# Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I

*В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА*

**1. Введение.** Известно, что максимальной локальной (в смысле Ли) группой инвариантности $(n+1)$-мерного линейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi, \tag{1}$$

где

$$\psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad k \in \mathbb{R}^1, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

$\Psi(t,x)$ — комплекснозначная функция, является обобщенная группа Галилея (группа Шредингера) $G_2(1,n)$ [1, 2]. Этой группе соответствует алгебра Ли $AG_2(1,n)$ с базисными операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad a = \overline{1,n}, \tag{2a}$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad b = \overline{1,n}, \tag{2b}$$

$$J = i(\Psi\partial_\Psi - \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \quad G_a = t\partial_a - \frac{x_a}{2k}J, \tag{2c}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(\Psi\partial_\Psi + \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \tag{2d}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4k}J - \frac{nt}{2}(\Psi\partial_\Psi + \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \tag{2e}$$

где

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \partial_\Psi = \frac{\partial}{\partial\Psi}, \quad \partial_{\Psi^*} = \frac{\partial}{\partial\Psi^*},$$

$*$ — знак комплексного сопряжения (по повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование). Операторы (2a)–(2c), образующие алгебру $AG(1,n)$, генерируют преобразования группы Галилея $G(1,n)$, а операторы (2a)–(2d), образующие алгебру $AG_1(1,n)$ — преобразования группы $G_1(1,n)$.

В работах [3, 4] построены широкие классы нелинейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно группы $G_2(1,n)$ и ее подгрупп.

Укр. мат. журн., 1989, **41**, № 10, 1349–1357.

В данной работе, являющейся естественным продолжением статьи [4], рассматриваются системы нелинейных эволюционных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\lambda_1\Psi_t^{(1)} &= A_{ab}^{(1)}(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)})\Psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)},\underset{1}{\Psi}^{(1)},\underset{1}{\Psi}^{(2)}),\\
\lambda_2\Psi_t^{(2)} &= A_{ab}^{(2)}(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)})\Psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)},\underset{1}{\Psi}^{(1)},\underset{1}{\Psi}^{(2)}),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda_m = \mathrm{const} \neq 0$, $\Psi_t^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial t$, $\Psi_{ab}^{(m)} = \partial^2\Psi^{(m)}/(\partial x_a\partial x_b)$, $\Psi_a^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial x_a$, $\underset{1}{\Psi}^{(m)} = (\Psi_1^{(m)},\ldots,\Psi_n^{(m)})$, $m=1,2$, $a,b=\overline{1,n}$, $A_{ab}^{(m)}$, $B^{(m)}$ — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции.

В случае комплексных функций $\Psi = \Psi^{(1)} = \Psi^{*(2)}$, $A_{ab} = A_{ab}^{(1)} = A_{ab}^{*(2)}$, $B = B^{(1)} = B^{*(2)}$, $\lambda_1 = \lambda_2^* = i$ система уравнений (3) превращается в пару комплексно сопряженных нелинейных уравнений шредингеровского типа

$$i\Psi_t = A_{ab}(\Psi,\Psi^*)\Psi_{ab} + B(\Psi,\Psi^*,\underset{1}{\Psi},\underset{1}{\Psi}^*), \tag{4a}$$

$$-i\Psi_t^* = A_{ab}^*(\Psi,\Psi^*)\Psi_{ab}^* + B^*(\Psi,\Psi^*,\underset{1}{\Psi},\underset{1}{\Psi}^*), \tag{4b}$$

где индексы возле искомых функций $\Psi$, $\Psi^*$ обозначают дифференцирование по переменным $t, x_1, \ldots, x_n$ (ниже комплексно сопряженные уравнения вида (4b) опускаются).

В настоящей работе решены следующие задачи:

1) описаны нелинейные системы уравнений второго порядка вида (3), инвариантные относительно цепочек групп $G(1,n) \subset G_1(1,n) \subset G_2(1,n)$;

2) доказано, что среди множества уравнений (4) инвариантными относительно группы $G_2(1,n)$ являются только уравнения вида

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \Psi|\Psi|^{4/n}F(\hat\theta), \tag{5}$$

где $\hat\theta = \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}|\Psi|^{-2-4/n}$, $|\Psi| = \sqrt{\Psi\Psi^*}$, $F$ — произвольная дифференцируемая функция;

3) найдены анзацы, с помощью которых многомерные нелинейные уравнения редуцируются к уравнениям с меньшим числом независимых переменных, и построены в явном виде многопараметрические семейства точных решений четырехмерных нелинейных уравнений

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi|\Psi|^{4/3}, \tag{6}$$

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}|\Psi|^{-2}. \tag{7}$$

Отметим, что уравнения (6), (7) являются простейшими среди нелинейных уравнений (5) при $n=3$. Построению точных решений уравнения (6) посвящена работа [5]. Ниже получен ряд новых результатов. В частности, найдены солитоноподобные решения уравнения (6) и решения уравнения (7), содержащие произвольные функции.

