# Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II

*В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА*

Данная работа является продолжением [1] и посвящена в основном построению многопараметрических семейств точных решений нестационарных 3-мерных уравнений (обозначения см. в [1])

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \quad k \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \in \mathbb{C}^1, \tag{1}$$

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi \frac{\partial|\psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\psi|}{\partial x_a}|\psi|^{-2}. \tag{2}$$

Приведены также некоторые результаты симметрийного анализа систем нелинейных уравнений с логарифмической нелинейностью.

**1. Точные решения уравнения (1).** Редукция уравнения (1) по оператору $X_1 = P_1$ [1] приводит к нелинейному трехмерному уравнению

$$i\varphi_t = k\Delta_2\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \tag{3}$$

где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, $\varphi = \varphi(t, x_2, x_3)$. Для получения частных решений уравнения (3) рассмотрим систему [2]

$$\begin{aligned} &i\varphi_t = \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \lambda \neq 0, \\ &\Delta_2\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что произвольное решение системы (4) удовлетворяет уравнению (3), а следовательно, и (1). Представляя комплексную функцию $\varphi$ через пару действительных функций $R(t, x_2, x_3)$ и $P(t, x_2, x_3)$ по формуле $\varphi = R\exp(iP)$, получаем общее решение системы (4)

$$\varphi = \begin{cases} \left(-\dfrac{d_2}{\lambda}\right)^{3/4} \exp(i(d_1 + d_2 t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, \\ \left(d_3 - \dfrac{4}{3}\beta t\right)^{-\frac{3}{4}\left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right)} \exp(id_1), \quad \lambda = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{5}$$

которое является частным решением нелинейного уравнения (1).

Множитель $e^{id_1}$ в дальнейшем будем опускать, так как любое решение уравнения (1) или (2), умноженное на $e^{id_1}$, будет снова решением этого же уравнения.

Укр. мат. журн., 1989, **41**, № 12, 1687–1694.

Редукция уравнения (1) по оператору $X_2 = J$ приводит к линейному уравнению (19) [1] с дополнительным нелинейным условием $\varphi\varphi^* = \gamma^2$, $\gamma > 0$. Используя представление комплексной функции $\varphi$ через пару действительных функций $R(t,x)$ и $P(t,x)$, получаем

$$\varphi = \gamma \exp(iP(t,x)). \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (19) [1], после некоторых преобразований приходим к системе

$$\frac{\partial P^1}{\partial t} = k\frac{\partial P^1}{\partial x_a}\frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \quad \Delta P_1 = 0, \tag{7}$$

где

$$P^1(t,x) = P(t,x) + \lambda\gamma^{4/3}t. \tag{8}$$

В предположении $P^1_t = \alpha = \mathrm{const}$ с учетом результатов работы [3] удается построить общее решение системы (7), которое приводит к решению уравнения (1) в виде плоской волны

$$\psi = \gamma \exp\{i((kb_ab_a - \lambda\gamma^{4/3})t + b_ax_a)\}, \tag{9}$$

где $b_1$, $b_2$, $b_3$ — произвольные действительные параметры.

Проверкой нетрудно убедиться, что система (7) не имеет радиальных решений вида $P^1 = P^1(t,|x|^2)$.

Редукция уравнения (1) по оператору $X_3$ при $\alpha_0 = 0$ [1] приводит к нелинейному эллиптическому уравнению

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad \varphi = \varphi(x). \tag{10}$$

Пусть в уравнении (10)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = \alpha_ax_a, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1. \tag{11}$$

Тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$k|\alpha|^2\varphi_{ww} + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad |\alpha|^2 = \alpha_a\alpha_a.$$

В случае действительной функции $\varphi$ это уравнение является уравнением Эмдена–Фаулера, частным решением которого является функция [4] $\varphi = \beta/w^{3/2}$, $\beta = (-15|\alpha|^2k/4\lambda)^{3/4}$, $\lambda k < 0$.

Таким образом, получаем стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x) = \left[\frac{15|\alpha|^2k}{-4\lambda(\alpha_ax_a)^2}\right]^{3/4}, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda k < 0. \tag{12}$$

Отметим также, что в случае $\lambda k > 0$ выражение (12) задает комплексное решение уравнения (1).

