AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\gamma M_1\rangle$ $(\gamma<0)$;
26) $\langle S_1+T_1, J_{12}, Z_1\rangle$; 27) $AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$;
28) $\langle S_1+T_1+J_{12}, Z_1, H_1+P_2\rangle$;
29) $\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0)$;
30) $\langle \alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R)$;
31) $\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$; 32) $\langle G_3, P_1, P_2\rangle$;
33) $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$; 34) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 35) $\langle G_3+2T, P_1, P_2\rangle$;
36) $\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle$; 37) $\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 38) $\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3\rangle$;
39) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$; 40) $\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$;
41) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 42) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$; 43) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1\rangle$;
44) $\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$; 45) $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$;
46) $\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle$; 47) $\langle P_0+K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$;
48) $AO(3)\oplus\langle P_0+K_0\rangle$; 49) $\langle P_0-K_0-\alpha(K_4-P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 1)$;
50) $\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03}, -P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}\rangle$;
51) $\langle 2J_{12}+J_{34}, 2J_{13}+2J_{13}+2J_{24}-\sqrt{3}(K_4-P_4), 2J_{23}-2J_{14}+\sqrt{3}(K_3-P_3)\rangle$.

III. Подалгебры ранга 2 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle P_2, P_3\rangle$; 2) $\langle J_{12}, P_3\rangle$; 3) $\langle J_{04}, P_1\rangle$; 4) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3\rangle$ $(c>0)$;
5) $\langle G_3, P_1\rangle$; 6) $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$; 7) $\langle J_{04}, J_{12}\rangle$; 8) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$;
9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$; 11) $\langle J_{12}+P_0, P_3\rangle$; 12) $\langle J_{14}+P_3, P_2\rangle$;
13) $\langle J_{12}+M, P_3\rangle$; 14) $\langle J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 15) $\langle G_3+P_2, P_1\rangle$; 16) $\langle G_3+2T, P_1\rangle$;
17) $\langle J_{12}+P_0, J_{34}+\delta P_0\rangle$ $(\delta\geq 0)$; 18) $\langle J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$;
19) $\langle J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$; 20) $\langle J_{12}+M, G_3+\delta T\rangle$ $(\delta=0;2)$; 21) $\langle J_{12}, G_3+2T\rangle$;
22) $\langle G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; 23) $\langle G_3, J_{04}+P_1\rangle$;
24) $\langle J_{12}+J_{34}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12}+cJ_{34}, D\rangle$ $(0<c<1)$; 26) $\langle J_{04}, D\rangle$;
27) $\langle J_{12}+cJ_{04}, D\rangle$ $(c>0)$; 28) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;
29) $\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0,\ \beta>0)$; 30) $\langle J_{12}+\alpha D, J_{34}+\beta D\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$;
31) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$; 32) $\langle J_{04}, J_{12}+\alpha D\rangle$;

33) $\langle J_{04}-D+2T,P_1\rangle$; 34) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T),P_3\rangle$ $(c>0)$;
35) $\langle J_{04}+D+M,J_{12}+\alpha M\rangle$ $(\alpha\geq 0)$; 36) $\langle J_{04}+D,J_{12}+M\rangle$;
37) $\langle J_{04}-2D,G_3+2T\rangle$; 38) $\langle J_{04}-D,G_3+P_1\rangle$;
39) $\langle J_{12}+c(J_{04}-2D),G_3+2T\rangle$ $(c>0)$; 40) $\langle S_1+T_1+J_{12},G_1+P_2\rangle$;
41) $\langle J_{12},S+T\rangle$; 42) $\langle S_1+T_1+J_{12}+M,G_1+P_2\rangle$; 43) $\langle S_1+T_1,Z_1\rangle$;
44) $\langle S_1+T_1+\alpha J_{12},Z_1\rangle$ $(\alpha>0)$; 45) $\langle S_1+T_1+J_{12}+\lambda Z_1,G_1+P_2\rangle$ $(\lambda>0)$;
46) $\langle J_{12}+\alpha Z_1,S_1+T_1+\beta Z_1\rangle$ $(\alpha>0)$; 47) $\langle J_{12},S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$ $(\alpha>0)$;
48) $\langle J_{12}+M,S_1+T_1+\gamma M\rangle$; 49) $\langle J_{12},S_1+T_1+M\rangle$; 50) $\langle P_0+K_0,J_{12}\rangle$;
51) $\langle P_0+K_0,J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$ $(0<\alpha\leq 1)$;
52) $\langle J_{12}+\alpha(P_0+K_0),J_{34}+\beta(P_0+K_0)\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0,\ 2\alpha\neq 1$ при $\beta=0)$.