**2. Системы нелинейных уравнений, инвариантные относительно алгебры Галилея и ее расширений.** Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (3). Системы уравнений такого вида в случае действительных коэффициентов широко используются в качестве математических моделей для описания процессов диффузии при химических реакциях и горении в двухкомпонентных средах, в теории тепломассопереноса, в популяционной генетике (см., например, [6]).

С теоретико-алгебраической точки зрения представляется важным выделить из системы уравнений вида (3) такие, которые инвариантны относительно алгебры $AG_2(1,n)$ или достаточно, широких ее подалгебр $AG(1,n)$ и $AG_1(1,n)$ [7]. Рассмотрим обобщенную алгебру Галилея $AG_2(1,n)$ с базисными элементами (2a), (2b) и

$$I_\lambda = \lambda_1\Psi^{(1)}\partial_{\Psi^{(1)}} + \lambda_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}, \quad G = t\partial_a - \frac{x_a}{2}I_\lambda, \tag{8}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + I_\alpha, \tag{9}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4}I_\lambda + tI_\alpha, \tag{10}$$

где $I_\alpha = \alpha_1\Psi^{(1)}\partial_{\Psi^{(1)}} + \alpha_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}$, $\alpha_m \in \mathbb{R}^1$. Очевидно, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2^* = i/k$, $\Psi^{(1)} = \Psi^{*(2)} = \Psi$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -n/2$ получаем стандартное представление алгебры $AG_2(1,n)$ с базисными элементами (2).

**Теорема 1.** *Система уравнений (3) инвариантна относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b), (8) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = C_m(v)\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1-C_m(v)}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}F_m(v,\theta), \quad m = 1,2, \tag{11}$$

*(здесь и везде ниже суммирования по индексу $m$ нет), где $v = (\Psi^{(1)})^{\lambda_2}(\Psi^{(2)})^{-\lambda_1}$, $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}$, $C_m$, $F_m$ — произвольные функции.*

**Теорема 2.** *Система уравнений (11) инвариантна относительно алгебры $AG_1(1,n)$ с базисными элементами (2a), (2b), (8), (9) тогда и только тогда, когда она эквивалентна системе*

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = D_m\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1-D_m}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}v^{-2/\delta}f_m(\hat\theta), \quad m = 1,2, \tag{12}$$

*если $\delta = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} \neq 0$, или же системе*

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = C_m(v)\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1-C_m(v)}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}v^{-2}\theta g_m(v), \ m = 1,2, \tag{13}$$

*если $\delta = 0$.*

*В системах уравнений (12), (13) $\hat\theta = \theta v^{-2+2/\delta}$, $D_m = \mathrm{const}$, $f_m$, $g_m$, $C_m$ — произвольные функции.*

**Теорема 3.** *1. Система уравнений (12) инвариантна относительно алгебры $AG_2(1,n)$ (2a), (2b), (8)–(10) при произвольных $D_m$ и $f_m(\hat\theta)$, при чем $\alpha_m = -\frac{n}{2}D_m$, $\delta = -\frac{n}{2}\begin{vmatrix}D_1 & D_2\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} \neq 0$.*

*2. Система уравнений (13) инвариантна относительно этой же алгебры тогда и только тогда, когда $C_m(v) = D_m = \mathrm{const}$, причем $\alpha_m = -\frac{n}{2}D_m$, $\delta = 0$.*

Доказательства теорем 1–3 проводятся по классической схеме Ли (см. например, [8]). Ввиду громоздкости мы их опускаем (подробности см. в [9]).

Из этих теорем нетрудно получить следующие утверждения.