Если в уравнении (10) положить

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = |x|^2, \tag{13}$$

то получим ОДУ второго порядка

$$4r\frac{d^2\varphi}{dr^2}+6\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\lambda}{k}\varphi|\varphi|^{4/3}=0,$$

которое имеет частное решение $\varphi=(-15k/4\lambda r)^{3/4}$.

Следовательно, с учетом (13) находим еще одно стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x)=\left(\frac{15k}{-4\lambda|x|^2}\right)^{3/4}. \tag{14}$$

Решение (14) в отличие от предыдущих решений обладает свойством $\psi(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Отметим, что решение (12) стремится к нулю при $\alpha_a x_a\to\infty$.

Для получения солитоноподобных решений уравнения (1) рассмотрим редукционное уравнение (20) [1] при $\alpha_a\neq 0$, соответствующее алгебре $X_3$. С помощью анзаца (11) в случае действительных $\varphi$ и $\lambda$ уравнение (20) [1] сводится к нелинейному ОДУ второго порядка

$$k|\alpha|^2\frac{d^2\varphi}{dw^2}+\alpha_0\varphi+\lambda\varphi^{7/3}=0. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) в элементарных функциях получить не удается, так как его решение сводится к интегрированию выражения

$$c_2\pm w=\int(c_1-\beta_1\varphi^2-\lambda_1\varphi^{10/3})^{-1/2}d\varphi, \tag{16}$$

где $\beta_1=\frac{\alpha_0}{|\alpha|^2k}$, $\lambda_1=\frac{3\lambda}{5k|\alpha|^2}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}^1$.

Интеграл в правой части (16) подстановкой $\varphi_1=\varphi^{-2/3}$ преобразуется к интегралу $-\frac{3}{2}\int(c_1\varphi_1^5-\beta_1\varphi_1^2-\lambda_1)^{-1/2}d\varphi_1$, который при $c_1\neq 0$ в элементарных функциях не выражается и даже не сводится к эллиптическому [5].

Если $c_1=0$, $\beta_1=0$, (т.е. $\alpha_0=0$), то из соотношения (16) с учетом (11) получаем решение (12) уравнения (1).

Пусть в выражении (16) $c_1=0$ и $\beta_1\lambda_1\neq 0$, так как $\varphi$ — действительная функция, то возможны три случая:

а) $\beta_1<0$, $\lambda_1<0$, т.е. $\alpha_0 k<0$, $\lambda k<0$;

б) $\beta_1>0$, $\lambda_1<0$, т.е. $\alpha_0 k>0$, $\lambda k<0$;

в) $\beta_1<0$, $\lambda_1>0$, т.е. $\alpha_0 k<0$, $\lambda k>0$.

В случае а) получаем решение нелинейного ОДУ (15)

$$\varphi=\left[\sqrt{\frac{3\lambda}{5\alpha_0}}\,\mathrm{sh}\left(c_2\pm\frac{2w}{3|\alpha|\sqrt{-k/\alpha_0}}\right)\right]^{-3/2},$$

в случае б) —

$$\varphi=\left[\sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}}\,\cos\left(c_2\pm\frac{2w}{3|\alpha|\sqrt{k/\alpha_0}}\right)\right]^{-3/2},$$

в случае в) —

$$\varphi = \left[\sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}}\,\mathrm{ch}\left(c_2 \pm \frac{2w}{3|\alpha|\sqrt{-k/\alpha_0}}\right)\right]^{-3/2}.$$

Следовательно, с учетом (11) и соответствующего оператору $X_3$ анзаца (см. таблицу 1 [1]) из этих решений при $c_2 = 0$ получаем решения исходного уравнения (1)

$$\psi(t,x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{\left[\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_a x_a)\right]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_0 k < 0, \tag{17a}$$

$$\psi(t,x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{\left[\sqrt{-\gamma}\,\cos(\alpha_a x_a)\right]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_0 k > 0, \tag{17b}$$

$$\psi(t,x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{\left[\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{ch}\,(\alpha_a x_a)\right]^{3/2}}, \quad \lambda k > 0, \quad \alpha_0 k < 0, \tag{17a}$$

где $\gamma = 3\lambda/5\alpha_0$, $\alpha_a\alpha_a = 4|\alpha_0|/9|k|$, $\alpha_a$ — произвольные действительные параметры.