IV. Подалгебры ранга 1 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle P_1\rangle$; 2) $\langle J_{12}\rangle$; 3) $\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle$ $(0<c\leq 1)$; 4) $\langle J_{04}\rangle$;
5) $\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$; 6) $\langle J_{12}+P_0\rangle$; 7) $\langle J_{12}+P_3\rangle$; 8) $\langle J_{12}+M\rangle$;
9) $\langle J_{12}+J_{34}+P_0\rangle$; 10) $\langle J_{12}+cJ_{34}+P_0\rangle$ $(0<c<1)$; 11) $\langle J_{04}+P_1\rangle$;
12) $\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$ $(c>0)$; 13) $\langle G_3+P_1\rangle$; 14) $\langle G_3+2T\rangle$; 15) $\langle G_3-J_{12}+2T\rangle$;
16) $\langle J_{12}+cJ_{34}+\alpha D\rangle$ $(0<c\leq 1,\ \alpha>0)$; 17) $\langle J_{04}+\alpha D\rangle$ $(0<\alpha\leq 1)$;
18) $\langle J_{12}+cJ_{04}+\alpha D\rangle$ $(0<c\leq\alpha)$; 19) $\langle J_{04}-D+2T\rangle$;
20) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T)\rangle$; 21) $\langle S+T\rangle$; 22) $\langle S+T+M\rangle$;
23) $\langle S+T+\alpha J_{12},M\rangle$ $(\alpha>0)$; 24) $\langle S_1+T_1+\alpha J_{12}\rangle$ $(\alpha>0)$;
25) $\langle S_1+T_1+J_{12}+G_1+P_2\rangle$; 26) $\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;
27) $\langle S_1+T_1+\alpha J_{12}+\beta Z_1\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\neq 0)$; 28) $\langle P_0+K_0+\alpha J_{12}\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 2)$;
29) $\langle P_0+K_0+\alpha J_{12}+\beta J_{34}\rangle$ $(0<\alpha\leq\beta;\ \alpha,\beta\neq 2)$; 30) $\langle P_0+K_0\rangle$.

3. Инварианты подалгебр ранга 3 конформной алгебры $AC(1,4)$

В настоящем параграфе мы находим инварианты подалгебр ранга 3 конформной алгебры $AC(1,4)$, представленных в § 2. Запись $L: f_1,\ldots,f_s$ будет означать, что функции $f_1,\ldots,f_s$ образуют полную систему инвариантов алгебры L. Будем предполагать, что $AC(1,4)$ реализуется дифференциальными операторами на множестве решений уравнения Гамильтона–Якоби.

$$\langle J_{04},P_1,P_2\rangle:\ tu,\ x_3.$$
$$\langle J_{04},J_{12},P_3\rangle:\ tu,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}.$$
$$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle:\ tu,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}.$$
$$\langle J_{04}+P_3,P_1,P_2\rangle:\ tu,\ te^{-x_3}.$$
$$\langle J_{04}+\alpha D,P_1,P_2\rangle\ (\alpha\neq 0;1):\ ut^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},\ tx_3^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$
$$\langle J_{04}+D,P_1,P_2\rangle:\ \frac{u}{x_3^2},\ t.$$
$$\langle J_{04},D,P_1\rangle:\ \frac{tu}{x_3^2},\ \frac{x_2}{x_3}.$$
$$\langle J_{12}+cJ_{04},D,P_3\rangle\ (c>0):\ \frac{tu}{x_1^2+x_2^2},\ 2\ln t-\ln(x_1^2+x_2^2)+2c\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}.$$
$$\langle J_{04},J_{12},D\rangle:\ \frac{tu}{x_1^2+x_2^2},\ \frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}.$$

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$ $(\alpha\neq 1):$ $\dfrac{tu}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+D\rangle:$ $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, t.

$\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha\geq 0):$ $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}-\sqrt{2}t}$.

$\langle J_{04}+D, J_{12}+M, P_3\rangle:$ $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2}$, $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1}-t$.

$\langle P_1, P_2, P_4\rangle:$ $u+mt$, x_3.

$\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle:$ $u+mt$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle:$ $ut-\dfrac{m}{2}x_3^2$, x_2.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle:$ $u+mt$, $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle:$ $ut-\dfrac{m}{2}x_3^2$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle:$ $ut-\dfrac{m}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)$, x_3.

$\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle:$ $u+mt-\sqrt{2}m\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha>0):$ $(u+mt)e^{-\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}}$, $\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1}$.

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle:$ $\dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2}$, $\dfrac{x_1}{x_2}$.

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha>0):$ $\dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2}$, $2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

$\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2\rangle:$ $u+\dfrac{m}{\sqrt{2}}\ln t$, $\dfrac{t^{1/2}}{x_3}$.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle:$ $u+\dfrac{m}{\sqrt{2}}\ln t$, $\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t}$.

$AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\gamma M_1\rangle$ $(\gamma<0):$ $\dfrac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}$, $u-\dfrac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}-\sqrt{2}\gamma m\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t)$.

$\langle S_1+T_1, J_{12}, Z_1\rangle:$ $\dfrac{\left(2t^2+1\right)u-mt\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,2}}$, $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}$.

$AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle:$ $\dfrac{\left(2t^2+1\right)u-mt\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,2}}$, $\ln\dfrac{2t^2+1}{\vec{x}^{\,2}}-2\alpha\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t)$.