**Следствие 1.** *Среди множества нелинейных уравнений (4) только уравнения*

$$i\Psi_t = C(|\Psi|)\Delta\Psi + \Psi^*(k - C(|\Psi|))\frac{\Psi_a\Psi_a}{|\Psi|^2} + \Psi F\left(|\Psi|, \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\right), \tag{14}$$

*где $C$, $F$ — произвольные функции, инвариантны относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$ (2a)–(2c).*

**Следствие 2.** *Нелинейные ДУЧП шредингеровского типа (4) инвариантны относительно алгебры $AG_2(1,n)$ с базисными операторами (2) тогда и только тогда, когда они эквивалентны уравнениям вида (5).*

Нетрудно убедится, что системы уравнений (12) и (13) при условиях теоремы 3 локальной заменой $\hat\Psi^{(m)} = (\Psi^{(m)})^{1/D_m}$, $m = 1,2$, $D_m \neq 0$ сводятся соответственно к системам

$$\hat\lambda_m\hat\Psi^{(m)}_t = \Delta\hat\Psi^{(m)} + \hat\Psi^{(m)}v^{-2/\hat\delta}\hat f_m(\hat\theta), \quad m = 1,2, \tag{15}$$

и

$$\hat\lambda\hat\Psi^{(m)}_t = \Delta\hat\Psi^{(m)} + \hat\Psi^{(m)}v^{-2}\theta\hat g_m(v), \quad m = 1,2. \tag{16}$$

В (15) приняты обозначения $\hat\lambda_m = \lambda_m/D_m$, $v = (\hat\Psi^{(1)})^{\hat\lambda_2}(\hat\Psi^{(2)})^{-\hat\lambda_1}$, $\hat\delta = \hat\lambda_2 - \hat\lambda_1 \neq 0$, $\hat\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}v^{2/\hat\delta - 2}$, в системе (16) — $\hat\lambda = \lambda_1/D_1 = \lambda_2/D_2$, $v = \hat\Psi^{(1)}/\hat\Psi^{(2)}$, $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}$, $\hat f_m$ и $\hat g_m$ — произвольные функции.

Очевидно, что системы уравнений (15), (16) инвариантны относительно обобщенной алгебры Галилея $AG_2(1,3)$ (см. теорему 3).

**3. Анзацы и редукция уравнений (6), (7).** Нелинейные уравнения (6), (7) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли $AG_2(1,3)$. В работе [10] построена система всех несопряженных одномерных подалгебр алгебры $AG_2(1,3)$. В качестве такой системы можно выбрать следующие 14 подалгебр:

$$\begin{gathered}
X_1 = P_1, \quad X_2 = J, \quad X_3 = P_t + \alpha_0 J, \quad X_4 = J_{12} + \alpha J, \quad X_5 = J_{12} + G_3, \\
X_6 = J_{12} - P_t + \alpha_0 J, \quad X_7 = G_1 + P_2, \quad X_8 = -P_t + G_1, \\
X_9 = J_{12} + \beta G_3 - P_t, \quad X_{10} = D + \alpha J, \quad X_{11} = P_t + \Pi - \alpha J, \\
X_{12} = J_{12} + \beta D + \alpha J, \quad X_{13} = P_t + \Pi - \beta J_{12} - \alpha J, \\
X_{14} = P_t + \Pi - J_{12} - \beta(G_1 + P_2),
\end{gathered} \tag{17}$$

где $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$.

Решая уравнения Лагранжа для каждого из операторов (17) [7], получаем инварианты $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, зависящие от $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, и анзацы для искомой функции $\Psi$. Исключение составляет только единичный оператор $X_2$, которому соответствуют четыре инварианта $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ и функциональное соотношение между $\Psi$ и $\Psi^*$. Новые инвариантные переменные и соответствующие анзацы приведены в табл. 1. Любой другой анзац, получаемый с помощью произвольного элемента алгебры $AG_2(1,3)$, преобразованиями инвариантности сводится к одному из тех, которые указаны в таблице.