Редукция нелинейного уравнения (1) по оператору $X_4 = J_{12} + \alpha J$, $\alpha \geq 0$, приводит к трехмерному нелинейному уравнению (21) [1], которое в случае действительной функции $\varphi = \varphi(w)$, $w = x_1^2 + x_2^2$ сводится к ОДУ второго порядка

$$w^2\frac{d^2\varphi}{dw^2} + w\frac{d\varphi}{dw} - \frac{\alpha^2}{4}\varphi + \frac{\lambda}{4k}w\varphi^{7/3} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1$$

с частным решением

$$\varphi = \left[\frac{k\left(\alpha^2 - \frac{9}{4}\right)}{\lambda w}\right]^{3/4}. \tag{18}$$

Воспользовавшись табл. [1] и формулой (39) [1] из решения (18) получим решение нелинейного уравнения (1)

$$\psi(t,x) = A^{3/4}\exp\left(i\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}\right)\left[|x|^2 - (C^{(3)}x)^2\right]^{-3/4}, \tag{19}$$

где $A = k(\alpha^2 - 9/4)/\lambda > 0$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ — трехмерные ортонормированные действительные векторы.

Ко всем построенным решениям уравнения (1) можно применить формулу размножения (37) [1] и тогда получим неразмножаемые многопараметрические семейства решений. Поскольку выражения получаются довольно громоздкими, мы приводим в таблице результаты размножения построенных решений с помощью более простых формул (34) и (38) [1].

В случае $\alpha_2 = \alpha_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1 = v$, $k = -1$ из решения $(*)$ (см. таблицу) получаем решение

$$\psi(t,x_1) = \frac{\exp\frac{-iv}{2}\left(x_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{9\alpha_1^2}{2v}\right)t\right)}{\left[\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{ch}\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 v t)\right]^{3/2}} \tag{20}$$

| № п/п | № формулы исходного решения | Новое решение полученное применением формулы (34) [1] | Новое решение полученное применением формулы (38) [1] |
|---|---|---|---|
| 1 | (5) $\lambda=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$ | $\left(d_2-\frac{4}{3}\beta t\right)^{-\frac{3}{4}\left(1-\frac{i\alpha}{\beta}\right)}\exp\left(\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}t\right)\right)$ | $t^{-\frac{3}{2}}\left(d_2+\frac{4\beta}{3t}\right)^{-\frac{3}{4}\left(1-\frac{i\alpha}{\beta}\right)}\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$ |
| 2 | (9) $\lambda\in\mathbb{R}^1$ | $\gamma\exp\left\{i\left(b_a x_a+\left(kb_a b_a-\lambda\gamma^{4/3}\right)t\right)\right\}$ | $\gamma t^{-3/2}\exp\left\{i\left(\frac{\lambda\gamma^{4/3}-kb_a b_a+b_a x_a}{t}-\frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)\right\}$ |
| 3 | (12) $\lambda\in\mathbb{R}^1$ | $\left[\frac{15k\lvert\alpha\rvert^2}{-4\lambda(\alpha_a x_a+\alpha_a\varepsilon_a t)^2}\right]^{3/4}\exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$ | $\left[\frac{15k\lvert\alpha\rvert^2}{-4\lambda(\alpha x)^2}\right]^{3/4}\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$ |
| 4 | (14) $\lambda\in\mathbb{R}^1$ | $\left[\frac{15k}{-4\lambda\lvert x+\varepsilon t\rvert^2}\right]^{3/4}\exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$ | $\left[\frac{15k}{-4\lambda\lvert x\rvert^2}\right]^{3/4}\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$ |
| 5 | (17$a$) $\lambda k<0$, $\alpha_0 k<0$ | $\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\left(\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}+2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_a x_a+\alpha_a\varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$ | $\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}(\lvert x\rvert^2+4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{\gamma}\,t\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$ |
| 6 | (17$b$) $\lambda k<0$, $\alpha_0 k>0$ | $\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\left(\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}+2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{-\gamma}\cos(\alpha_a x_a+\alpha_a\varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$ | $\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}(\lvert x\rvert^2+4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{-\gamma}\,t\cos\frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$ |
| 7 | (17$c$) $\lambda k>0$, $\alpha_0 k<0$ | $\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\left(\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}+2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{ch}\,(\alpha_a x_a+\alpha_a\varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$ | $\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}(\lvert x\rvert^2+4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{-\gamma}\,t\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$ |
| 8 | (18) $\lambda\in\mathbb{R}^1$ | $\frac{A^{3/4}\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}+2k\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}\right)\right\}}{\left[\lvert x+\varepsilon t\rvert^2-(C^{(3)}(x+\varepsilon t))^2\right]^{3/4}}$ | $\frac{A^{3/4}\exp\left\{i\left(\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}-\frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)\right\}}{\left[\lvert x\rvert^2-(C^{(3)}x)^2\right]^{3/4}}$ |