$\langle S_1+T_1+J_{12}, Z_1, H_1+P_2\rangle:$ $\dfrac{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}{\left(2t^2+1\right)x_3^2}$,

$$\frac{\sqrt{2}\left(2t^2+1\right)u}{x_3^2}-m\left[\frac{\sqrt{2}t\vec{x}^{\,2}}{x_3^2}+2\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)\sqrt{2}t+x_1x_2\left(2t^2-1\right)}{x_3^2}\right].$$

$\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0):$

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},$$

$$u-\sqrt{2}mt\omega^2-\frac{m}{\sqrt{2}}\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\right.$$

$$-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\Bigg]-m\gamma\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t).$$

$\langle \alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R):$

$$u-\frac{m}{\omega^2}\left[\frac{\sqrt{2}t\left(2t^2-3\right)}{2\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{1-6t^2}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2t^2+1}x_1x_3-\right.$$

$$\left.-\frac{2t}{2t^2+1}x_2x_3\right]-\sqrt{2}mt,\ \ln\omega+\alpha\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t),$$

$$\text{где } \omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}}.$$

$\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0):$

$$\frac{u-\frac{m}{2t}x_1^2-\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2}{\left(\frac{\beta x^2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2},\ t.$$

$\langle G_3, P_1, P_2\rangle:\ ut-\dfrac{m}{2}x_3^2,\ u.$

$\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle:\ u,\ ut-\dfrac{m}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$

$AO(1,3):\ u-mt,\ u^2+m^2\left(t^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right).$

$\langle G_3+2T, P_1, P_2\rangle:\ u^2-2m^2x_3,\ u^3-3m^2x_3u+3m^3t.$

$\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle:\ u,\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{m}u+1\right)t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2^2-\dfrac{m}{2u}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{m}u+1\right)x_1^2.$

$\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle:\ ue^{x_2},\ 2ut-mx_3^2.$

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3\rangle:\ ue^{x_3},\ 2ut-m\left(x_1^2+x_2^2\right).$

$\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2+\beta^2\neq 0):\ \dfrac{ut}{x_1^2+x_2^2},$

$$\alpha\ln\frac{u}{t}+2\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

$\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle:\ ux_2^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}},\ \dfrac{2ut-mx_3^2}{x_2^2},$

$\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle:\ \dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2},\ \dfrac{mt+u}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}}.$

$\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle:\ \dfrac{u^2-2m^2x_3}{x_2},\ \dfrac{\left(u^3-3m^2x_3u+3m^3t\right)^2}{x_2^3}.$

$\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle:\ \dfrac{u^2-2m^2x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}},\ \dfrac{u^3-3m^2x_3u+3m^3t}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{3/4}}.$

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle:\ u+mt,\ \left(t-\dfrac{u}{m}\right)^2+2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$

$\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle:$

$$\frac{\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)\right]^2-4\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2},$$

$$\frac{(mt+u)\left[tu-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)\right]+2\sqrt{2}x_1x_3m^2+2mx_2(mt-u)}{\sqrt{2}\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}.$$

$$\langle P_0 - K_0, J_{12}, J_{34}\rangle: \ \frac{2m^2x_3^2 + (mt-u)^2}{2m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)}, \ \frac{\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)}.$$

$$AO(3)\oplus\langle P_0 - K_0\rangle: \ \frac{\sqrt{2}\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]}{mt-u}, \ \frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}}.$$

$$\langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \ (\alpha > 0, \ \alpha \neq 1):$$

$$\frac{2(mt-u)^2 + \left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)},$$

$$\alpha \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(mt+u)}{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)} + \operatorname{arctg}\frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{\sqrt{2}(mt-u)}.$$

$$\langle -2D + J_{04}, -P_0 + P_4 + \sqrt{3}G_3, K_0 + K_4 + \sqrt{3}H_3\rangle: \ \frac{mt-u}{m\sqrt{2}},$$

$$3\sqrt{3}\frac{2(mt+u+m\sqrt{2}x_5) + 2\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)x_4}{m\sqrt{2}x_3^3} +$$

$$+ \frac{(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^3}{2\sqrt{2}m^3x_3^3} - \frac{\left[\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4\right]^3}{8m^6x_3^3} -$$

$$- 12\frac{\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4}{4m^4x_3}\left[(mt-u)^2 + 2m^2\right].$$

$$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle: \ ut - \frac{m}{2}x_3^2, \ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}.$$

$$\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1\rangle: \ \frac{u}{x_2^2}, \ \frac{x_3^2}{u} + \frac{\sqrt{2}}{m}\ln\frac{u}{x_3^2} - \frac{2}{m}(t - \sqrt{2}\ln x_3).$$