*Таблица 1*

| Подалгебры | Инвариантные переменные $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ | Анзацы $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | $t,\ x_2,\ x_3$ | $\Psi(t,x)=\varphi(\omega)$ |
| $X_2$ | $t,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ | $\Psi(t,x)=\varphi(t,x),\ \Psi\Psi^*=\gamma^2$ |
| $X_3$ | $x_1,\ x_2,\ x_3$ | $\Psi=\exp(i\alpha_0 t)\varphi(\omega)$ |
| $X_4$ | $t,\ x_1^2+x_2^2,\ x_3$ | $\Psi=\exp\left(i\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)\varphi(\omega)$ |
| $X_5$ | $t,\ x_1^2+x_2^2,\ x_3-t\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$ | $\Psi=\exp\left(-\frac{ix_3^2}{4kt}\right)\varphi(\omega)$ |
| $X_6$ | $t+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},\ x_1^2+x_2^2,\ x_3$ | $\Psi=\exp(-i\alpha_0 t)\varphi(\omega)$ |
| $X_7$ | $t,\ x_1-tx_2,\ x_3$ | $\Psi=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4kt}\right)\varphi(\omega)$ |
| $X_8$ | $2x_1+t^2,\ x_2,\ x_3$ | $\Psi=\exp\left[\frac{it}{2k}\left(x_1+\frac{t^2}{3}\right)\right]\varphi(\omega)$ |
| $X_9$ | $t+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},\ x_1^2+x_2^2,\ 2x_3+\beta t^2$ | $\Psi=\exp\left[\frac{i\beta t}{2k}\left(x_3+\frac{\beta t^2}{3}\right)\right]\varphi(\omega)$ |
| $X_{10}$ | $\frac{x_1}{\sqrt{t}},\ \frac{x_2}{\sqrt{t}},\ \frac{x_3}{\sqrt{t}}$ | $\Psi=t^{-\frac{3}{4}+i\frac{\alpha}{4k}}\varphi(\omega)$ |
| $X_{11}$ | $\frac{x_1}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{x_2}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{x_3}{\sqrt{1+t^2}}$ | $\Psi=(t^2+1)^{-3/4}\times$ $\times\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{\lvert x\rvert^2 t}{1+t^2}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\varphi(\omega)$ |
| $X_{12}$ | $\ln t+2\beta\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1^2+x_2^2}{t},\ \frac{x_3}{\sqrt{t}}$ | $\Psi=t^{-\frac{3}{4}+i\frac{\alpha}{4k}}\varphi(\omega)$ |
| $X_{13}$ | $\beta\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{t^2+1},\ \frac{x_3}{\sqrt{t^2+1}}$ | $\Psi=(t^2+1)^{-3/4}\times$ $\times\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{\lvert x\rvert^2 t}{1+t^2}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\varphi(\omega)$ |
| $X_{14}$ | $\frac{tx_1+x_2}{t^2+1}+\beta\operatorname{arctg}t,$ $\frac{tx_2+x_1}{t^2+1},\ \frac{x_3}{\sqrt{t^2+1}}$ | $\Psi=(t^2+1)^{-3/4}\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{\lvert x\rvert^2 t}{1+t^2}+\right.\right.$ $\left.\left.+2\beta\operatorname{arctg}t\cdot\frac{tx_2-x_1}{t^2+1}\right)\right]\varphi(\omega)$ |

Используя найденные инварианты и анзацы вида [7] $\Psi=f(t,x)\varphi(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, где $f(t,x)$ — известная функция (см. табл. 1), проведем редукцию четырехмерных нелинейных уравнений (6), (7) к трехмерным ДУЧП. Ниже приведены редукционные уравнения для искомой функции $\varphi$ (индексы $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ у функции $\varphi$ обозначают дифференцирование по этим переменным):

$$X_1:\ i\varphi_t=k(\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3})+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3},\quad \omega_1=t, \tag{18}$$

$$X_2:\ i\varphi_t=k\Delta\varphi+\lambda\gamma^{4/3}\varphi,\quad \varphi\varphi^*=\gamma^2,\quad \gamma>0, \tag{19}$$

$$X_3:\ k\Delta\varphi+\alpha_0\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0,\quad \omega_a=x_a,\quad a=1,2,3, \tag{20}$$

$$X_4:\ i\varphi_t=k(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2}+4\varphi_{\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3})-\frac{k\alpha^2}{\omega_2}\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3},\quad \omega_1=t, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}X_5:\ & i\left(\varphi_t+\frac{\varphi}{2t}+\frac{\omega_3\varphi_{\omega_3}}{t}\right)=\\ &=k\left(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2}+\left(1+\frac{t^2}{\omega_2}\right)\varphi_{\omega_3\omega_3}\right)+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3},\quad \omega_1=t,\end{aligned} \tag{22}$$

$$X_6:\ i\varphi_{\omega_1}=k\left(\frac{1}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1}+4\varphi_{\omega_2}+4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3}\right)-\alpha_0\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \tag{23}$$