одномерного ($n = 1$) нелинейного уравнения

$$i\psi_t = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \quad \lambda < 0.$$

Решение (20) естественно назвать солитонным по аналогии с известным решением Захарова–Шабата [6]

$$\psi(t, x_1) = \sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\alpha_1 \frac{\exp\left[-\frac{iv}{2}\left(x_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{2\alpha_1^2}{v}\right)t\right)\right]}{\operatorname{ch}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 vt)}$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \lambda\psi|\psi|^2, \quad \lambda < 0.$$

**2. Точные решения уравнения (2).** Редукция уравнения (2) по оператору $X_2$ [1] преобразует его к свободному уравнению Шредингера (1) [1] с дополнительным условием (6). Подстановка (6) в уравнение (1) [1] приводит к системе (7) для функции $P(t, x)$. Следовательно, получаем плосковолновое решение нелинейного уравнения (2)

$$\psi = \gamma\exp\{i(kb_a b_a t + b_a x_a)\}, \quad b_a \in \mathbb{R}^1. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь нелинейное эллиптическое уравнение

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi\frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a}|\varphi|^{-2} = 0, \tag{22}$$

которое получается из уравнения (2) редукцией по оператору $X_3$ при $\alpha_0 = 0$ [1]. Любое решение уравнения (22) будет стационарным решением уравнения (2). Но из этих стационарных решений, применяя формулы размножения, полученные в [1], мы можем построить многопараметрические семейства нестационарных решений. Таким образом, представляется важным построить классы точных решений уравнения (22).

Пусть в уравнении (22)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = c_a x_a, \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \tag{23}$$

тогда для $\varphi$ получаем ОДУ второго порядка

$$c_a c_a\left[\frac{d^2\varphi}{dw^2} + \frac{\lambda}{k}\varphi\left(\frac{d|\varphi|}{dw}\right)^2|\varphi|^{-2}\right] = 0. \tag{24}$$

Если $c_a c_a = 0$, то уравнение (24) превращается в тождество и получаем решение уравнения (2)

$$\psi = F(c_a x_a), \tag{25}$$

где $F$ — произвольная дважды дифференцируемая комплексная функция.

Если $c_a c_a > 0$, $c_a \in \mathbb{R}^1$, то уравнение (24) в случае $\lambda/k = -1$ удается полностью проинтегрировать и получить решение исходного нелинейного уравнения (2)

$$\psi(x) = \frac{\exp\left[d_3 - d_1 w \pm i\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\exp(2d_1 w + d_2/2)\right]}{\sqrt{1 + \exp(4d_1 w + d_2)}}, \tag{26}$$

где $d_1 > 0$, $d_2, d_3 \in \mathbb{R}^1$, $w = c_a w_a$.

Если $c_a c_a > 0$ и $\lambda/k \neq -1$, то нетрудно построить частное решение уравнения (24), которое приводит к решению

$$\psi = (c_a x_a + c_0)^{1/\lambda_1}, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda/k \neq 0 \tag{27}$$

уравнения (2).

Для построения новых решений уравнения (22) преобразуем его к системе двух действительных уравнений с помощью замены

$$\varphi = R(x)\exp\{iP(x)\}, \tag{28}$$

где $R$, $P$ — действительные функции.