§ 4. Анзацы вида $u = f(t,\vec{x})\varphi(\omega)$, $\omega = \omega(t,\vec{x})$

В §§ 4–7 мы используем инварианты подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$, выписанные в § 2, для построения анзацев, редуцирующих уравнение (1.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все такие анзацы мы разбиваем на четыре типа в зависимости от вида анзаца. Для каждого анзаца мы указываем соответствующую ему подалгебру, выписываем редуцированное уравнение и некоторые точные решения уравнения (1.1). В отдельных случаях удобно проводить редукцию уравнения (1.1) по заданной алгебре $L \subset AC(1,4)$, используя для этого цепочку ее подалгебр. Рассмотрим, например, алгебру $L = \langle Y_1, Y_2, Y_3\rangle$, где $Y_1 = -P_0 + P_4 + \sqrt{3}G_3$, $Y_2 = -2D + J_{04}$, $Y_3 = K_0 + K_4 + \sqrt{3}H_3$, и выделим в ней цепочку подалгебр $\langle Y_1\rangle \subset \langle Y_1, Y_2\rangle \subset L$. Полная система инвариантов подалгебры $\langle Y_1\rangle$ состоит из функций

$$t_1 = 2y_1 + 2\sqrt{3}y_2y_5 + y_2^3, \quad t_2 = \sqrt{3}y_2^2 + 4y_5, \quad t_3 = u, \quad t_4 = y_4,$$

где $y_1 = x_0 + x_4$, $y_2 = x_0 - x_4$, $y_2 = x_2$, $y_5 = x_3$. Уравнение Гамильтона–Якоби в переменных y_1, y_2, y_4, y_5, u принимает вид

$$4\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y_4}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y_5}\right)^2 = 1. \qquad (4.1)$$

Подалгебре $\langle Y_1\rangle$ соответствует анзац $u = u(t_1, t_2, t_4)$. Подставляя его в уравнение

(4.1), получаем

$$4\sqrt{3}t_2\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t_4}\right)^2-16\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2=1. \tag{4.2}$$

Полная система инвариантов подалгебры $\langle Y_1, Y_2\rangle$ состоит из функций

$$\omega_1=\frac{t_1^2}{t_4^3},\quad \omega_2=\frac{t_2}{t_4},\quad \frac{u}{t_4}.$$

Применяя анзац $u=t_4\cdot v(\omega_1,\omega_2)$, редуцируем уравнение (4.2) к уравнению

$$\begin{gathered}16\sqrt{3}\omega_1\omega_2\left(\frac{\partial v}{\partial\omega_1}\right)^2-v^2-9\omega_1^2\left(\frac{\partial v}{\partial\omega_1}\right)^2-\omega_2^2\left(\frac{\partial v}{\partial\omega_1}\right)^2+\\ +6\omega_1 v\frac{\partial v}{\partial\omega_1}+2\omega_2 v\frac{\partial v}{\partial\omega_2}-6\omega_1\omega_2 v\frac{\partial v}{\partial\omega_1}\frac{\partial v}{\partial\omega_2}-16\left(\frac{\partial v}{\partial\omega_2}\right)^2=1.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Генератор Y_3 в переменных v, ω_1, ω_2 приобретает вид

$$2m\left[(4+v^2)+\omega_2^2\right]\frac{\partial}{\partial\omega_1}+2\sqrt{3}m\frac{\partial}{\partial\omega_2}.$$

Следовательно, полная система инвариантов алгебры L состоит из функций v и $\omega=3\sqrt{3}\omega_1-\omega_2^3-12\omega_2(\omega_3^2+1)$. Применяя анзац $v=\varphi(\omega)$ и подставляя его в уравнение (4.3), получаем редуцированное уравнение

$$-9\left[\varphi^2-256\left(\omega^2+1\right)^2\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2+6\omega\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)-\omega^2-1=0.$$

1) $\langle J_{12}+cJ_{04},D,P_3\rangle$. Анзац $u=\frac{x_1^2+x_2^2}{t}\varphi(\omega)$, $\omega=2\ln t-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+2c\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, соответствующий данной алгебре, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению

$$2\left(1+c^2\right)\dot\varphi^2+(2m-4\varphi)\dot\varphi+2\varphi^2-m\varphi=0.$$

Решим это уравнение при $c=1$. Находим, что

$$\varphi=\frac{2\varphi-m\pm\sqrt{m^2-4\varphi^2}}{4}.$$

Рассмотрим случай "+". Используя подстановку Эйлера, получаем

$$\ln\frac{2m^2-4\varphi^2-2m\sqrt{m^2-4\varphi^2}}{2m^2-2m\sqrt{m^2-4\varphi^2}}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m^2-4\varphi^2}-m}{2\varphi}=\omega+C.$$

Подставив в это уравнение вместо φ выражение $\frac{tu}{x_1^2+x_2^2}$, а вместо $\omega-2\ln t-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, приходим к такому решению уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{gathered}\ln\left[\frac{x_1^2+x_2^2}{t^2}-\frac{2u^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)-m\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-4t^2u^2}}\right]-\\ -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)-4t^2u^2}}{2tu}-2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+\tilde C=0.\end{gathered}$$

2) $\langle J_{04}+P_3, P_1, P_2\rangle$. Рассмотрим анзац $u=\frac{1}{t}\varphi(\omega)$, где $\omega=te^{-x^3}$. Он преобразует уравнение (1.1) в уравнение

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2m(1-\omega)}{\omega^2}\varphi.$$

Если $m\varphi>0$, то

$$\varphi=\frac{m}{2}\left(2\sqrt{1-\omega}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-\omega}-1}{\sqrt{1-\omega}+1}\right|+C\right)^2.$$