$$X_7:\ i\left(\varphi_t+\frac{\varphi}{2t}+\frac{\omega_2\varphi_{\omega_2}}{t}\right)= \\ =k(1+t^2)\varphi_{\omega_2\omega_2}+k\varphi_{\omega_3\omega_3}+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3},\quad t=\omega_1, \tag{24}$$

$$X_8:\ k(4\varphi_{\omega_1\omega_1}+\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3})+\frac{\omega_1}{4k}\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0, \tag{25}$$

$$X_9:\ i\varphi_{\omega_1}=k\left[\frac{1}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1}+4(\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_2})+4\varphi_{\omega_3\omega_3}\right]-\frac{\beta}{4k}\omega_3\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \tag{26}$$

$$X_{10}:\ k(\varphi_{\omega_1\omega_1}+\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3})+\frac{i}{2}\omega_a\varphi_{\omega_a}+ \\ +\left(i\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{4k}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0, \tag{27}$$

$$X_{11}:\ k(\varphi_{\omega_1\omega_1}+\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3})+(2\alpha-\omega_a\omega_a)\frac{\varphi}{4k}+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0, \tag{28}$$

$$X_{12}:\ -i\left(\frac{3}{4}\varphi+\omega_2\varphi_{\omega_2}-\varphi_{\omega_1}\right)= \\ =4k(\omega_2\varphi_{\omega_2})_{\omega_2}+\frac{4\beta^2k}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1}+k\varphi_{\omega_3\omega_3}+\frac{\alpha}{4k\beta}\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \tag{29}$$

$$X_{13}:\ -i\beta\varphi_{\omega_1}=\frac{k}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1}+4k\varphi_{\omega_2}+4k\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2}- \\ -(2\alpha+\omega_2^2+\omega_3^2)\varphi/4k+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \tag{30}$$

$$X_{14}:\ i(\alpha\varphi_{\omega_1}+\omega_1\varphi_{\omega_2}-\omega_2\varphi_{\omega_1})=\varphi_{\omega_1\omega_1}+\varphi_{\omega_2\omega_2}+\varphi_{\omega_3\omega_3}- \\ -\frac{1}{4k}(2\alpha\omega_2+\omega_a\omega_a)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}. \tag{31}$$

**Замечание 1.** Редукционные уравнения, соответствующие уравнению (7), отличаются от уравнений (18)–(31) только тем, что вместо нелинейности $\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}$ они содержат нелинейные слагаемые, порожденные членом $\lambda\Psi\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}|\Psi|^{-2}$.

Каждое из уравнений (18)–(31) последующей редукцией можно свести к ДУЧП от двух независимых переменных, а затем и к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). В результате такой последовательной редукции получаем, как правило, нелинейное ОДУ второго порядка вида

$$A(\omega)\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}+B(\omega)\frac{d\varphi}{d\omega}+C(\omega)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0,$$

где

$$A(\omega)=\begin{cases}A_0,\\ A_0\omega,\\ A_0(\omega^2+1),\end{cases}\qquad B(\omega)=\begin{cases}B_0+iB_1\omega,\\ B_0+iB_1,\\ (B_0+iB_1)\omega,\end{cases}\qquad C(\omega)=\begin{cases}C_0+C_1\omega,\\ C_0+iC_1,\\ C_0+C_1\omega^2,\\ C_0+C_1/\omega,\end{cases}$$

$A_0$, $B_0$, $B_1$, $C_0$, $C_1$ — действительные постоянные или параметры. Конкретный вид функций $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ и переменной $\omega$ в каждом случае определяется соответствующим набором инвариантов $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ (см. табл. 1).

**4. Формулы размножения решений.** Для построения таких формул воспользуемся преобразованиями инвариантности, генерируемыми базисными операторами (2) при $n = 3$ алгебры $AG_2(1,3)$. Прежде всего найдем преобразования, порождаемые операторами $G_a$ (2c) и $\Pi$ (2e). Решая соответствующие уравнения Ли, получаем преобразования Галилея

$$\begin{gathered} G_a: \quad t' = t, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a t, \quad a = 1,2,3, \\ \Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{i\varepsilon_a}{2k}\left(x_a + \frac{\varepsilon_a t}{2}\right)\right), \quad \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1, \end{gathered} \tag{32}$$

и проективные преобразования

$$\begin{gathered} \Pi: \quad t' = \frac{t}{1-pt}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1-pt}, \quad p \in \mathbb{R}^1, \\ \Psi' = \Psi(1-pt)^{3/2} \exp\left(-\frac{ip|x|^2}{4k(1-pt)}\right), \quad a = 1,2,3. \end{gathered} \tag{33}$$