Подставляя (28) в уравнение (22), получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta R = RP_a P_a - \frac{\lambda}{k} R_a R_a / R, \\ &R\Delta P = -2P_a R_a, \end{aligned} \tag{29}$$

которая заменой

$$R = \begin{cases} \exp\{R^1(x)\}, & \lambda/k = -1, \\ (R^1)^{1/\lambda_1}, & \lambda/k \neq -1, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda/k \end{cases} \tag{30}$$

сводится соответственно к системам

$$\Delta R^1 = P_a P_a, \quad \Delta P = -2R^1_a P_a, \quad \lambda_1 = 0, \tag{31}$$

$$\Delta R^1 = \lambda_1 R^1 P_a P_a, \quad R^1 \Delta P = -\frac{2}{\lambda_1} R^1_a P_a, \quad \lambda_1 \neq 0 \tag{32}$$

(индексы $a = 1, 2, 3$ у функций $P$, $R$, $R^1$ обозначают дифференцирование по переменным $x_a$).

Так как в случае $P(x) = \mathrm{const}$, $\Delta R^1 = 0$, т.е. $R^1$ — решение уравнения Лапласа, системы уравнений превращаются в тождества, воспользовавшись (28) и (30), получим семейство стационарных решений уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\{R^1(x)\}, & \lambda_1 = 0, \\ (R^1(x))^{1/\lambda_1}, & \lambda_1 \neq 0. \end{cases} \tag{33}$$

В частности, для фундаментального решения $R^1 = \frac{1}{|x|}$ трехмерного уравнения Лапласа получаем решение уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\dfrac{1}{|x|}, & \dfrac{\lambda}{k} = -1, \\[2ex] |x|^{-1/\lambda_1}, & \dfrac{\lambda}{k} \neq -1. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим теперь систему (31) с дополнительным условием

$$\Delta P = 0. \tag{35}$$

Как известно, частное решение уравнения (35) задается формулой

$$P = f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a), \tag{36}$$

где $c_a c_a = 0$, $f$ — произвольная дважды дифференцируемая действительная функция.

Подставляя выражение (36) в систему (31), после соответствующих преобразований, в предположении, что $R^1 = R^1(c_a x_a, c_a^* x_a)$ получаем ОДУ

$$\frac{d^2 R^1}{dV^2} = 1, \quad V(x) = if(c_a x_a) - if(c_a^* x_a). \tag{37}$$

Решая уравнение (37) и пользуясь формулами (28), (30), получаем еще одно семейство решений уравнения (2) при $\lambda/k = -1$, которое содержит произвольную функцию

$$\psi(x) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a))^2 + \\ + id_1(f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a)) + i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a))\Big\},$$

где $c_a c_a = 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$.

Подстановка выражения (36) в систему (32) после соответствующих выкладок позволяет получить решение нелинейного уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \left[d_1 \exp\left(\sqrt{\lambda_1} V(x)\right) + d_2 \exp\left(-\sqrt{\lambda_1} V(x)\right)\right]^{1/\lambda_1} \times \\ \qquad \times \exp\{i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a))\}, \quad \lambda_1 > 0, \\ \left[d_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda_1} V(x)\right) + d_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda_1} V(x)\right)\right]^{1/\lambda_1} \times \\ \qquad \times \exp\{i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a))\}, \quad \lambda_1 < 0, \end{cases}$$

где $c_a c_a = 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$, $V(x)$ см. (37).

Все построенные выше стационарные решения нелинейного уравнения (2) легко розмножить с помощью соответствующих формул [1] до многопараметрических семейств нестационарных решений.

В заключении отметим, что в данной работе мы воспользовались только несколькими редукционными уравнениями из четырнадцати, полученных в [1], для нахождения точных решений нелинейных уравнений (1), (2). С большим или меньшим успехом можно воспользоваться и другими редукционными уравнениями. К сожалению, при дальнейшей редукции этих уравнений очень часто получаются нелинейные ОДУ второго порядка, которые не интегрируются в элементарных функциях.