Соответствующие решение уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$u=\frac{m}{2t}\left(2\sqrt{1-te^{-x_3}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-te^{-x_3}}-1}{\sqrt{1-te^{-x_3}}+1}\right|+C\right)^2.$$

Здесь m произвольное, а $1-te^{-x_3}\geq 0$. Если $1-te^{-x_3}<0$ и $m<0$, то имеем решение

$$u=-\frac{2m}{t}\left(C+\sqrt{te^{-x_3}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{te^{-x_3}-1}\right)^2.$$

4) $\langle J_{04}, P_1, P_2\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(x_3),\quad \dot{\varphi}^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}(x_3+C)^2.$$

5) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\quad \dot{\varphi}^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C\right)^2.$$

6) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2},\quad \dot{\varphi}^2=2m\varphi;$$
$$u=\frac{m}{2t}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+C\right)^2.$$

7) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq 0;1)$:

$$u=t^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\varphi(\omega),\quad \omega=tx_3^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$
$$\dot{\varphi}^2+2m\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\omega^{\frac{1-3\alpha}{\alpha-1}}\dot{\varphi}+2m\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3}\omega^{\frac{2-4\alpha}{\alpha-1}}\varphi=0.$$

8) $\langle J_{04}+D, P_1, P_2\rangle$:

$$u=x_3^2\varphi(\omega),\quad \omega=t,\quad m\dot{\varphi}+2\varphi^2=0;\quad u=\frac{mx_3^2}{2t+C}.$$

9) $\langle J_{04}, D, P_1\rangle$:

$$u=\frac{x_3^2}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_2}{x_3},\quad (1+\omega^2)\dot{\varphi}^2-4\omega\varphi\dot{\varphi}+4\varphi^2-2m\varphi=0;\quad u=\frac{m}{2t}x_3^2.$$

10) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$:

$$u=\frac{x_1^2+x_2^2}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2},\quad 2\omega^2(\omega+1)\dot\varphi^2+4\omega\varphi\dot\varphi+2\varphi^2-m\varphi=0;$$
$$u=\frac{m}{2t}\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

11) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$ $(\alpha\neq 1)$:

$$u=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}},$$
$$\frac{2\omega^2}{m}\dot\varphi^2+\left(\frac{4\omega}{m}\varphi+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\omega\right)\dot\varphi+\frac{2\varphi^2}{m}-\varphi=0;\quad u=C+\frac{m}{2t}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$$

12) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+D\rangle$:

$$u=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\varphi(\omega),\quad \omega=t,\quad m\dot\varphi+2\varphi^2=0;\quad u=\frac{m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{2t+C}.$$

13) $\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha\geq 0)$:

$$u=\left(x_1^2+x_2^2\right)\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-\sqrt{2}t},$$
$$(1+\alpha^2)\omega^2\dot\varphi^2+2\omega\varphi\dot\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}m\omega\dot\varphi+\varphi^2=0.$$

14) $\langle J_{04}+D, J_{12}+M, P_3\rangle$:

$$u=\left(x_1^2+x_2^2\right)\varphi(\omega),\quad \omega=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-t,\quad \dot\varphi^2-m\dot\varphi+2\varphi^2=0;$$
$$\left[\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-8u^2}-m\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]^3-$$
$$-24u^2\left[\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-8u^2}-m\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]=$$
$$=12\sqrt{2}u^3\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-12tu^3+Cu^3,$$
$$\frac{2\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-8u^2}-2m\left(x_1^2+x_2^2\right)}{u}+$$
$$+\frac{16u}{\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-8u^2}-m\left(x_1^2+x_2^2\right)}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-t+C.$$

§ 5. Анзацы вида $u=f(t,\vec{x})\varphi(\omega)+g(t,\vec{x})$, $\omega=\omega(t,\vec{x})$.

1) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$. Анзац $u=\varphi(\omega)-mt$, $\omega=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$, соответствующий данной алгебре, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению $\dot\varphi^2-2m^2=0$. Общим решением этого уравнения является функция $\varphi=\pm\sqrt{2}\omega+C$. Ей соответствует такое решение уравнения Гамильтона–Якоби:

$$u=-mt\pm\sqrt{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}+C.$$

2) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle$. Анзац $u=\varphi(\omega)-mt-\sqrt{2}m\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}$, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению

$$\dot\varphi^2 = 2m^2\frac{\omega^2-1}{\omega^2},$$

общим решением которого является

$$\varphi = \pm m\sqrt{2}\left[-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}-\sqrt{\omega^2-1}\right]+C.$$

Соответствующим решением уравнения (1.1) является

$$\varphi = \pm m\sqrt{2}\left[-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}+1}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-1}}-\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{1/2}\right]-$$
$$-mt+\sqrt{2}m\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}+C.$$

3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha>0)$. Применяя анзац

$$u=\frac{x_1^2+x_2^2}{2t}\varphi(\omega)+\frac{mx_3^2}{2t},$$

получаем редуцированное уравнение

$$(\alpha^2+1)\dot\varphi^2-2\varphi\dot\varphi+\varphi(\varphi-m)=0.$$

Следовательно,

$$\dot\varphi=\frac{\varphi\pm\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\alpha^2+1},$$

откуда

$$-\omega+C=-\ln\varphi+2\varepsilon\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\alpha\varphi}-$$
$$-\ln\frac{\varphi+\varepsilon\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\varphi^2}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

Подставив вместо φ выражение $\frac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2}$, а вместо ω — $2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$, получаем решение уравнения (1.1).