Пусть $W(t,x)$ — решение уравнения (6) или (7). Применяя к нему преобразования (32), получаем новое решение (штрихи ниже опускаем)

$$\Psi = W(t, x+\varepsilon t) \exp\left(\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{|\varepsilon|^2 t}{2}\right)\right), \tag{34}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_a\varepsilon_a$, $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^1$. После применения к решению (34) преобразований (33), находим четырех параметрическое семейство решений

$$\Psi = W\left(\frac{t}{1-pt}, \frac{x+\varepsilon t}{1-pt}\right) \exp\left[i\frac{p|x|^2 + 2\varepsilon x + |\varepsilon|^2 t}{4k(1-pt)}\right](1-pt)^{-3/2}. \tag{35}$$

Нетрудно убедиться, что повторное применение формул (32), (33) к решению (35) приводит к этому же семейству решений, т. е. оно неразмножаемо относительно галнлеевских и проективных преобразований.

Выражение (35) естественно назвать формулой размножения решений уравнений (6), (7), построенной по операторам $G_a$ (2c) и $\Pi$ (2e). Обобщим эту формулу, применив остальные преобразования группы $G_2(1,3)$ — сдвиги по переменным $t$, $x$, вращения в пространстве $\mathbb{R}^3$, растяжения (сжатия) по переменным $t$, $x$, $\Psi$ и вращения компонент $\mathrm{Re}\,\Psi$ и $\mathrm{Im}\,\Psi$ (см. оператор $J$ (2c)). Совокупность этих преобразований задается формулами

$$t' = m^2 t + d_0^1, \quad x' = mAx + d^1, \quad \Psi' = e^{-i\alpha} m^{-3/2}\Psi, \tag{36}$$

где $m > 0$, $d_0^1$, $d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$, $\alpha$ — действительные параметры, $A = (c_{ab})_{a,b=1}^3$ — действительная матрица вращений.

Воспользовавшись группой преобразований (36) из (35) получаем 13-параметрическое семейство решений

$$\begin{gathered} \Psi = e^{i\alpha}\frac{m^{3/2}}{(d_0 - pm^2 t)^{3/2}} \exp\left[i\left(\frac{pm^2|x|^2 + 2m\varepsilon^1 x}{4k(d_0 - pm^2 t)} + \frac{m^2|\varepsilon|^2 t + b_0}{4k(d_0 - pm^2 t)}\right)\right] \times \\ \times W\left(\frac{m^2 t + d_0^1}{d_0 - pm^2 t}, \frac{mAx + m^2\varepsilon t + d}{d_0 - pm^2 t}\right), \end{gathered} \tag{37}$$

где $d_0 = 1-pd_0^1$, $d = d^1+\varepsilon d_0^1$, $\varepsilon^1 = \varepsilon A+pd^1A$, $b_0 = p|d^1|^2+2\varepsilon d^1+|\varepsilon|^2d_0^1$, $|d^1|^2 = d_a^1d_a^1$, $a = 1,2,3$.

Таким образом, если $W(t,x)$ — решение нелинейного уравнения (6) или (7), то формула (37) определяет неразмножаемое семейство решений этого же уравнения.

Если в формуле (37) выбрать параметры $d_0 = 1/p$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ ($A = E$ — единичная матрица) и сделать предельный переход при $p\to\infty$, $m\to 0$, $pm\to -1$, то получим решение уравнения (6) или (7):

$$\Psi(t,x) = t^{-3/2}\exp\left(-\frac{i|x|^2}{4kt}\right)W\left(-\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right). \tag{38}$$

**Замечание 2.** Построенные формулы размножения решений позволяют получать из действительных стационарных решений уравнений (6), (7) комплексные нестационарные решения. Они справедливы для любого уравнения вида (5).

В заключение рассмотрим частный случай формулы (37)

$$\Psi = W(t,Ax) = W(t,C^{(1)}x,C^{(2)}x,C^{(3)}x), \tag{39}$$

где $C^{(a)}x = c_{ab}x_b$, $a,b = 1,2,3$, $C^{(a)} = (c_{a1},c_{a2},c_{a3})$ — векторы-строки матрицы вращений $A$.