**3. Нелинейные ДУРП с логарифмической нелинейностью.** В работе [7] доказано, что уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\lambda U_t = \Delta U + \lambda U \ln U, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad U = U(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{38}$$

инвариантно относительно алгебры Ли $A\mathfrak{G}(1,n)$ с базисными операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n}, \tag{39a}$$

$$I = \frac{\lambda}{2} e^t U \partial_U, \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I. \tag{39b}$$

Алгебра $A\mathfrak{G}(1,n)$ (39) принципиально отличается от алгебры Галилея $AG(1,n)$ коммутационными соотношениями $[P_t, \mathfrak{G}_a] = \mathfrak{G}_a$, $[P_t, I] = I$. Операторы $\mathfrak{G}_a$ генерируют группу преобразований

$$\begin{aligned} &t' = t, \quad x'_a = x_a + v_a e^t, \quad a = \overline{1,n}, \\ &U' = U \exp\left[-\frac{\lambda}{2} e^t \left(x_a v_a + e^t \frac{v_a v_a}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

где $v_a$ — произвольные действительные параметры.

Представляется полезным найти системы нелинейных ДУЧП, инвариантных относительно алгебры $A\mathfrak{G}(1,n)$. С этой целью рассмотрим системы нелинейных эволюционных уравнений вида (3) [1]

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \psi_t^{(1)} = A_{ab}^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \underset{1}{\psi}^{(1)}, \underset{1}{\psi}^{(2)}), \\ &\lambda_2 \psi_t^{(2)} = A_{ab}^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \underset{1}{\psi}^{(1)}, \underset{1}{\psi}^{(2)}), \end{aligned} \tag{40}$$

где $A_{ab}^{(m)}$, $B^{(m)}$, $m = 1, 2$, — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции.

**Теорема.** *Система уравнений (40) инвариантна относительно алгебры $A\mathfrak{G}(1,n)$ с базисными операторами (39a) и*

$$I_\lambda = \frac{e^t}{2}(\lambda_1 \psi^{(1)} \partial_{\psi^{(1)}} + \lambda_2 \psi^{(2)} \partial_{\psi^{(2)}}), \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I_\lambda$$

*тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &A_{ab}^{(m)} = 0, \quad a \neq b, \quad A_{aa}^{(m)} = C_m(v), \\ &B^{(m)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \underset{1}{\psi}^{(1)}, \underset{1}{\psi}^{(2)}) = \psi^{(m)} F_m(v, \theta) + (1 - C_m(v)) \psi_a^{(m)} \psi_a^{(m)} / \psi^{(m)} + \\ &\qquad + \lambda_m C_m(v) \psi^{(m)} \int [C_m(v) \psi^{(m)}]^{-1}, \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

*$C_m$, $F_m$ — произвольные функции, $v = (\psi^{(1)})^{\lambda_2} (\psi^{(2)})^{-\lambda_1}$, $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$, $\lambda_m \in \mathbb{C}^1$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1, 2, 3 в работе [1].

**Следствие.** *Если в системе (40) функции $B^{(m)}$ не зависят от производных, то система инвариантна относительно алгебры $A\mathfrak{G}(1,n)$ только тогда, когда имеет вид*

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \psi_t^{(1)} = \Delta \psi^{(1)} + \lambda_1 \psi^{(1)} \ln \psi^{(1)} + \psi^{(1)} F_1(v), \\ &\lambda_2 \psi_t^{(2)} = \Delta \psi^{(2)} + \lambda_2 \psi^{(2)} \ln \psi^{(2)} + \psi^{(2)} F_2(v). \end{aligned} \tag{41}$$

В случае системы комплексно-сопряженных уравнений шредингеровского типа вместо системы (41) получаем уравнение

$$i\psi_t = k\Delta\psi = i\psi \ln \psi + \psi F(|\psi|),$$

где $F$ — произвольная функция, $|\psi| = \sqrt{\psi\psi^*}$, $k \in \mathbb{R}^1$.

1. Фущич В.И., Чернига Р.М., Симметрия и точные решения многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа. I, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, № 10, 1349–1357.
2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
3. Collins C.B., Complex potential equations. I. A tecknique for solution, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1976, **80**, 165–171.
4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Наука, 1971, 1108 с.
6. Захаров В.Е, Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *Журн. эксперим. и теор. физики*, 1971, **61**, № 1, 118–134.
7. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях, *Дифференц. уравнения*, 1983, **19**, 1215–1223.