4) $\langle P_1, P_2, P_4\rangle$:

$$u=\varphi(x_3)-mt,\quad \dot\varphi^2=2m^2;\quad u=(-1\pm\sqrt{2})mt+C.$$

5) $\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle$:

$$u=\varphi(\omega)-mt,\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\quad \dot\varphi^2=2m^2;$$
$$u=\pm\sqrt{2}m\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-mt+C.$$

6) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega)+\frac{m}{2t}x_3^2,\quad \omega=x_2,\quad \dot\varphi^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}\left[(x_2+C)^2+x_3^2\right].$$

7) $\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}x_3^2, \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \dot{\varphi}^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + C\right)^2 + x_3^2\right].$$

8) $\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = x_3, \quad \dot{\varphi}^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + C)^2\right].$$

9) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}x_3^2, \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \dot{\varphi}^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[x_3^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + C\right)^2\right].$$

10) $\langle J_{12} + \alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$:

$$u = e^{\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}}\varphi(\omega) - mt, \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$
$$4(1+\alpha^2)\dot{\varphi}^2 - 4\alpha^2\varphi\dot{\varphi} + \alpha^2\varphi^2 - 2m^2e^{\omega} = 0;$$
$$u = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} - mt, \quad m = \pm\frac{1}{2}, \quad u = \sqrt{2}m\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} - mt,$$

11) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2}{2t}\varphi(\omega) + \frac{mx_3^2}{2t}, \quad \omega = \frac{x_1}{x_2},$$
$$\omega^2(\omega+1)\dot{\varphi}^2 + 4\omega\varphi\dot{\varphi} + 4\varphi(\varphi - m) = 0; \quad u = \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_3^2\right).$$

12) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2\rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - \frac{m}{\sqrt{2}}\ln t, \quad \omega = \frac{t^{1/2}}{x_3}, \quad \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{\omega^3}\dot{\varphi} - \sqrt{2}m^2\frac{1}{\omega^4} = 0;$$
$$u = \frac{m}{4t}x_3^2 + \frac{m}{2\sqrt{2}}(-2 \pm 2)\ln t \pm$$
$$\pm\, m\left[\frac{\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)^4 - 32t^2}{16t\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)^2} + \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)\right] + C.$$

13) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + 2T\rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - \frac{m}{\sqrt{2}}\ln t, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{t}, \quad 4\omega\dot\varphi^2 - 2m\omega\dot\varphi - \sqrt{2}m^2 = 0;$$

$$u = -\frac{m}{\sqrt{2}}\ln t + \frac{m}{4}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right)^3 + \right.$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right)^2 - 2\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right) +$$
$$\left. + 2\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}\right)\right] + C,$$

$$u = -\frac{m}{2}\ln t - \frac{m\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}}\right] + C.$$

14) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \gamma M_1\rangle$ $(\gamma < 0)$:

$$u = \varphi(\omega) + \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1} + \sqrt{2}\gamma m \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t), \quad \omega = \frac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1},$$
$$m^2(\omega + 2\gamma) + 2\omega\dot\varphi^2 = 0;$$

$$u = \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1} + \sqrt{2}\gamma m \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \pm$$
$$\pm m\gamma\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\vec{x}^{\,2} + 2\gamma(2t^2 + 1)}{\vec{x}^{\,2}}} + \frac{\sqrt{-\vec{x}^{\,2}(\vec{x}^{\,2} + 2\gamma(2t^2 + 1))}}{\sqrt{2}\gamma(2t^2 + 1)}\right] + C.$$

15) $\langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2t^2 + 1}\varphi(\omega) + \frac{mt\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{2t^2 + 1}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2},$$
$$2\omega(\omega + 1)^2\dot\varphi^2 + 2\varphi^2 + m^2 = 0.$$

16) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \alpha Z_1\rangle$:

$$u = \frac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1}\varphi(\omega) + \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1}, \quad \omega = \ln\frac{2t^2 + 1}{\vec{x}^{\,2}} - 2\alpha \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t),$$
$$2\dot\varphi^2 - (4\varphi + 2\sqrt{2}m\alpha)\dot\varphi + 2\varphi^2 + m^2 = 0.$$

17) $\langle S_1 + T_1 + J_{12}, Z_1, H_1 + P_2\rangle$:

$$u = \frac{x_3^2}{\sqrt{2}(2t^2 + 1)}\varphi(\omega) + m\left[\frac{t\vec{x}^{\,2}}{2t^2 + 1} + \sqrt{2}\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)\sqrt{2}t + x_1x_2\left(2t^2 - 1\right)}{\left(2t^2 + 1\right)^2}\right],$$
$$\omega = \frac{\left(x_1 + \sqrt{2}tx_2\right)^2}{\left(2t^2 + 1\right)x_3}, \quad (\omega + \omega^2)\dot\varphi^2 - 2\omega\varphi\dot\varphi + \varphi^2 + m^2(4\omega + 1) = 0.$$