*Таблица 2*

| № п/п | Инвариантные переменные $\hat\omega_1,\ \hat\omega_2,\ \hat\omega_3$ | Анзацы $\hat\omega = (\hat\omega_1,\hat\omega_2,\hat\omega_3)$ |
|---|---|---|
| 1 | $t,\ C^{(2)}x,\ C^{(3)}x$ | $\Psi(t,x) = \Phi(\hat\omega)$ |
| 2 | $t,\ C^{(1)}x,\ C^{(2)}x,\ C^{(3)})x$ | $\Psi = \Phi(t,C^{(1)}x,C^{(2)}x,C^{(3)}x),\ \Phi\Phi^* = \gamma^2$ |
| 3 | $C^{(1)}x,\ C^{(2)}x,\ C^{(3)}x$ | $\Psi = \exp(i\alpha_0t)\Phi(\hat\omega)$ |
| 4 | $t,\ \|x\|^2,\ C^{(3)}x$ | $\Psi = \exp\left(i\alpha\operatorname{arctg}\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}\right)\Phi(\hat\omega)$ |
| 5 | $t,\ \|x\|^2-(C^{(3)}x)^2,\ C^{(3)}x-t\operatorname{arctg}\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}$ | $\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(3)}x)^2}{4kt}\right)\Phi(\hat\omega)$ |
| 6 | $t+\operatorname{arctg}\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x},\ \|x\|^2,\ C^{(3)}x$ | $\Psi = \exp(-i\alpha_0t)\Phi(\hat\omega)$ |
| 7 | $t,\ C^{(1)}x-C^{(2)}xt,\ C^{(3)}x$ | $\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(1)}x)^2}{4kt}\right)\Phi(\hat\omega)$ |
| 8 | $2C^{(1)}x+t^2,\ C^{(2)}x,\ C^{(3)}x$ | $\Psi = \exp\left[\frac{it}{2k}\left(C^{(1)}x+\frac{t^2}{3}\right)\right]\Phi(\hat\omega)$ |
| 9 | $t+\operatorname{arctg}\frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x},$ $(C^{(1)}x)^2+(C^{(2)}x)^2,\ 2C^{(3)}x+\beta t^2$ | $\Psi = \exp\left[\frac{i\beta t}{2k}\left(C^{(3)}x+\frac{\beta t^2}{3}\right)\right]\Phi(\hat\omega)$ |
| 10 | $\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{t}},\ \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{t}},\ \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$ | $\Psi = t^{-\frac34+i\frac{\alpha}{4k}}\Phi(\hat\omega)$ |
| 11 | $\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$ | $\Psi = (t^2+1)^{-3/4}\times$ $\times\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{\|x\|^2t}{1+t^2}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\Phi(\hat\omega)$ |
| 12 | $\ln t+2\beta\operatorname{arctg}\frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x},\ \frac{\|x\|^2}{t},\ \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$ | $\Psi = t^{-\frac34+i\frac{\alpha}{4k}}\Phi(\hat\omega)$ |
| 13 | $\beta\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}\frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x},$ $\frac{\|x\|^2}{1+t^2},\ \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$ | $\Psi = (t^2+1)^{-3/4}\times$ $\times\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{t\|x\|^2}{1+t^2}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\Phi(\hat\omega)$ |
| 14 | $\frac{tC^{(1)}x+C^{(2)}x}{1+t^2}+\beta\operatorname{arctg}t,$ $\frac{tC^{(2)}x-C^{(1)}x}{1+t^2},\ \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$ | $\Psi = (t^2+1)^{-3/4}\exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{t\|x\|^2}{1+t^2}+\right.\right.$ $\left.\left.+2\beta\operatorname{arctg}t\cdot\frac{tC^{(2)}x-C^{(1)}x}{t^2+1}\right)\right]\Phi(\hat\omega)$ |

Формула размножения решений (39) позволяет симметризовать по инвариантные переменные и анзацы из табл. 1. Результаты такой симметризации приведены в табл. 2. Отметим, что векторы $C^{(a)}$, $a = 1, 2, 3$, которые фигурируют в табл. 2, являются ортонормированными, т.е. $C^{(a)}C^{(b)} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$ $a, b = 1, 2, 3$.


1. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 808–816.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publ. Comp., 1987, 214 p.
3. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
4. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exacht solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
6. Хакен Г., Синергетика, М., Мир, 1980, 408 с.
7. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
8. Овсянников Л.В., Групповый анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
9. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 44 с.
10. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера, Препринт 87.16, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987.—48 с.