18) $\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0)$:

$$u=\sqrt{2}\varphi(\omega)+2mt\omega^2+m\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{\left(2t^2+1\right)}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+\sqrt{2}m\gamma\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t),$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},\quad \dot\varphi^2=-\frac{4m^2\gamma+12m^2\omega^2}{3};$$
$$u=2mt\omega^2+m\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\right.$$
$$\left.-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+m\sqrt{2}\gamma\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\pm2\sqrt{2}m\arcsin\sqrt{\frac{3}{|\gamma|}}\omega+C.$$

19) $\langle\alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R)$:

$$u=\sqrt{2}\omega^2\varphi(\ln\omega+\alpha\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t))+\sqrt{2}m\left[\frac{\sqrt{2}t\left(2t^2-3\right)}{2\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1-6t^2}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+2mt\omega^2,$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},$$
$$3\dot\varphi^2+4(m\alpha+3\varphi)\dot\varphi+12\left(\varphi^2+m^2\right)=0.$$

20) $\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq0)$

$$u=\left(\frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2\varphi(\omega)+\frac{m}{2t}x_1^2+\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2,$$
$$m\dot\varphi+2\left(\frac{1}{2t^2}+\frac{\beta^2}{(\sqrt{2}t-\alpha)^2}+1\right)\varphi^2=0;$$
$$u=\left(\frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{mt(2t-\sqrt{2}\alpha)}{4t^3+(2mC-2\sqrt{2}\alpha)t^2-(2+2\beta^2+\sqrt{2}m\alpha C)t+\sqrt{2}\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{2t}x_1^2+\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2\right).$$

§ 6. Анзацы вида $p(u)=f(t,\vec{x})\varphi(\omega)+g(t,\vec{x})$, $\omega=\omega(t,\vec{x},u)$

1) $\langle G_3, P_1, P_2\rangle$:

$$u=\varphi(\omega),\quad \omega=ut-\frac{m}{2}x_3^2,\quad \omega\dot\varphi-\varphi=0;\quad u=\frac{mCx_3^2}{2(Ct-1)}.$$

2) $\langle G_1, G_2, G_3 - J_{12}\rangle$:

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = ut - \frac{m}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad \omega\dot{\varphi} - \varphi = 0;$$
$$u = \frac{mC\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{2(Ct - 1)}.$$

3) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$:

$$u = -\varphi(\omega) + mt, \quad \omega = u^2 + m^2\left(t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right),$$
$$(2\varphi^2 - 2\omega)\dot{\varphi}^2 - 2\varphi\dot{\varphi} + 1 = 0;$$
$$u = mt - C\left[u^2 + m^2\left(t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)\right]^{1/2}, \quad C = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}.$$

4) $\langle G_3 + 2T, P_1, P_2\rangle$:

$$u^2 = \varphi(\omega) + 2m^2x_3, \quad \omega = u^3 - 3m^2x_3u + 3m^3t, \quad \varphi\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{9};$$
$$u^2 - 2m^2x_3 - \left(C + u^3 - 3m^2x_3u + 3m^3t\right)^{2/3} = 0.$$

5) $\langle G_1, G_2 - P_2, P_3\rangle$:

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)t - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^2 - \frac{u}{2m}\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)x_1^2,$$
$$\omega\dot{\varphi} - \varphi - \frac{m}{\sqrt{2}} = 0;$$
$$u + C\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)t - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^2 - \frac{m}{2u}\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)x_1^2\right\} + \frac{m}{\sqrt{2}} = 0.$$

6) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$:

$$u = e^{-x_2}\varphi(\omega), \quad \omega = 2ut - mx_3^2, \quad 4m\omega\varphi\dot{\varphi}^2 - 4m\dot{\varphi} - \varphi^2 = 0;$$
$$x_2 + \ln\frac{u}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} - 1} - \frac{1}{m^2}\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} + C = 0,$$
$$x_2 + \ln\frac{u\left(\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} - 1\right)}{\omega} - \frac{1}{m^2}\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} + C = 0.$$

7) $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3\rangle$:

$$u = e^{-x_3}\varphi(\omega), \quad \omega = 2ut - m\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad 4m\omega\dot{\varphi}^2 - 4m\varphi\dot{\varphi} - \varphi^2 = 0.$$

8) $\langle J_{04} + \alpha D, J_{12} + \beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}\varphi(\omega), \quad \omega = \alpha\ln\frac{u}{t} + 2\beta\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$
$$-m(\varphi^2 - \alpha^2\dot{\varphi}^2) + 2\varphi[\varphi^2 + (\beta^2 + 1)\dot{\varphi}^2 - 2\varphi\dot{\varphi}] = 0.$$

9) $\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$:

$$u = x_2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{2ut - mx_3^2}{x_2^2},$$

$$4\omega(\omega - m)\dot\varphi^2 + \left(4m - 4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\omega\right)\varphi\dot\varphi + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2\varphi^2 = 0;$$

$$u = \frac{\left(mx_3^2 + 2Ct\right) \pm \sqrt{\left(mx_3^2+2Ct\right)^2 - 8mCt\left(x_2^2+x_3^2\right)}}{4t} \quad (\alpha = -1).$$

10) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2+x_2^2}{2t}\varphi(\omega) + \frac{mx_3^2}{2t}, \quad \omega = \frac{mt+u}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

$$(-2m^2+\omega^2)\dot\varphi^2 + 4\omega(m-\varphi)\dot\varphi + 4\varphi(\varphi - m) = 0.$$

11) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$:

$$u^2 = x_2\varphi(\omega) + 2m^2x_3, \quad \omega = \frac{\left(u^3 - 3m^2x_3u + 3m^3t\right)^2}{x_2^3},$$

$$9\omega(\omega - 4m^4\varphi)\dot\varphi^2 - 6\omega\varphi\dot\varphi + \varphi^2 + 4m^4 = 0.$$

12) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1\rangle$:

$$u = x_2^2\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_3^2}{u} + \frac{\sqrt2}{m}\ln\frac{u}{x_3^2} - \frac{2}{m}(t - \sqrt2\ln x_3),$$

$$\sqrt2\dot\varphi^2 - m\varphi\dot\varphi + m\varphi^3 = 0;$$

$$\frac{\sqrt2}{m}\ln\left|\frac{\sqrt{m^2-2\sqrt2m\varphi}-m}{\sqrt{m^2-2\sqrt2m\varphi}+m}\right| - \frac{2\sqrt2}{\sqrt{m^2-2\sqrt2m\varphi}-m} - \omega + C = 0.$$

13) $\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$:

$$u^2 = \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}\varphi(\omega) + 2m^2x_3, \quad \omega = \frac{u^3 - 3m^2x_3u + 3m^3t}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{3/4}},$$

$$(36m^4\varphi - 9\omega^2)\dot\varphi^2 + 12\omega\varphi\dot\varphi - 4(\varphi^2+4m^4) = 0.$$

14) $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - mt, \quad \omega = \left(t - \frac{u}{m}\right)^2 + 2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right), \quad 8\omega\dot\varphi^2 - 2m^2 = 0.$$

§ 7. Анзацы вида $p(t,x,u) = \varphi(\omega)$, $\omega = \omega(t,x,u)$

1) $\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle$:

$$\frac{\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)\right]^2 - 4\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2} = \varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{(mt+u)\left[tu - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right) + 2\sqrt2x_1x_3m^2 + 2mx_2(mt-u)\right]}{\sqrt2\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2},$$

$$(16\omega^2-1)\dot\varphi^2 + 2(5\varphi-1)\omega\dot\varphi + 16\varphi(\varphi-1) = 0.$$

2) $\langle P_0 - K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$:

$$\frac{2m^2x_3^2 + (mt-u)^2}{2m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)},$$
$$(\omega^2+4)\dot\varphi^2 - 4\omega\varphi\dot\varphi - 4\varphi(1+\varphi) = 0.$$

3) $AO(3) \oplus \langle P_0 - K_0\rangle$:

$$\frac{\sqrt{2}\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]}{mt-u} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}},$$
$$(4+\omega\varphi)\dot\varphi^2 + 4\omega\varphi\dot\varphi + 4\varphi^2(\varphi+1) = 0.$$

4) $\langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$:

$$\frac{2(mt-u)_1^2 + \left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)} = \varphi(\omega),$$
$$\omega = \alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}(mt+u)}{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)} + \mathrm{arctg}\,\frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{\sqrt{2}(mt-u)},$$
$$(-\alpha^2\dot\varphi + \varphi + 4)\dot\varphi^2 + \varphi^2(\varphi+4)^2 = 0.$$

5) $\langle -2D + J_{04}, -P_0 + P_4 + \sqrt{3}G_3, K_0 + K_4 + \sqrt{3}H_3\rangle$:

$$6\sqrt{3}\frac{(mt+u+m\sqrt{2}x_5) + \sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)x_4}{m\sqrt{2}x_3^3} + \frac{(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^3}{2\sqrt{2}m^3x_3^3} -$$
$$- \frac{\left[\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4\right]^3}{8m^6x_3^3} -$$
$$- 12\frac{\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4}{4m^4x_3}\left[(mt-u)^2 + 2m^2\right] = \varphi(\omega),$$
$$\omega = \frac{mt-u}{m\sqrt{2}}, \quad -9[\varphi^2 - 256(\omega^2+1)^2]\dot\varphi^2 + 6\omega\varphi\dot\varphi - \omega^2 - 1 = 0.$$

1. Boyer C.P., Penafiel M.N., Conformal symmetry of the Hamilyon–Jacobi equation and quantization, *Nuovo Cim. B*, 1976, **31**, № 2, 195–210.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ в точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1987, 639 с.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498.
5. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт № 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.